Math. U. Klügel
90 m -3

Digitized by Google

<36603586270011

<36603586270011

Bayer. Staatsbibliothek

Mathematiſches Wörterbuch

oder

Erklärung

der

Begriffe, Lehrſätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweiſen

und litterariſchen Nachrichten begleitet

in alphabetiſcher Ordnung

von

Georg Simon Klügel

Profeſſor der Mathematik und Phyſik auf der Friedrichs-Univerſität zu Halle, Mitgliede der Akademien und Societäten der Wiſſenſchaften zu Petersburg, Berlin, Göttingen und Frankfurt an der Oder, Ehrenmitgliede der ökonomiſchen Geſellſchaft zu Leipzig.

Erſte Abtheilung

Die reine Mathematik.

Dritter Theil

von K bis P.

Mit zehn Kupfertafeln.

Leipzig

im Schwickertſchen Verlage 1808.

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Mathematiſches Wörterbuch,

oder

Erklärung der Begriffe, Lehrſätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik, mit literariſchen Nachrichten, in alphabetiſcher Ordnung.

Erſte Abtheilung.

Arithmetik, Analyſis und Geometrie, die niedere und die höhere.

K.

Kante bezeichnet ſehr gut den Winkel zweyer Seitenflächen eines Prisma oder einer Pyramide, oder eines andern zwiſchen ebenen Flächen eingeſchloſſenen Körpers. Der Winkel dreyer oder mehrerer Ebenen iſt ein körperlicher Winkel, eine Ecke. Euler gebraucht für jenen Flächenwinkel das lateiniſche Wort Acies. — Sollte man im gemeinen Leben unter Kante (einem im Niederſächſiſchen beſonders üblichen Worte) mehr den Durchſchnitt der beiden Ebenen, als ihren Winkel verſtehen, ſo hindert dieſes doch nicht, jene Bedeutung zum geometriſchen Gebrauche feſtzuſetzen. Adelung giebt als eigentliche Bedeutung des Wortes, Kante, an: die Ecke, ſcharfe Seite eines Dinges, und in weiterer, die äußerſte Seite oder Fläche eines Dinges, den Rand. Dieſe letztere möchte die urſprüngliche Bedeutung ſeyn, die auch Fulda als die einzige angiebt.

Kegel, (Conus) iſt ein Körper, der zwiſchen einer Kreisfläche und einer krummen Fläche enthalten iſt,

die von einer durch einen feſten Punct gelegten, und an dem Umfange des Kreiſes ganz herumgeführten, unbeſtimmt langen geraden Linie beſchrieben wird.

In Fig 1. iſt A der feſte Punct, oder der Scheitel (Vertex) des Kegels, BCDE die Kreisfläche oder die Grundfläche (Baſis) deſſelben, AB oder AD die herumgeführte gerade Linie, oder die Seite des Kegels.

1. Da die gerade AB in A nicht begränzt, ſondern unbeſtimmt verlangert gedacht werden muß, ſo iſt mit dem Kegel ABCDEA auf der andern Seite von A noch ein entgegengeſetzter Kegel Abcde verbunden. — Jeden Kegel muß man nach beiden Seiten hin unbeſtimmt fortlaufend ſich gedenken.

2. Die gerade AF, von dem Scheitel nach dem Mittelpuncte der Grundfläche F, heißt die Axe des Kegels. Dieſe in den entgegengeſetzten Kegel verlängert iſt in demſelben die Axe.

3. Wenn die Axe ſenkrecht auf die Grundfläche ſteht, ſo iſt der Kegel ein ſenkrechter oder gleichſeitiger. Iſt ſie gegen dieſe geneigt, ſo iſt der Kegel ein ſchiefer oder ungleichſeitiger (Scalenus). Euklides betrachtet nur den gleichſeitigen Kegel. B. XI. Erkl. 18.

4. Die Kegel gehören mit den Pyramiden zu einer Gattung von Körpern. Ein Kegel iſt die Gränze der Pyramiden, welche bey einem gemeinſchaftlichen Scheitel, über regulären, in demſelben Kreiſe beſchriebenen Figuren, errichtet werden. Je größer die Anzahl der Seiten iſt, deſto näher kommen ſie dem Kegel. Daher haben Kegel und Pyramiden verſchiedenes mit einander gemein, was die Form der mit der Grundfläche parallelen Schnitte und den körperlichen Inhalt betrifft.

5. Anſtatt des Kreiſes kann man auch eine andere in ſich herumlaufende Figur, als eine Ellipſe, zur Grundfläche nehmen. Läßt man anſtatt der geraden AB eine

krumme Linie ſich um ihre Axe ganz herumdrehen, ſo entſteht ein kegelartiger Körper, den man Konoid nennt.

6. Wenn ein Kegel parallel mit ſeiner Grundfläche geſchnitten wird, ſo iſt der Schnitt ein Kreis, der Schnitt mag in dem einen oder dem andern der entgegengeſetzten Kegel geführt werden. Der Mittelpunct des Kreiſes iſt der Punct, in welchem die Axe die Ebene deſſelben trifft. Man ſehe jede Anfangsgründe.

7. Die Durchmeſſer der Kreisſchnitte verhalten ſich wie ihre Abſtände von dem Scheitel; ihre Flächen wie die Quadrate dieſer Abſtände.

8. Ein ſchiefer Kegel, (Fig. 2.) deſſen Grundfläche BCD iſt, werde durch ſeine Axe von einer Ebene ABD geſchnitten, die ſenkrecht auf die Grundfläche iſt. Man ziehe in dem Dreyeck ABD die gerade EF, ſo daß der W. AEF = ADB, alſo W. AFE = ABD iſt, und führe durch dieſe EF einen Schnitt ſenkrecht auf die Ebene ABD, welcher die Kegelfläche in der krummen Linie EGFH ſchneide: es iſt dieſer Schnitt ein Kreis, deſſen Durchmeſſer EF iſt.

Denn man ziehe durch irgend einen Punct K der EF die parallele LM mit BD, und führe durch dieſe einen Schnitt LGMH parallel mit der Grundfläche. Dieſer Schnitt iſt ein Kreis, deſſen Durchmeſſer LM iſt. Auch iſt derſelbe ſenkrecht auf die Ebene ABD (ſ. Ebene, 33.). Die Durchſchnittslinie GH der beiden auf ABD ſenkrechten Schnitte iſt ſenkrecht auf die Ebene ABD (a. a. O. 22.), alſo ſenkrecht ſowohl auf EF als auf LM. Wegen der parallelen BD, LM iſt W. ALM = ABD, und W. AML = ADB, alſo iſt W. AEF = AML, und W. AFE = ALM. Daher ſind die Dreyecke EKL und MKF einander ähnlich, und es iſt KE : KL = KM : KF, alſo $KE \times KF = KL \times KM$. In dem Kreiſe LGMH iſt $KL \times KM = KG^2 = KH^2$. Daher iſt $KE \times KF = KG^2 = KH^2$, für jeden Punct auf EF. Da zugleich die gerade GH, welche von EF in K halbirt wird, auf dieſelbe ſenkrecht ſteht, ſo iſt der

Schnitt EGFH ein Kreis, deſſen Durchmeſſer EF iſt, zufolge der Natur des Kreiſes.

9. Der Schnitt EGFH heißt ein Wechſelſchnitt (Sectio ſubcontraria). Würde der Kreis EGFH, oder ein mit denſelben paralleler, als Grundfläche angenommen, ſo wären LGMH oder BCD Wechſelſchnitte. Die geraden BD, EF heißen Antiparallelen.

10. Auf der Beſchaffenheit des Wechſelſchnittes, daß er ein Kreis iſt, beruhen die ſchönen Eigenſchaften der ſtereographiſchen Projection der Kreiſe in einer Kugel.

11. Der körperliche Inhalt eines Kegels iſt der dritte Theil eines Cylinders, der mit dem Kegel dieſelbe Grundfläche und dieſelbe Höhe hat. Euklides XII. 10. Vergl. den Artikel, Exhauſtions-Methode, Th. II. S. 155. Wie Cavaleri den Beweis nach ſeiner Methode des Untheilbaren geführt hat, iſt in Th. I. S. 420. angeführt.

12. Nach der von Archimedes angewandten Methode für die Cubirung der Konoiden wird der Inhalt eines Kegels folgendergeſtalt gefunden. Man theile die Höhe des Kegels in m gleiche Theile, und nenne jeden Theil h, ſo daß die ganze Höhe des Kegels $=$ mh iſt. Durch jeden Theilungspunct führe man einen Schnitt parallel mit der Grundfläche, und errichte über jedem derſelben, ſo wie über der Grundfläche einen Cylinder von der Höhe h, ſo iſt der Kegel kleiner als die Summe aller dieſer Cylinder, aber größer als die Summe der Cylinder über den Schnitten, ohne denjenigen über der Grundfläche. Man ſetze den Halbmeſſer des oberſten oder kleinſten Schnittes $=$ a, ſo iſt der Halbmeſſer der Grundfläche $=$ ma. Die Halbmeſſer der Schnitte, nebſt demjenigen der Grundfläche machen die Progreſſion a, 2a, 3a, 4a.. ma; und ihre Flächen die Progreſſion πaa, $4\pi aa$, $9\pi aa \ldots m^2\pi aa$, wo π der halbe Kreisumfang zur Einheit als Halbmeſſer iſt. Der Kegel iſt kleiner als die Summe, $(1+4+9\ldots+m^2)\pi aah$, und größer als

die Summe, $(1+4+9 \ldots + (m-1)^2)\pi aah$. Jene Summe iſt $= \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)\pi aah$, dieſe iſt $= \frac{1}{6}(m-1).m.(2m-1)\pi aah$,. Der Cylinder über der Grundfläche des Kegels mit derſelben Höhe mh iſt $= \pi m^2 a^2 . mh = \pi m^3 a^2 h$; alſo iſt der dritte Theil deſſelben kleiner als die erſtere Summe, und größer als die zweyte; liegt daher zwiſchen denſelben Größen als der Kegel. Da beide Summen um den Cylinder $\pi m^2 a^2 h$ unterſchieden ſind, der kleiner als jeder angebbare körperliche Inhalt gemacht werden kann, ſo ſind der Kegel und der dritte Theil des Cylinders nicht von einander verſchieden, oder ſie ſind gleich groß.

Die Integralrechnung macht die Rechnung viel kürzer, ſ. Cubirung.

13. Aufg. Den Inhalt eines zwiſchen zwey parallelen Kreisflächen eingeſchloſſenen Kegelſtücks zu finden.

Es ſey a der Halbmeſſer der größern Kreisfläche, b der kleinern, ihr ſenkrechter Abſtand $= c$. Der Inhalt iſt $= \frac{1}{3}\pi(aa + bb + ab)c$.

Die Höhe des ergänzenden Kegels ſey $= x$, ſo daß die Höhe des vollſtändigen Kegels $= c + x$ iſt. Es iſt $a:b = c+x:x$ (Dreyeck 8.), daher $a-b:b = c:x$, und $x = \frac{bc}{a-b}$. Der Inhalt des vollſtändigen Kegels iſt $= \frac{1}{3}\pi aa(c+x)$, des ergänzenden $= \frac{1}{3}\pi bbx$; alſo des Kegelſtücks $= \frac{1}{3}\pi(aa-bb)x + \frac{1}{3}\pi aac$. Da $aa - bb = (a+b)(a-b)$ iſt, ſo wird, wenn für x deſſen Werth geſetzt wird, der angegebene Inhalt des Kegelſtücks erhalten.

14. Satz. Unter allen ſenkrechten Kegeln, die in eine und dieſelbe Kugel eingetragen werden können, iſt derjenige der größte, deſſen Höhe vier Drittheilen des Halbmeſſers der Kugel gleich iſt.

Es ſey der Halbmeſſer der Kugel $= a$, der Abſtand der Grundfläche des geſuchten Kegels von dem Mittelpuncte

$= x$, ſo iſt der Halbmeſſer der Grundfläche $= \sqrt{(aa - xx)}$, und der Inhalt des Kegels $= \frac{1}{3}\pi(aa - xx)(a + x) = \frac{1}{3}\pi(a^3 - ax^2 + a^2x - x^3)$. Daß hier ein Größtes Statt findet, erhellt daher, weil der Inhalt Null wird, wenn entweder die Grundfläche Null und die Höhe dem Durchmeſſer gleich iſt, oder wenn beide Null ſind, d. i. wenn $x = -a$ iſt. Nimmt man das Differential des Ausdrucks, und ſetzt es $= 0$ (Größtes und Kleinſtes, 34.) ſo iſt, $-2ax + aa - 3x^2 = 0$, das iſt, $x^2 + \frac{2}{3}ax = \frac{1}{3}aa$. Daraus wird gefunden $x = -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a = \frac{1}{3}a$ (Gleichung, 34.) Dieſer Werth von x gehört zu dem größten Inhalte eines eingeſchriebenen Kegel; die negative Wurzel $-a$, gehört zu dem Kleinſten, welcher hier $= 0$ iſt. Die Höhe des geſuchten Kegels iſt alſo $= \frac{4}{3}a$.

Der Halbmeſſer der Grundfläche iſt $= \sqrt{\frac{8}{9}aa} = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$. Es verhält ſich die Höhe dieſes größten Kegels zu dem Halbmeſſer der Grundfläche wie die Diagonale eines Quadrats zu deſſen Seite.

15. Eben dieſer Kegel hat auch unter allen in die Kugel eingetragenen ſenkrechten Kegeln die größte Oberfläche. — Denn es iſt, wie gleich gezeigt werden wird, die Oberfläche eines ſenkrechten Kegels gleich einem Dreyeck, deſſen Grundlinie der Umfang ſeiner Grundfläche und die Höhe die Seite des Kegels iſt. Mit Anwendung der vorigen Bezeichnungen iſt das Quadrat der Seitenlinie $= (a + x)^2 + a^2 - x^2 = 2aa + 2ax$. Der Umfang iſt $= 2\pi\sqrt{(a^2 - x^2)}$, alſo die Kegelfläche $= \pi\sqrt{(a^2 - x^2)}(2aa + 2ax)$. Dieſe iſt am größten, wenn das Product, $(a^2 - x^2)(2aa + 2ax)$, oder das Aggregat $2a^4 - 2a^2x^2 + 2a^3x - 2ax^3$ am größten iſt. Das Differential dieſes Ausdrucks Null geſetzt, giebt $a^2 - 2ax - 3x^2 = 0$, oder $3x^2 + 2ax = a^2$, welches dieſelbe Gleichung wie die vorher gefundene iſt.

16. Satz. Die Fläche eines Sectors der Oberfläche eines ſenkrechten Kegels iſt ſo groß als ein ebenes

Dreyeck, deſſen Grundlinie der zugehörige Bogen des Grundkreiſes, und die Höhe die Seite des Kegels iſt. Daher iſt dann die ganze krumme Oberfläche eines ſenkrechten Kegels gleich einem ebnen Dreyeck, deſſen Grundlinie der Umfang ſeiner Grundfläche und die Höhe die Seitenlinie des Kegels iſt.

Man beſchreibe in und um den Grundkreis ein gleichſeitiges Vieleck, jedes von derſelben Anzahl Seiten und errichte über beiden eine ſenkrechte Pyramide, deren Spitze in den Scheitel des Kegels fällt. Die krumme Oberfläche des Kegels liegt zwiſchen den Summen der Seitenflächen der einen und der andern Pyramide. Ein Sector der Kegelfläche, der zu einem der Bogen, worin der Kreis getheilt iſt, gehört, liegt zwiſchen den beiden Dreyecken, welche die Seitenflächen beider Pyramiden bilden. Daher liegt jeder Sector der Kegelfläche zwiſchen zwey Dreyecken, die auf gleiche Art, wie jene gebildet werden, der zugehörige Bogen mag ein aliquoter Theil des Grundkreiſes ſeyn oder nicht. Man ſetze nun einen Bogen des Grundkreiſes $= z$, den zugehörigen Sector der Kegelfläche $= S$, die Seitenlinie des Kegels $= b$. Eine endliche Zunahme des Bogens ſey Δz, der Kegelfläche $= \Delta S$; die Chorde des Bogens Δz werde durch $m \Delta z$; die berührende an der Mitte des Bogens bis an die aus dem Mittelpuncte durch die Endpuncte gezogenen geraden, durch $n \Delta z$ bezeichnet. Die ſenkrechte vom Scheitel auf die Chorde ſey $= \beta$. Nun iſt $\Delta S > \frac{1}{2} \beta . m \Delta z$, und

$\Delta S < \frac{1}{2} b . n \Delta z$; alſo auch $\frac{\Delta S}{b \Delta z} > \frac{\beta . m \Delta z}{2 b \Delta z}$,

und $\frac{\Delta S}{b \Delta z} < \frac{b . n \Delta z}{2 b \Delta z}$. Für den Differentialquotienten $\frac{\partial S}{b \partial z}$, der von der Größe der Veränderungen nicht abhängt, iſt ſtatt der Verhältniſſe $b : \beta$; $\Delta z : m \Delta z$; $\Delta z : n \Delta z$ zu ſetzen $1 : 1$. Dadurch wird $\frac{\partial S}{b \partial z} = \frac{1}{2}$, und $\partial S =$

$\frac{1}{2}b\partial z$, folglich $S=\frac{1}{2}bz$, welches der erſte Theil des Satzes iſt, wovon der zweyte eine unmittelbare Folge wird.

Der Halbmeſſer des Kreiſes ſey $=a$, ſo iſt der Umfang $=2\pi a$, und die krumme Kegelfläche $=\pi ab$.

17. Archimedes druckt den Satz (16.) folgendergeſtalt aus: Jedes gleichſchenklichten Kegels Oberfläche, ohne ſeine Grundfläche, iſt einem Kreiſe gleich, deſſen Halbmeſſer die mittlere Proportionallinie iſt zwiſchen der Seite des Kegels und dem Halbmeſſer der Grundfläche (von Kugel und Cylinder, Buch I. S. 15.). Nämlich wenn man in der Formel für die Kegelfläche, πab, ſetzet $ab=cc$, ſo iſt die Kegelfläche $=\pi cc$, einem Kreiſe, deſſen Halbmeſſer $=c$ iſt. — Der Archimedeiſche Beweis zeigt, daß die Kegelfläche weder größer noch kleiner als die angegebene Kreisfläche ſeyn kann, daher ihr gleich iſt.

18. Nimmt man den Winkel ω ſo, daß $2\pi:\omega=b:a$ iſt, ſo iſt der Kreisbogen $b\omega=$ dem Kreisumfange $2\pi a$, und der Sector mit dem Halbmeſſer b und dem Winkel ω iſt $=\frac{1}{2}b.b\omega=\pi ab$, der Kegelfläche.

19. **Satz.** Die krumme Oberfläche eines ſenkrechten Kegelſtücks iſt gleich der krummen Oberfläche eines ſenkrechten Kegels, deſſen Grundfläche zum Halbmeſſer die Summe der Halbmeſſer von den Grundflächen des Kegelſtücks hat, und deſſen Seite dieſelbe mit der Seite des Kegelſtücks iſt.

Denn es ſeyn die Halbmeſſer der beiden Grundflächen a und α, die Seiten der zugehörigen Kegel mit dem gemeinſchaftlichen Scheitel, b und β, ſo iſt die krumme Oberfläche des Kegelſtücks $=\pi(ab-\alpha\beta)$. Es iſt $a:b=\alpha:\beta$; daraus $ab:bb=\alpha\beta:\beta\beta$; hieraus $ab-\alpha\beta:bb-\beta\beta=ab:bb=a:b$. Alſo iſt $ab-\alpha\beta=\frac{a(b+\beta)(b-\beta)}{b}$. Aus der erſten Proportion folgt noch dieſe, $a+\alpha:b+\beta=a:b$. Dadurch wird $ab-\alpha\beta=(a+\alpha)(b-\beta)$, und die krumme Fläche des Kegelſtücks $=\pi(a+\alpha)(b-\beta)$.

20. Für die Oberfläche des ungleichſeitigen Kegels einen endlichen analytiſchen Ausdruck zu finden, iſt wegen der verwickelten Integrationsformel nicht möglich. Die Differentialformel iſt inzwiſchen bald gefunden, wie jetzt gezeigt werden wird.

21. Es iſt AMBA (Fig. 3.) die Grundfläche eines ungleichſeitigen Kegels, deſſen Scheitel in D, die Axe DC iſt. Das Dreyeck ADB, worin die Axe DC iſt, ſey ſenkrecht auf die Grundfläche. Die ſenkrechte DE auf die Ebene derſelben treffe den (hier verlängerten) Durchmeſſer BA in E. Auf dem Umfange der Grundfläche nehme man irgend zwey Puncte, M, m', und ziehe die Seitenlinien DM, Dm, ſo iſt MDm ein Sector der Kegelfläche, der als die Zunahme des unbeſtimmten Sectors ADM angeſehen werde. Die Fläche deſſelben liegt zwiſchen zwey ebenen Dreyecken, deren eines von der Chorde des Bogens Mm und den beiden Seitenlinien DM, Dm gebildet wird, das andere von der die Mitte von Mm berührenden, und von den beiden an ihre Endpuncte auf den verlängerten Halbmeſſern CM, Cm aus D gezogenen geraden Linien, auf gleiche Art, wie es in (16.) gezeigt iſt. In M werde die berührende MN gezogen, und auf dieſe von D aus die ſenkrechte DP. Dieſer DP nähern ſich die von D auf die verlängerte Chorde von M und der die Mm in der Mitte berührenden gezogenen Perpendikel immer mehr, je kleiner Mm genommen wird. Es ſey der Sector ADM = S, der Bogen AM = z, ſo iſt auf gleiche Weiſe wie in (16.) der Differentialquotient $\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{1}{2} DP$. Darum muß ein Ausdruck für das Perpendikel DP durch den Bogen AM oder den Winkel ACM geſucht werden.

22. Von dem Puncte E, wo die ſenkrechte aus D die Ebene der Grundfläche trifft, ziehe man auf die den Kreis in M berührende MN die ſenkrechte EP, und dann die gerade DP, ſo iſt dieſe DP ſenkrecht auf MN. Denn

die Ebene DEP iſt ſenkrecht auf die Ebene CME, da DE ſenkrecht auf ſie iſt (Ebene, 21.): und da MP ſenkrecht auf den Durchſchnitt beider, EP iſt, ſo iſt ſie ſenkrecht auf die Ebene DEP (Ebene, 25.), alſo ſenkrecht auf die durch P gezogene DP. — Man ſetze nun $AC = a$, $CD = b$, den ſpitzen Winkel $ACD = \alpha$; den unbeſtimmten Winkel $ACM = \varphi$. Es iſt $CN = \frac{a}{\cos\varphi}$; $CE = b\cos\alpha$, alſo $EN = \frac{a}{\cos\varphi} - b\cos\alpha = \frac{a - b\cos\alpha . \cos\varphi}{\cos\varphi}$. Da W. $N = 90^\circ - \varphi$, und EPN ein Rechter iſt, ſo iſt $EP = NE . \cos\varphi = a - b\cos\alpha . \cos\varphi$. Nun iſt $PD^2 = DE^2 + PE^2$, und $DE = b\sin\alpha$, folglich iſt

$$PD = \sqrt{(b^2 \sin\alpha^2 + (a - b\cos\alpha . \cos\varphi)^2)}.$$

Der zwiſchen AD, MD und AM enthaltene Sector der Kegelfläche ſey $= S$, ſo iſt das Differential

$$\partial S = \tfrac{1}{2} a \partial\varphi \sqrt{(b^2 \sin\alpha^2 + (a - b\cos\alpha . \cos\varphi)^2)}.$$

Man ſetze $b\sin\alpha = h$; $b\cos\alpha = g$, ſo iſt

$$\partial S = \tfrac{1}{2} a \partial\varphi \sqrt{(a^2 + h^2 - 2ag\cos\varphi + g^2\cos\varphi^2)}.$$

Zur Abkürzung ſey $a^2 + h^2 = c^2$, ſo iſt

$$\partial S = \tfrac{1}{2} ac\partial\varphi \sqrt{(1 - \frac{2ag}{cc}\cos\varphi + \frac{g^2}{c^2}\cos\varphi^2)}$$

23. Das Integral dieſer Formel iſt nur in Geſtalt einer Reihe anzugeben möglich. Die Wurzelgröße wird in eine Reihe verwandelt, entweder nach der Formel für den binomiſchen Lehrſatz, wenn der erſte Theil $= 1$, der zweyte $= -\frac{2ag}{cc}\cos\varphi + \frac{g^2}{c^2}\cos\varphi^2$ genommen wird, oder bequemer, wenn man die Wurzel $=$

$$1 + A\cos\varphi + B\cos\varphi^2 + C\cos\varphi^3 + D\cos\varphi^4 + \text{etc.}$$

ſetzt, und die unbekannten Coefficienten durch Vergleichung des Quadrats dieſer Reihe mit der Größe unter dem Wur-

zelzeichen beſtimmt. Solchergeſtalt erhält man eine Reihe Differentialformeln von der Geſtalt $\partial\varphi . \cos\varphi^m$, deren Integral zu finden, in dem Artikel, Integralrechnung, 114, nebſt 62. 63, gewieſen iſt. Es iſt

$$A = -\frac{ag}{cc}; \quad B = \frac{g^2 h^2}{2c^4};$$
$$C = -AB; \quad D = -AC - \tfrac{1}{2}B^2;$$
$$E = -AD - BC; \quad F = -AE - BD - \tfrac{1}{2}C^2;$$
etc.

24. Für die halbe Kegelfläche, da $\varphi = \pi$ iſt, werden die Integrale, in deren Differentialen der Exponent von $\cos\varphi$ eine ungerade Zahl iſt, alle Null, und die Integrale von den übrigen, mit geraden Potenzen von $\cos\varphi$, enthalten nur ein einziges Glied, den Winkel φ mit einem numeriſchen Coefficienten, der ein eigentlicher Bruch iſt, außer dem Coefficienten der Reihe. Nämlich, wenn in dem unbeſtimmten Integral, $\int \cos\varphi^{2m}\partial\varphi$, geſetzt wird $\varphi = \pi$, ſo iſt

$$\int \cos\varphi^2 \partial\varphi = \tfrac{1}{2}\pi; \quad \int \cos\varphi^4 \partial\varphi = \frac{1.3}{2.4}\pi;$$
$$\int \cos\varphi^6 \partial\varphi = \frac{1.3.5}{2.4.6}\pi; \int \cos\varphi^8 \partial\varphi = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\pi;$$
u. ſ. f.

25. Dadurch wird die krumme Oberfläche des Kegels =

$$ac(\pi + \tfrac{1}{2}\pi.B + \frac{1.3}{2.4}\pi.D + \frac{1.3.5}{2.4.6}\pi.F$$
$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\pi.H + \text{etc.}).$$

Die Entwickelung der Coefficienten aus den obigen Werthen giebt

$$A = -\frac{ag}{c^2};\quad B = +\frac{g^2h^2}{2c^4};$$

$$C = +\frac{ag^3h^2}{2c^6};\quad D = +\frac{g^4h^2(4a^2-h^2)}{8c^8};$$

$$E = +\frac{ag^5h^2(4a^2-3h^2)}{8c^{10}};$$

$$F = +\frac{g^6h^2(8a^4-12a^2h^2+h^4)}{16c^{12}};$$

u. ſ. f.

Folglich iſt nunmehr die krumme Oberfläche des ſchiefen Kegels =

$$\pi ac\left(1 + \frac{g^2h^2}{4c^4} + \frac{1.3}{2\ 4}.\frac{g^4h^2(4a^2-h^2)}{8c^8} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{g^6h^2(8a^4-12a^2h^2+h^4)}{16c^{12}} + \text{etc.}\right).$$

26. In den mehrtheiligen Factoren der Glieder dieſer Reihe ſetze man für h^2 ſeinen Werth, c^2-a^2, und drücke a und c durch ihr Verhältniß gegen h aus, ſo daß $a=mh$; $c=nh$ ſey. Dadurch erhält man die krumme Oberfläche des ſchiefen Kegels =

$$\pi ac\Big(1 + \frac{1}{4}.\frac{1}{n^4}.\frac{g^2}{h^2} - \frac{1.\ 3}{4.16}\left(\frac{1.3}{n^6} - \frac{3.5m^2}{n^8}\right)\frac{g^4}{3h^4} + \frac{1.\ 3.\ 5}{4.16.36}\left(\frac{1.3.5}{n^8} - 2.\frac{3.5.7m^2}{n^{10}} + \frac{5.7.9m^4}{n^{12}}\right)\frac{g^6}{5h^6} - \text{etc.}$$

wo das Geſetz der Fortſchreitung bemerkbar iſt. Dieſe Form der Reihe hat Euler in den Novis Actis Acad. Petrop. T. III. p. 89. angegeben, wo noch zwey Glieder zugeſetzt ſind. Sie iſt dadurch vorzüglich, daß die Progreſſionalgröße, $\frac{g^2}{h^2}$, diejenige iſt, von welcher der Unterſchied des ſenkrechten und ſchiefen Kegels abhängt. Es iſt $\frac{g}{h}$ die Cotangente des Neigungswinkels der Axe. Der Quotient n iſt immer größer als 1, und $\frac{m}{n}$ kleiner als 1.

27. Wenn aus der Formel in (25.) die Größe h ganz herausgeſchafft wird, ſo läßt ſich die Reihe nach Potenzen von $\frac{g^2}{c^2}$ ordnen, wobey ſich auch ein Geſetz der Fortſchreitung entdeckt. Dieſe Form hat l'Huilier der Reihe gegeben, in den Principiis calculi diff. et integr. §. 135. p. 199. Nur hat er die Progreſſionalgröße nicht abgeſondert.

28. In dem Falle, daß die gefundene Reihe wegen des Verhältniſſes von g zu h nicht brauchbar iſt, würde man die Oberfläche einer um den Kegel gelegten, und einer in denſelben getragenen Pyramide mit einer regulären Grundfläche zu berechnen haben. Die Oberfläche des Kegels liegt zwiſchen ihren beiden Oberflächen. Man theile alſo den Halskreis AMB in eine gewiſſe Anzahl gleicher Theile, und ziehe durch jeden Theilungspunct, wie M, eine berührende Auf dieſer liegt eine Seite FG des Vielecks, ſo daß M die Mitte dieſer Seite iſt. Berechnet man für den Punct M die auf MN ſenkrechte DP, ſo erhält man aus der Seite des Vielecks FG und der DP den Inhalt der zu M gehörigen Seitenfläche FDG. Die halbe Oberfläche der umgeſchriebenen Pyramiden iſt gleich dem Dreneck, deſſen Grundlinie die Seite des Vielecks und die Höhe der Summe aller Perpendikel

wie DP iſt. — Für die eingeſchriebene Pyramide verfährt man eben ſo, nur daß hier ſtatt des Halbmeſſers CM die von C auf die Seite des Vielecks gezogene ſenkrechte genommen wird.

29. Die Aufgabe über die Oberfläche eines ſchiefen Kegels hat mehrere Mathematiker beſchäftigt. Ein Geometer in der Mitte des 17ten Jahrhunderts, Richard Albius, gab muthmaßlich eine Formel für dieſe Oberfläche an. Man findet ſie in Käſtners Geſchichte der Mathematik, Th. III. S. 218. Varignon iſt der erſte, der ſie aufzulöſen ſuchte, kam aber nicht weiter, als daß er ſtatt der Integration die Rectification einer transſcendenten Curve ſetzte. Sein Aufſatz ſteht in den Miscell. Berolin. ad ann. 1727. Contin. 2da. Leibnitz wollte in einem Anhange zu dieſer Abhandlung ſtatt jener Curve eine algebraiſche anwenden. Das Verfahren iſt ſehr ſinnreich; er übereilte ſich aber dabey in einem Stücke. Euler zeigte in den Commentt. novis Acad. Petrop. T. I. a. ann. 1747 et 1748, wie algebraiſche Curven conſtruirt werden können, durch deren Rectification die Oberfläche ſchiefer Kegel gefunden wird, erweiterte ſogar die Auflöſung auf Kegel mit andern Grundflächen als Kreiſen. Dieſes alles nach der ältern geometriſch-analytiſchen Methode. Im Jahr 1786 nahm Euler die Aufgabe wieder vor, und löſete ſie durch die Integralrechnung auf, in den Novis Actis Acad. Petrop. T. III. a. a. 1785. Er findet zweyerley Formeln, deren eine die hier (25.) entwickelte iſt, die er aber auf eine ſehr künſtliche Art herausbringt, weil er die Verwandlung des irrationalen Werths von DP auf eine andere Weiſe vornimmt. Aus derſelben leitet er die in (26.) mitgetheilte her. Die zweyte Formel unterſcheidet ſich dadurch, daß in dem Differential ∂S ſtatt $g^2 \cos \varphi^2$ geſetzt iſt $\frac{1}{2}g^2 + \frac{1}{2}g^2 \cos 2\varphi$, welches eine leichte Annäherung in dem Falle giebt, daß $a^2 + h^2 + \frac{1}{2}g^2$ gegen $\frac{1}{2}g \cos 2\varphi - 2ag \cos \varphi$ groß iſt. Euler zeigt auch, wie die ebene krummlinichte Figur, welche der Kegelfläche gleich iſt, gezeichnet werden kann; wiewohl dieſes immer mühſam ſeyn

möchte. In der zur Erläuterung beygefügten 8ten Figur iſt der Winkel EAF, der längſten und der kürzeſten Seitenlinie, unrichtig als ein Rechter dargeſtellt. — Um dieſelbe Zeit legte Käſtner der Göttingiſchen Societät der Wiſſenſchaften ſeine Auflöſung dieſer Aufgabe vor, die in den Commentationen der Societät Bd. IX. enthalten iſt. Von der neuen Eulerſchen Auflöſung konnte er nichts wiſſen, da er ſeine Abhandlung den 9. Jan. 1788 vorlas, und der dritte Band der Petersburgiſchen Acten erſt im Jahre 1788 erſchienen iſt. Käſtners Verfahren iſt daſſelbe mit dem hier angewandten. Nur entwickelt er die Coefficienten C, D, E, etc. nicht. Er giebt die Differentialgleichung für die abgewickelte Oberfläche an. Da dieſe auf keine bequeme Art integrirbar iſt, ſo zeigt er, wie ein der wahren Figur nahe kommendes Netz gezeichnet werden möge. — Die Formel von l'Huilier iſt oben angezeigt. Von dieſer Materie hat noch Yelin in Erlangen 1794 eine gute Gradualſchrift geliefert.

30. Anſtatt die abgewickelte Kegelfläche ſelbſt zeichnen zu wollen, zeichne man, welches viel leichter iſt, und genau bewerkſtelligt werden kann, die abgewickelte Fläche einer gleichſeitigen Pyramide, deren Grundfläche ein um den Kreis, oder in demſelben beſchriebenes reguläres Vieleck iſt. Es ſey (Fig. 3.) FG die Seite des umgeſchriebenen Vielecks, welche den Kreis AMB in M berührt. Zieht man DF, DG, ſo iſt das Dreyeck FDG eine der Seitenflächen der Pyramide. In dieſem iſt der Winkel FDG der Unterſchied der Winkel FDP, GDP. Die Kathete MP in dem rechtwinklichten Dreyeck MDP iſt $= EC. \sin ECM = g \sin \varphi$. Denn man ziehe EL ſenkrecht auf CM ſo iſt $EL = PM$, da CM und EP parallel ſind. Alſo $PM = g \sin \varphi$. Da MF und MG jede die halbe Seite des Vielecks ſind, ſo iſt ſowohl PF als PG bekannt. Nun iſt vorher auch die auf MP ſenkrechte DP gefunden, alſo werden $\tang FDP = \frac{FP}{DP}$,

und tang GDP $= \frac{GP}{DP}$ jede bekannt, und der Unterſchied ihrer Winkel, FDG. Ferner iſt FD $=$ DP $\times$ ſec. FDG, und DG $=$ DP . ſec. GDP. Solchergeſtalt findet man ein Dreyeck nach dem andern. Da je zwey eine Seite gemein haben, ſo braucht man nur immer eine Seite zu berechnen, außer in dem erſten, wenn man nicht zur Probe dieſelbe Seite für zwey neben einander liegende Dreyecke berechnen will. — Mit der Abwickelung der eingeſchriebenen Pyramide verfährt man auf ähnliche Art. — Durch dieſes Verfahren erhält man in den Puncten M zugleich Puncte der abgewickelten Kegelfläche.

31. Es kann nöthig ſeyn, den Winkel der Ebene DCM mit der Grundfläche zu finden. Dieſes geſchieht leicht durch Hülfe der ſphäriſchen Trigonometrie. Es ſind hier drey Ebenen, diejenigen der Dreyecke ACD und MCD, und die des Sectors ACM, von welchen die beiden erſten auf einander ſenkrecht ſtehen. Man beſchreibe aus C mit einem willkührlichen Halbmeſſer eine Kugelfläche, ſo geben die drey Puncte, worin die Linien CA, CD, CM ſie treffen, die Winkelpuncte eines ſphäriſchen, bey A rechtwinklichten, Dreyecks, in welchem die Katheten die zu ACD ($=\alpha$), und ACM ($=\varphi$) gehörigen Kreisbogen ſind. Der Winkel, welcher der Seite, Bogen α, gegen über liegt, iſt der geſuchte Winkel der Ebene DCM mit ACM. Es ſey dieſer Winkel ω, ſo iſt tang $\omega = \frac{\text{tang}\,\alpha}{\sin\varphi}$.

32. Allgemeine Unterſuchungen über die Abwickelung krummer Oberflächen ſind befindlich in einer Abhandlung von Euler: De ſolidis, quorum ſuperficiem in planum explicare licet. Commentt. novi Acad. Petrop. T. XVI. a. a. 1771. und noch vollſtändiger von Monge in den Mémoires préſentés à l'Acad. des Sc. T. IX. à Paris 1780.

Kegelſchnitt iſt die ebene Figur, welche durch den Schnitt einer Kegelfläche mit einer Ebene entſteht. Wird der Schnitt durch den Scheitel geführt, ſo iſt die Figur ein geradlinichter Winkel, in jeder andern Lage eine krumme Linie. Unter Kegelſchnitt verſteht man ausſchließlich den letztern.

1. Es ſey ABD (Fig. 4.) irgend ein Schnitt durch die Axe eines Kegels, deſſen Grundfläche der Kreis BCDE iſt, alſo ein Dreyeck, deſſen Grundlinie ein Durchmeſſer BD iſt. Man ziehe in der Ebene deſſelben die parallele MN mit BD, und führe durch dieſe einen Schnitt MQNR parallel mit der Grundfläche, ſo iſt dieſer Schnitt ein Kreis, deſſen Durchmeſſer MN iſt (Kegel, 6.). Zieht man in der Ebene dieſes Schnittes die gerade QPR ſenkrecht auf MN durch einen Punct derſelben P, ſo iſt $PQ = PR$, und $PQ^2 = MP \times PN$.

2. Ein Kegel ACE (Fig. 5.) werde von einer Ebene FHK, die nicht durch den Scheitel geht, geſchnitten; ihr Durchſchnitt mit der Ebene der Grundfläche ſey KHK. Durch den Mittelpunct O der Grundfläche ziehe man OH ſenkrecht auf KHK, und ſchneide den Kegel durch den Scheitel A und den Durchmeſſer BOD. Die den Kegel ſchneidende Ebene FHK ſchneide das Dreyeck ABD in FG: dieſe FG iſt ein Durchmeſſer des krummlinichten Schnittes FQGR, nämlich ſo, daß ſie alle in demſelben mit KHK parallelen QR halbirt.

Denn man ziehe in dem Dreyeck ABD mit BD eine parallele MN, welche FG in P ſchneide, ſo iſt die Ebene der Linien, MN, QR, parallel mit der Ebene der Linien BH, KK, und der Winkel MPQ = BHK (Ebene, 18. 13.), alſo MPQ ein Rechter. Daher $PQ = PR$, (1.).

3. Wenn das Dreyeck ABD ſenkrecht auf die Grundfläche iſt, ſo ſteht die KK, welche auf den Durchſchnitt beider Ebenen ſenkrecht iſt, auf die Ebene des Dreyecks ſenkrecht, und die der KK parallele QR ebenfalls (Ebene, 25, 11.). Die QR ſteht alſo auf FG ſenk-

recht, und iſt die Axe des Kegelſchnitts. Eine Axe iſt nämlich ein Durchmeſſer, der parallele Chorden rechtwinklicht halbirt.

4. Bey der Schneidung eines Kegels ſind drey Fälle möglich, außer dem Schnitte durch den Scheitel. Der Durchſchnitt KK mit der Ebene der Grundfläche kann erſtlich ſo liegen, daß der Durchſchnitt FG mit dem nach (2.) gelegten Dreyeck ABD beide Schenkel AB, AD des Winkels A treffe, wie in Fig. 5. Oder er liegt zweytens ſo, daß FG parallel iſt mit dem einen Schenkel AD; oder drittens ſo, daß FG nur den einen Schenkel ſchneidet, von dem andern aber die Verlängerung jenſeits des Scheitels A. In dem erſten Falle heißt der Schnitt eine Ellipſe, in dem zweyten eine Parabel, und in dem dritten eine Hyperbel. Der Grund dieſer Benennungen iſt in dem Artikel: Ellipſe, Th. II. S. 74 angeführt.

5. Es ſey der Schnitt eine Ellipſe (Fig. 5), welche das nach der Beſtimmung (2.) durch die Axe gelegte Dreyeck ABD in FG ſchneide. Durch die Endpuncte F, G ſeyn Ff, Gg parallel mit der Grundlinie BD, eben ſo, MN durch einen Punct P der Linie FG, und QPR ſey parallel mit der Durchſchnittslinie KK der ſchneidenden Ebene und der Ebene der Grundfläche: es iſt $PQ^2 : FP \times PG = Ff \times Gg : FG^2$.

Denn es iſt

$$PM : FP = Gg : FG,$$
$$PN : PG = Ff : FG,$$

alſo durch Zuſammenſetzung der Verhältniſſe,

$$PM \times PN : FP \times PG = Ff \times Gg : FG^2.$$

Nun iſt $PQ = PR$, und $PQ^2 = PM \times PN$ (1.), alſo iſt

$$PQ^2 : FP \times PG = Ff \times Gg : FG^2.$$

6. In dem Mittelpuncte des Durchmeſſers FG iſt das Product oder Rechteck $FP \times PG = \frac{1}{4} FG^2$; alſo

das Quadrat der Ordinate daſelbſt $= \frac{1}{4} Ff \times Gg$, oder das Quadrat der Chorde, das iſt, des conjugirten Durchmeſſers $= Ff \times Gg$.

7. Man nehme zu F G, Ff, Gg die vierte Proportionale L l, ſo heißt dieſe der Parameter, und es iſt $PQ^2 : FG \times PG = Ll : FG$.

8. Da $FP \times PG = FP \times FG - FP^2$, ſo iſt $PQ^2 = FP \times Ll - FP \times \frac{FP \times Ll}{FG}$.

9. Der Kegelſchnitt ſey eine Parabel (Fig. 6.), indem der Durchſchnitt F H der ſchneidenden Ebene F H K mit dem Dreyeck durch die Axe dem Schenkel A D parallel iſt. Man ziehe nun durch den Punct F die parallele F f mit dem Durchmeſſer B D der Grundfläche; ferner wie vorher M N parallel mit B D, und Q P R parallel mit der Durchſchnittslinie K H K der Grundfläche und der ſchneidenden Ebene: Es iſt $PQ^2 : FP \times Ff = Ff : Af$.

Denn es iſt $PM : FP = Ff : Af$, wegen der ähnlichen Dreyecke, und daher $PM \times PN : FP \times PN = Ff : Af$. Da $PQ^2 = PM \times PN$ iſt (1.), ſo iſt $PQ^2 : FP \times Ff = Ff : Af$. Es iſt nämlich $PN = Ff$.

10. Es ſey $Af : Ff = Ff : Ll$, ſo iſt $PQ^2 = FP \times Ll$. Die beſtändige Linie L l heißt auch hier der Parameter.

11. Der Kegelſchnitt ſey eine Hyperbel (Fig. 7.), indem der Durchſchnitt F H der ſchneidenden Ebene F H K mit dem Dreyeck durch die Axe (nach der in (2.) beſtimmten Lage) den Schenkel A D jenſeits A ſchneidet. Bey derſelben Conſtruction und denſelben Bezeichnungen, wie für die Ellipſe, iſt

$$PM : FP = Gg : FG$$
$$PN : PG = Ff : FG,$$

alſo

$$PM \times PN : FP \times PG = Ff \times Gg : FG^2.$$

und, weil $PM \times PN = PQ^2$ iſt,

$$PQ^2 : FP \times PG = Ff \times Gg : FG^2.$$

12. Daß für die Puncte zwiſchen F und G keine Ordinaten an den Kegelſchnitt möglich ſind, zeigt die Lage der ſchneidenden Ebene; aber von G an iſt in dem entgegengeſetzten Kegel dieſelbe Figur enthalten, wie in dem Kegel ABCD. Es ſey die Abſciſſe Gp, die zugehörige Doppel-Ordinate qpr, ſo iſt daſelbſt auf gleiche Art wie in dieſem,

$$pq^2 : Gp \times Fp = Gg \times Ff : FG^2.$$

Nimmt man $Gp = FP$, ſo iſt $Fp = GP$, und daher $pq = PQ$.

13. Es ſey Ll die vierte Proportionale zu FG, Ff, Gg, ſo iſt $PQ^2 : FP \times PG = Ll : FG$, und

$$PQ^2 = FP \times Ll + FP \times \frac{FP \times Ll}{FG}.$$

14. An der Hyperbel iſt das Quadrat der Ordinate größer als das Rechteck von dem Parameter und der Abſciſſe, an der Ellipſe iſt es kleiner. Der Unterſchied des Quadrats und des Rechtecks iſt ein Rechteck über der Grundlinie FP, welches dem Rechtecke von FG und Ll ähnlich iſt. Es verhalten ſich nämlich die Seiten des letztern $FG : Ll$ wie die Seiten des erſtern $FP : \frac{FP \times Ll}{FG}$.

Apollonius druckt das Quadrat der Ordinate an der Ellipſe und Hyperbel aus durch das Rechteck von der Abſciſſe mit der ſenkrechten (wie er den Parameter nennt) dort vermindert, hier vergrößert um ein Rechteck über der Abſciſſe, welches dem Rechteck von den Seiten FG und Ll ähnlich iſt. Den Parameter ſetzt er an FG in dem Puncte F ſenkrecht auf FG, und zeichnet über FP ein Rechteck, welches dem Quadrat von PQ gleich iſt. Wegen dieſer Lage des Parameters nennt er dieſe Linie die ſenkrechte, (ὀρθια), den Durchmeſſer FG aber die ſchiefe, (πλαγια).

15. Die vornehmſten Eigenſchaften der Ellipſe und Hyperbel ſind in den ihnen gewidmeten Artikeln aus der angenommenen Gleichung für rechtwinklichte Coordinaten, die von der einen oder der andern Axe halbirt werden, entwickelt worden. Für die Parabel wird weiterhin daſſelbe geſchehen. Die allgemeinſten Eigenſchaften werden in dem Artikel, krumme Linien, vorgetragen werden. Hier war die Abſicht zu zeigen, wie die drey Curven aus dem Schnitte einer Kegelfläche entſtehen.

16. In der analytiſchen Abhandlung von der Ellipſe und der Hyperbel iſt die Gleichung für die Ordinaten zu irgend einem Durchmeſſer aus dem Winkel, welchen dieſer mit der großen Axe macht, hergeleitet worden, ſo daß aus dieſen Datis die conjugirten Durchmeſſer und ihr Winkel ſich ergeben. Bey der geometriſchen Entſtehung wird der Winkel der Coordinaten durch das in dem Kegel durch die Axe gelegte Dreyeck, durch die Lage deſſelben gegen die Grundfläche, und durch die Lage der ſchneidenden Ebene gegen beide beſtimmt. Dieſer Winkel iſt FPQ oder FHK (Fig. 5.). Man beſchreibe aus H mit einem willkührlichen Halbmeſſer eine Kugelfläche, ſo zeichnen die geraden, HO, HK, HF, darauf die drey Winkelpuncte eines ſphäriſchen Dreyecks, worin eine Seite, nämlich der zu dem W. OHK gehörige Bogen ein Quadrant iſt. Der Winkel der geraden HO, HF ſey $=\beta$, der Winkel der Ebene ABD mit der Grundfläche ſey $=\omega$, ſo iſt der zu dem W. FHK gehörige Bogen die Seite, welche dem Winkel ω gegen über ſteht. Dieſe wird nun aus zwey Seiten, einem Quadranten und Bogen β, mit dem eingeſchloſſenen Winkel ω gefunden. Es iſt, wegen des Quadranten, die Formel für den Coſinus dieſes Winkels eine eintheilige, nämlich $\cos FHK = \sin\beta . \cos\omega$. Die Axe mache mit der Grundfläche den Winkel α, und der Durchmeſſer BD mit dem Durchmeſſer in dem auf die Grundfläche ſenkrechten Schnitte durch die Axe den Winkel φ, ſo geben dieſe drey Linien auf einer aus dem Mittelpuncte O beſchriebenen Kugelfläche ein rechtwinklichtes

Dreyeck, worin iſt $\tang \omega = \frac{\tang \alpha}{\sin \varphi}$. Es iſt

$$\cos \omega^2 = \frac{1}{1 + \tang \omega^2} = \frac{\sin \varphi^2}{\sin \varphi^2 + \tang \alpha^2}$$

$$= \frac{\sin \varphi^2 . \cos \alpha^2}{\sin \varphi^2 . \cos \alpha^2 + \sin \alpha^2},$$ alſo iſt

$$\cos FHK = \frac{\sin \beta . \sin \varphi . \cos \alpha}{\sqrt{(\sin \varphi^2 . \cos \alpha^2 + \sin \alpha^2)}}.$$

Der Winkel FHK iſt ein Rechter, wenn $\beta = 0$ iſt, in welchem Falle FH parallel mit BD, und der Schnitt ein Kreis iſt. Ferner wehn $\varphi = 0$ iſt, da das Dreyeck ABD ſenkrecht auf die Grundfläche iſt, wie ſchon (3.) bemerkt worden. Drittens, wenn $\alpha = 90°$, oder wenn der Kegel ein ſenkrechter iſt. Der Winkel BHK iſt in allen drey Fällen ein Rechter.

Zur Geſchichte der Lehre von den Kegelſchnitten.

Die Griechen haben die Eigenſchaften der Kegelſchnitte ſchon mit ſolchem Scharfſinne entwickelt, daß den Neuern nur eine Nachleſe geblieben iſt, außer daß noch dieſe kurze und allgemeine Methoden durch die Analyſis gefunden haben. Von den nicht mehr vorhandenen Schriften des Ariſtäus und Euklides iſt in Th. II. S. 320 Erwähnung geſchehen.

Die Betrachtung der Kegelſchnitte war anfangs natürlich eine eingeſchränkte. Die ſchneidende Ebene ward ſenkrecht auf die Seite eines gleichſeitigen Kegels geſetzt. Wenn der Winkel an dem Scheitel in dem Dreyeck durch die Axe ein Rechter iſt, ſo gab der Schnitt eine Parabel, bey einem ſpitzen Winkel eine Ellipſe, bey einem ſtumpfen eine Hyperbel. Daher findet man in den Schriften des Archimedes die Benennungen Schnitt des rechtwinklichten Kegels, des ſchiefwinklichten und des ſtumpfwinklichten Kegels ſtatt der jetzt gewöhnlichen, von Apollonius eingeführten Benennungen.

Daher unterſcheidet Euklides dieſe drey gleichſeitigen Kegel, in der 18ten Erklär. des XI. B. ein Unterſchied, der nunmehr unnöthig iſt. Die Aſymptoten der Hyperbel hat Archimedes ſchon gekannt. Er nennt ſie Linien, die dem ſtumpfwinklichten Schnitte am nächſten ſind, in der Zuſchrift vor der Abhandlung von Konoiden und Sphäroiden.

Von dem großen Werke des Apollonius über die Kegelſchnitte iſt ſchon in dem Artikel, Geometrie, (Th. II. S. 322 f.) Nachricht ertheilt worden. Es iſt in acht Bücher abgetheilt. In dem erſten wird die Entſtehung der Kegelſchnitte mit ihren vornehmſten Eigenſchaften vorgetragen. Das zweyte betrifft die Durchmeſſer der Schnitte und die Aſymptoten, nebſt verſchiedenen Sätzen, die zu dem Diorismus (Beſtimmung aller möglichen Fälle einer Auflöſung) gehören. Das dritte Buch enthält, wie Apollonius ſelbſt ſagt, viele ſonderbare (παραδοξα), größtentheils ſchöne und neue Lehrſätze, die zu der Conſtruction der ſoliden Oerter (ſolcher Aufgaben, die durch Hülfe der Kegelſchnitte aufgelöſet werden müſſen), und zu den Diorismen dienen. Man muß ſich wirklich über die mannichfaltigen Vergleichungen wundern, die hier an den Abſchnitten der berührenden, der ihnen parallelen, der Durchmeſſer und anderer auf gewiſſe Arten gezogenen geraden Linien, gemacht werden, theils in Abſicht der Dreyecke und Vierecke, die daraus entſtehen, theils in Abſicht der Verhältniſſe ihrer Quadrate oder der Rechtecke aus zwey Theilen einer ſolchen Linie. Hier kommt auch die harmoniſche Theilung einer geraden Linie vor, die durch den Durchſchnitt zweyer berührenden gezogen iſt. Sehr merkwürdig iſt die vermuthlich hier zuerſt vorgetragene Lehre von den Brennpuncten mit manchen von ihnen abhängenden Vergleichungen der geraden Linien und der Winkel. Das vierte Buch zeigt, auf wie mancherley Arten Kegelſchnitte ſich ſchneiden können. Hierin kommt nach des Verfaſſers Angabe vieles neue und vortreffliche (ἐκ περισσου) vor. Doch iſt die Ausführung leicht verſtändlich, ſo daß auch Eutocius, der fleißige Commen-

tator des Apollonius, keine Erläuterungen dem von ihm verbeſſerten Texte beyzufügen nöthig gefunden hat. Die vier übrigen Bücher enthalten ſehr feine und ſchwere Unterſuchungen, daher dieſe Bücher uns auch nicht in der Urſchrift erhalten ſind, wie die vier erſten, ſondern in einer arabiſchen Überſetzung, in welcher aber das achte fehlt. Das fünfte iſt der Unterſuchung über die größten und kleinſten geraden Linien gewidmet, die von einem Puncte her an einen Kegelſchnitt gezogen werden können, oder wie wir jetzt ſie lieber nennen würden, Normalen an dieſe Curven. Von dieſer ſehr ſcharfſinnigen Abhandlung iſt in dem Artikel, Größtes und Kleinſtes (Th. II. S. 684. ff.), ein Abriß geliefert. Das ſechſte Buch betrifft die Gleichheit und Ähnlichkeit der Kegelſchnitte, auch wird darin gezeigt, wie ein gegebener Schnitt in einen gegebenen ſenkrechten Kegel gelegt werden könne, und wie ein ſenkrechter Kegel, der einem gegebenen ähnlich iſt, und einen gegebenen Schnitt enthalten ſoll, gefunden wird. In dem ſiebenten Buche kommen viele neue Sätze vor, die conjugirten Durchmeſſer betreffend, auch einige Sätze vom Größten und Kleinſten (Th. II. S. 688.). Das achte Buch, welches ganz verloren gegangen iſt, enthielt beſtimmte Aufgaben (προβληματα διωρισμενα), und war ein Anhang des ſiebenten, zu welchem es Anwendungen lieferte. Halley hat es wieder herzuſtellen geſucht. Die Aufgaben, die er darin auflöſet, haben zum Gegenſtande, aus der Axe und dem Parameter eines Kegelſchnitts nebſt gewiſſen Annahmen in Beziehung auf einen Durchmeſſer, oder dieſen und den conjugirten zugleich, beide zu beſtimmen. — Halley hat bey ſeiner ſchönen Ausgabe des Apollonius, Oxford 1710, gr. Fol. zwey arabiſche handſchriftliche Ueberſetzungen des ganzen Werks, ohne des achten Buchs, zur Hand gehabt, von welchen die eine Golius vorher beſeſſen hatte; auch einen arabiſch verfaßten Auszug aus der einen derſelben, wovon Rave eine ſchlechte lateiniſche Ueberſetzung geliefert hat, und den von Borelli 1661 herausgegebenen Auszug eines andern arabiſchen Verfaſſers, welchen Abrahamus Ecchel-

lenſis ins Lateiniſche, aber nicht recht gut, übergetragen hat. Die Hülfsſätze des Pappus zu dem Werke des Apollonius, und der Commentar des Eutocius zu den vier erſten Büchern ſind beygefügt. Die gelehrte Hypatia (um das J. 400.) hat auch einen Commentar darüber geſchrieben, der nicht mehr vorhanden iſt.

Die ältern Ausgaben des Werkes vom Apollonius ſind unvollkommen. Doch mag folgende Ausgabe empfohlen werden: Apollonii conicorum Libri IV. methodo nova illuſtrata et ſuccincte demonſtrata per Iſaacum Barrow. Londini 1675. 4., zugleich mit den Schriften des Archimedes und der Sphärik des Theodoſius.

Unter den Neuern hat zuerſt der Jeſuit, Gregorius *a Sancto Vincentio*, die Lehre von den Kegelſchnitten mit neuen Sätzen bereichert. Man findet ſie in einem großen, ziemlich ſeltenen Werke deſſelben, das überhaupt viele neue Bemerkungen zur Geometrie enthält: Opus geometricum quadraturae circuli et ſectionum coni, Antverp. 1647. Fol. — Wallis gab 1655. heraus: Tractatus de ſectionibus conicis nova methodo expoſitis, der in dem erſten Bande ſeiner Werke befindlich iſt. Es iſt darin die Rechnung angewandt: in dem erſten Theile kommen Cubaturen von kegel- und pyramidenförmigen Körpern vor.

In Frankreich lieferte de la Hire ein ausführliches Werk: Sectiones conicae in novem libros diſtributae, Pariſ. 1685. 249 pag. Fol. nach geometriſcher Methode.

Die analytiſche Rechnung gebrauchte der Marquis de l'Hopital in dem Traité analytique des ſections coniques, à Paris 1707, zweyte ungeänderte Ausgabe 1720. 459 pag. 4. Er zeigt zugleich, wie die Kegelſchnitte zur Auflöſung beſtimmter und unbeſtimmter Aufgaben angewandt werden. Die practiſchen Anwendungen der Kegelſchnitte mit der Theorie zugleich enthält der Traité des ſections coniques et autres courbes anciennes par *de la Chapelle*, à Paris 1751. 8. Eine

Überſeßung davon hat Böckmann geliefert, 1771, wiederholt 1791. Eine Umarbeitung derſelben iſt von J. F. Wolf im J. 1801. unternommen. Eine kurze, wie es ſcheint, deutliche Abhandlung, worin nur die gemeine Buchſtabenrechnung angewandt wird, iſt die Introduction aux ſections coniques par *Mauduit*, à Paris 1761. 8. — Ein durch die Methode vorzügliches Werk iſt Traité analytique des courbes et des ſurfaces du ſecond degré. par *Biot*, à Paris 1802. 320 pag. in 8. wovon bald eine neue Ausgabe erfolgt iſt, mit dem Titel: Eſſai de Géométrie analytique appliquée aux courbes et aux ſurfaces du ſecond ordre, 1805. 281 pag. in 8. Kleinerer Druck als in jener. Die Anzahl der Paragraphen iſt beträchtlich größer.

In England hat man ſich viel mit den Kegelſchnitten nach der geometriſchen Methode der Alten beſchäftigt. Zuerſt gab Jakob Milnes, ein Prediger, heraus: Sectionum conicarum elementa, Oxonii, 1702, 96 pag. 8. 19 Kupfert. die ein Auszug aus dem Werke des de la Hire ſind. Dieſe ſind wegen ihrer Ordnung und Deutlichkeit, zugleich als eine Übung in der feinern Geometrie, ſehr zu empfehlen. Es ſind noch zwey etwas vermehrte Ausgaben dieſes Buches von den Jahren 1712 und 1722. Nach dieſen Anfangsgründen ſind mehrere gefolgt, als von Trevigar, 1731; John Müller, 1735; Richard Jack, 1742; Robert Simſon, erſte Ausg. 1735; zweyte vermehrte u. verbeſſerte, 1750; Campbell, 1755; Samuel Vince, 1781; Hutton, 1787; Abraham Robertſon, 1792; Steel; Hamilton, und vermuthlich noch mehrere. Man ſetze dazu noch eine Abhandlung von Jones in den Philoſ. Tranſ. for 1773, worin die Eigenſchaften der Kegelſchnitte nach einer ſehr kurzen Methode entwickelt werden. Die von Simſon, einem der größten Kenner der alten Geometrie, verfaßten Anfangsgründe rühmt Büſch als ſehr vollſtändig und deutlich (Encykl. der mathem. Wiſſenſch. S. 87); Huttons Abhandlung nennt Montücla ein Muſter von Präciſion und Klarheit; die von Hamil-

ton zeichnet Hutton in einer Anzeige von den Schriften dieſer Gattung als eine elegante aus. — In Newtons Principien der Naturwiſſenſchaft, dem erſten Buche, ſind manche ſchöne Sätze über die Conſtruction der Kegelſchnitte, die durch gegebene Puncte gehen, oder gegebene gerade Linien berühren ſollen.

In Deutſchland iſt wenig über die Kegelſchnitte geſchrieben worden, außer dem was in unſern Lehrbüchern vorkommt. Nur als Beweis der Aufmerkſamkeit auf dieſe Lehre mag dienen, daß Bramers Apollonius Cattus oder Geometriſcher Wegweiſer, deſſen erſter Theil eine Abhandlung über die Kegelſchnitte enthält, drey Auflagen gehabt hat, von den J. 1634, 1646, 1684. — Eine kurze, durch manches eigenthümliche in der Methode ſich auszeichnende, ganz geometriſche Abhandlung von Hauſen, in ſeinen Elementis Mátheſeos, P. I. iſt wegen ihrer Reichhaltigkeit und zur Übung in ſchwerern geometriſchen Vergleichungen zu empfehlen. In den Actis Erud. Supplem. T. VIII. p. 435. wird angeführt, daß Hauſen eine Schrift von Guido Grandi über die Kegelſchnitte ins Lateiniſche überſetzt habe, um ſie mit ſeinen lectionibus geometricis nächſtens herauszugeben, doch mit einigen Abänderungen in der Bezeichnung, und Vertauſchung der Methode des Untheilbaren gegen eine beſſere. Hauſen ſelbſt erwähnt dieſen Umſtand nicht. — Nach der analytiſch-trigonometriſchen Methode ſind die Kegelſchnitte am ausführlichſten behandelt in Tempelhoffs Analyſis des Unendlichen, S. 1—115. In der Folge kommen noch einzelne Anwendungen der Differentialrechnung vor. Ferner von Karſten in dem 7ten Theile ſeines Lehrbegriffs der Mathematik, bey der Lehre von den Projectionen, S. 502—640, wozu noch der V. Abſchnitt in dem II. Theile 2ter Abtheil. zu nehmen iſt. Zum Commentar über Käſtners Vortrag der Lehre von den Kegelſchnitten iſt beſtimmt *Rüdigeri* ſpecimen analyticum de lineis ſecundi ordinis, Lipſiae 1784. 4. — Nach einer gemiſchten geometriſch-algebraiſchen Methode zum erſten Unterrichte iſt abgefaßt: De ſectio-

nibus conicis tractatus analyticus, authore *Placido Heinrich*, Ingolſtadii 1797. 343 pag. 8.

Die Methoden in der Lehre von den Kegelſchnitten ſind dreyerley. Die erſte iſt die reine geometriſche der Alten, mit welcher man ſich bekannt machen muß, ſobald man die Anfangsgründe nach Euklides gefaßt hat. Die zweyte iſt die geometriſch-algebraiſche, welche die Relationen der in den drey Curven gezogenen geraden Linien durch Gleichungen ausdruckt, und aus dieſen durch Rechnung, mit Zuziehung geometriſcher Conſtructionen, neue Sätze und die Auflöſungen der Aufgaben herleitet. Die dritte iſt die analytiſch-trigonometriſche, welche Euler überhaupt in die Geometrie mit ſo großem Vortheil eingeführt, und auch bey den Kegelſchnitten auf eine ſehr bequeme und abkürzende Art angewandt hat, in der Introd. in Anal. Infin. T. II. Cap. V. VI. Die trigonometriſchen (oder goniometriſchen) Formeln erſparen durch die Verhältniſſe der Linien, welche ſie in ſich ſchließen, die geometriſchen Conſtructionen, welche man ſonſt für jeden Fall ſuchen müßte. Die ganze Behandlung wird einförmiger, und gewährt dadurch eine faßlichere Überſicht. Euler fängt mit der allgemeinſten Gleichung für alle Kegelſchnitte an, und leitet daraus ſehr kurz ihre gemeinſchaftlichen Eigenſchaften her. Dann entwickelt er aus den beſondern Formen jener Gleichung ihre beſondern Eigenſchaften. Von dieſer Methode wird in dem Artikel, Krumme Linien der erſten Claſſe, ein Abriß gegeben werden. Man kann auch mit den einfachſten Gleichungen für jeden der drey Kegelſchnitte anfangen, und von dieſen zu den mehr zuſammengeſetzten gehen. In den Artikeln, Ellipſe und Hyperbel, ſind nur die einfachſten Gleichungen, in welchen die Abſciſſenlinie ein Durchmeſſer iſt, betrachtet, woraus aber durch Hülfe der goniometriſchen Formeln viele merkwürdige Eigenſchaften entwickelt ſind.

Keplers Aufgabe iſt folgende: Die Fläche eines Halbkreiſes aus einem gegebenen Puncte des Durchmeſſers nach einem gegebenen Verhältniſſe einzutheilen. So trägt

er ſie in den Commentariis de ſtella Martis, p. 300 vor, und ſetzt hinzu, er glaube, ſie könne a priori (das iſt directe) nicht aufgelöſet werden, wegen der Heterogeneität der Winkel und ihrer Sinus. Wer ihn eines andern belehren könnte, würde ihm magnus Apollonius ſeyn. Auch weiß er kein anderes Mittel, als daß man Tafeln für die mittlern Anomalien berechnen ſolle, um daraus wieder die wahren herzuleiten. Er ward auf dieſe Aufgabe durch ſeine Theorie von dem Laufe der Planeten geleitet. Die Flächenräume der elliptiſchen Bahnen um die Sonne in dem einen Brennpuncte ſind den Zeiten proportional, in welchen die zugehörigen Bogen beſchrieben, oder die Radien nach der Sonne darüber hingeführt werden. Soll nun aus der von dem Durchgange durch das Aphelium oder durch das Perihelium verfloſſenen Zeit der Ort des Planeten beſtimmt werden, ſo muß die elliptiſche Fläche nach dem Verhältniß der gegebenen Zeit zu der Umlaufszeit eingetheilt werden. Kann man die Aufgabe für den Kreis anflöſen, ſo iſt ſie auch für eine Ellipſe auflösbar.

1. Es iſt AMB (Fig. 8.) ein Halbkreis, deſſen Durchmeſſer AB, Mittelpunct C iſt. Ein gegebener Punct des Durchmeſſers iſt D. Aus dieſem ſoll die gerade DM an den Umfang M ſo gezogen werden, daß die Area ADM zu der Fläche des Halbkreiſes irgend ein gegebenes Verhältniß habe.

Man ziehe CM, und fälle von D auf die verlängerte MC die ſenkrechte DE, ſo iſt der Inhalt des Dreyecks $= \frac{1}{2}$ CM $\times$ DE, und des Sectors ACM $= \frac{1}{2}$ AC $\times$ AM, da die der halben Kreisfläche $= \frac{1}{2}$ AC $\times$ AMB iſt. Das gegebene Verhältniß der letztern zu der Area ADM ſey $= m:n$, ſo iſt

$$AC \times AM + CM \times DE : AC \times AMB = m:n,$$

das iſt

$$AM + DE : AMB = m:n.$$

Man ſetze AC $= 1$; DC $= e$, W ACM $= \psi$, ſo iſt $\psi + e \sin \psi : \pi = m:n$. Da ψ jeden Werth haben

kann, ſo iſt das Verhältniß m : n mit dem Winkel ψ veränderlich. Darum ſetze man ſtatt jener Bezeichnung dieſe, $\omega : \pi$, ſo daß nun die Gleichung ſey

$$\omega = \psi + e \sin \psi.$$

2. Iſt hier ψ gegeben, ſo findet man ω ſogleich, es ſey in Theilen des Halbmeſſers, als der Einheit, wenn nämlich ψ in ſolchen Theilen ausgedruckt iſt, oder in Gradtheilen, wenn $e \sin \psi$ in ſolche verwandelt worden iſt. Die Verwandlung lehrt der Artikel, Cyklometrie, Th. I. S. 643. Der Bogen, welcher dem Halbmeſſer gleich iſt, hält 57°,2957795 ... oder 206264″,8 .. wovon der Logarithme iſt 5,3144251.

3. Iſt aber ω gegeben, ſo läßt ſich ψ, wie Kepler ganz recht geſchloſſen hatte, nicht algebraiſch finden, ſondern nur durch eine ins Unendliche fortlaufende Reihe, oder durch fortgeſetzte Verbeſſerung der beynahe richtigen Werthe, wie bey der Auflöſung numeriſcher Gleichungen in dem Artikel, Gleichung, 234 ff. geſchehen iſt.

4. Dieſe letztere Art wollen wir zuerſt vornehmen. Newton hat ſie zur Auflöſung unſerer Gleichung gebraucht. Principia Philoſ. nat. L. I. Schol. Prop. 31. Man habe zuerſt, wenn ω in Gradtheilen gegeben iſt, dieſen Winkel in Theilen des Halbmeſſers = 1 ausgedruckt. Nun ſetze man $\psi = \omega - u$, ſo iſt zufolge der Gleichung in (1)

$$\omega = \omega - u + e \sin(\omega - u),$$

das iſt

$$u = e \sin \omega . \cos u - e \cos \omega . \sin u.$$

Da u als klein vorausgeſetzt wird, ſo iſt nahe $\cos u = 1$ und $\sin u = u$, ſo daß beynahe iſt

$$u = \frac{e \sin \omega}{1 + e \cos \omega}.$$

Man ſetze $\dfrac{e \sin \omega}{1 + e \cos \omega} = \alpha$, und $\psi = \omega - \alpha + u'$, ſo iſt

$$\omega = \omega - \alpha + u' + e \sin(\omega - \alpha + u'),$$

und auf gleiche Art wie vorher

$$u' = \frac{\alpha - e \sin(\omega - \alpha)}{1 + e \cos(\omega - \alpha)} \text{ beynahe.}$$

Weiter ſey dieſer genäherte Werth $= \beta$, und $\psi = \omega - \alpha + \beta + u''$, ſo iſt

$$\omega = \omega - \alpha + \beta + u'' + e \sin(\omega - \alpha + \beta + u''),$$

und daraus

$$u'' = \frac{\alpha - \beta - e \sin(\omega - \alpha + \beta)}{1 + e \cos(\omega - \alpha + \beta)} \text{ beynahe.}$$

Dieſer genäherte Werth ſey $= \gamma$, und $\psi = \omega - \alpha + \beta + \gamma + u'''$, ſo iſt

$$u''' = \frac{\alpha - \beta - \gamma - e \sin(\omega - \alpha + \beta + \gamma)}{1 + e \cos(\omega - \alpha + \beta + \gamma)} \text{ beynahe.}$$

Solchergeſtalt läßt ſich eine Ergänzung nach der andern finden, bis zu einem beliebigen Grade der Genauigkeit.

5. Als Beyſpiel eines ſchweren Falles diene die Bahn des Merkurs, deren große Axe der Durchmeſſer AB des Halbkreiſes AMB, und deren Excentricität CD iſt. Die mittlere Anomalie ſey $= 60°$ von dem Aphelium an gerechnet. Alſo muß die Area ADM ſich zu der Area des Halbkreiſes verhalten wie 60 : 180. Es iſt AC $= 38710$, und CD $= 7955$, wenn die halbe Axe der Erdbahn $= 100000$ iſt. Daher iſt $e = \frac{7955}{38710}$. Die Rechnung iſt folgende, worin zur Abkürzung $\omega - \alpha = A$; $\omega - \alpha + \beta = B$; $\omega - \alpha + \beta + \gamma = C$ geſetzt iſt.

l 7955 = 3,9006402	
l 38710 = 4,5878232	e = 0,2055025
l e = 9,3128170	ω = 60°
l ſin ω = 9,9375306	= 1,0471975
l coſ ω = 9,6989700	
l e ſin ω = 9,2503476	e coſ ω = 0,1027512
l e coſ ω = 9,0117870	1 + e coſ ω = 1,1027512
l 1,102 .. = 0,0424778	α = 0,1613875
l α = 9,2078698	α = 9° 14′ 48″
l ſin A = 9,8889818	A = 50° 45′ 12″
l coſ A = 9,8011705	e ſin A = 0,1591473
l e ſin A = 9,2017988	α — e ſin A = 0,0022402
l e coſ A = 9,1139875	e coſ A = 0,1300132
l 0,002 .. = 7,3502868	1 + e coſ A = 1,1300132
l 1,13 .. = 0,0530834	β = 0,0019824
l β = 7,2972034	β = 0° 6′ 49″
	B = 50° 52′ 1″
l ſin B = 9,8896839	α — β = 0,1594051
l coſ B = 9,8001143	e ſin B = 0,1594046
l e ſin B = 9,2025009	e coſ B = 0,1296974
l e coſ B = 9,1129313	α — β — e ſin B
	= 0,0000005
	1 + e coſ B = 1,1296974
	γ = 0,0000002

Die Ergänzung beträgt nur $\frac{1}{10}$ Secunde. Es genügt alſo ſelbſt bey der ſo beträchtlichen Excentricität der Bahn des Merkurs, und bey einer großen mittlern Anomalie die zweyte Ergänzung.

6. Die Rechnung wird ſehr erleichtert, wenn in den Nennern der Brüche der zweyte Theil weggelaſſen wird, da der größte Werth deſſelben nur der Excentricität

gleich kommt, doch wird man nun eine oder zwey Ergänzungen mehr zu berechnen haben. Setzt man

$$e \sin \omega = \alpha,$$
$$\alpha - e \sin(\omega - \alpha) = \beta,$$
$$\alpha - \beta - e \sin(\omega - \alpha + \beta) = \gamma,$$
$$\alpha - \beta - \gamma - e \sin(\omega - \alpha + \beta + \gamma) = \delta,$$

u. ſ. f., ſo ſind die ſucceſſiven ſich annähernden Werthe von ψ dieſe:

$$\omega - \alpha,$$
$$\omega - \alpha + \beta,$$
$$\omega - \alpha + \beta + \gamma,$$
$$\omega - \alpha + \beta + \gamma + \delta,$$

u. ſ. f.

7. Dieſe Aufloſung der Gleichung $\omega = \psi + e \sin \psi$ ſchlägt Euler vor in dem 12ten Bande der ältern Petersburger Commentarien, S. 119. Fuß in Petersburg hat wieder an ſie erinnert in den Novis Actis Ac. Petrop. T. III. p. 302. auch daſelbſt ein Beyſpiel an der Bahn des Merkurs gegeben, wo $\omega = 86° 26' 11''$ iſt. Es ſind bey demſelben vier einzelne Rechnungen zu machen. Sie geben nach der Reihe folgende Werthe für ψ.

I. 74° 26′ 4″. II. 74° 50′ 26″

III. 74° 49′ 7″. IV. 74° 49′ 11″.

Der letztere genügt genau der Gleichung $\psi = \omega - e \sin \psi$. Die Excentricität iſt dabey $= 0{,}20563$ geſetzt. Von den Logarithmen ſind nur 5 Ziffern in der Mantiſſa genommen, eine Abkürzung, die man oft machen darf. Das Verfahren iſt in der That das abgekürzte Newtoniſche Euler giebt es nicht als neu an.

Die hier geführte Rechnung iſt zugleich ein gutes Beyſpiel einer Annäherungsmethode.

Verwandlung des Unterſchiedes $\omega - \psi$ in eine Reihe.

8. Es ſey, wie vorher, $e \sin \psi = u$, ſo daß $\psi = \omega - u$. Alſo iſt $\sin \psi = \sin(\omega - u) =$

C

$\sin\omega.\cos u - \cos\omega.\sin u$. Verwandelt man $\sin u$ und $\cos u$ in eine Reihe nach Cyklometrie, 5 u. 6, ſo iſt

$$e\sin\psi = e\sin\omega\left(1 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 - \frac{1}{720}u^6 + \text{etc.}\right)$$
$$- e\cos\omega\left(u - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{120}u^5 - \frac{1}{5040}u^7 + \text{etc.}\right)$$

Zur Abkürzung ſetze man $e\sin\omega = p$, und $e\cos\omega = q$, ſo iſt, da $e\sin\psi = u$ iſt, die nach den Potenzen von u geordnete Reihe (M):

$$0 = p - (1+q)u - \frac{1}{2}pu^2 + \frac{1}{6}qu^3 + \frac{1}{24}pu^4 - \frac{1}{120}qu^5 - \frac{1}{720}pu^6 + \frac{1}{5040}qu^7 + \text{etc.}$$

9. Dieſe Gleichung iſt eigentlich eine unbeſtimmte zwiſchen den veränderlichen u und den beiden von einander abhängigen p und q. Wollte man aus dieſer u durch p oder q, mittelſt einer nach ihren Potenzen geordneten Reihe, ausdrucken, nach dem in dem Artikel, Function, 41 ff. gelehrten Verfahren, ſo müßte die eine jener Größen durch die andere vorher entwickelt ſeyn. Man kann aber auch die Gleichung (M) als eine beſtimmte betrachten, worin p und q gegebene Größen ſind. Nun nehme man nach dem in dem Artikel, combinatoriſche Analyſis, 9 vorläufig angezeigten Verfahren, für u eine nach Potenzen von p geordnete Reihe, ſetze dieſe in der Reihe (M) für die Potenzen von u, und laſſe die Coefficienten jeder Potenz von p Null ſeyn, ſo ergeben ſich die Gleichungen für die Coefficienten in der für u angenommenen Reihe. Es zeigt ſich gleich, daß die Reihe für u dieſe Geſtalt haben müſſe:

$$u = Ap + Bp^3 + Cp^5 + Dp^7 + \text{etc.}$$

Dieſes rührt daher, daß in der Gleichung (M) ein Glied um das andere den Factor p enthält, ſo daß die Potenzen

reihen jede mit einer ungeraden Potenz von u anfangen. Die Rechnung iſt zu lang, um hier eingerückt zu werden. Auch erfordert ſie bloße mechaniſche Entwicklung und Zuſammenſtellung. Es iſt, wenn noch zur Abkürzung geſetzt wird $1+q=n$,

$$A=\frac{1}{n};\quad B=-\frac{1}{2n^5}+\frac{q}{6n^4};$$

$$C=+\frac{13}{24n^5}-\frac{51q}{120n^6}+\frac{q^2}{12n^7}.$$

Die folgenden Coefficienten ſind zu ſehr zuſammen geſetzt, als daß ſie brauchbar wären. Da p^7 eine hohe Potenz von e ſin ω iſt, ſo iſt es ſehr klein. Mit Weglaſſung der Theile, die q enthalten, iſt $D=-\frac{19}{72n^7}$.

10. Keil lehrt dieſes Verfahren, aber in einer ganz andern Form, in der Introductio ad veram Aſtronomiam, Lectio XXIV. Er wirft am Ende in dem Coefficienten C etwas weg, ohne daß man ſieht, warum. Die Reverſionsmethode, der er ſich nach Newton bedient, mußte auch weiter verfolgt werden, um den Coefficienten ſo vollſtändig als er hier angegeben iſt, zu finden. Dieſe Methode beſteht darin, daß der Werth von u ſtückweiſe gefunden, und folgeweiſe für u in die Gleichung geſetzt wird.

11. Eine Formel für den Unterſchied der mittlern Anomalie und der Anomalia excentri, die nach den Sinus der Vielfachen von ω geordnet iſt, habe ich in dem aſtronomiſchen Jahrbuche für 1791, S. 191. mitgetheilt. Sie wird folgendergeſtalt gefunden.

I. In der vorher für e ſin ψ oder u gefundenen Doppelreihe ſetze man

$$u=Ae-Be^2+Ce^3-De^4+Ee^5+\text{etc.}$$

und laſſe diejenigen Coefficienten, die in dieſer Reihe, und ihrem durch die Subſtitution gefundenen Werthe zu einerley Potenz von e gehören, gleich ſeyn, ſo erhält man fol-

gende Gleichungen für die unbekannten A, B, C, etc.

$$A = \sin\omega.$$

$$B = A\cos\omega.$$

$$C = B\cos\omega - \frac{1}{2}A^2\sin\omega.$$

$$D = (C - \frac{1}{6}A^3)\cos\omega - AB\sin\omega.$$

$$E = (D - \frac{1}{2}A^2B)\cos\omega$$

$$- (\frac{1}{2}B^2 + AC - \frac{1}{24}A^4)\sin\omega.$$

$$F = (E - \frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{2}A^2C + \frac{1}{120}A^5)\cos\omega$$

$$- (AD + BC - \frac{1}{6}A^3B)\sin\omega.$$

u. ſ. f.

II. Man bemerkt hier leicht, daß die Summe der Stellenzahlen der Factoren in den Gliedern jedes Coefficienten der Stellenzahl deſſelben weniger Eins gleich iſt; auch daß die Producte nach allen Zuſammenſetzungen der Factoren aus den Stellenzahlen gemacht ſind. In dem erſten Theile mit dem Factor $\cos\omega$ iſt die Anzahl der Factoren ungerade, in dem zweyten Theile mit dem Factor $\sin\omega$, gerade. Wo eine Potenz in einem Gliede vorkommt, wird das Product der Zahlen, 1, 2, 3, etc. bis zu dem Exponenten der Potenz als Diviſor genommen. Wie die Vorzeichen wechſeln, ſieht man aus den hier angegebenen Coefficienten, allgemeiner aus dem entwickelten Werthe von u.

III. Nun drucke man die Coefficienten erſtlich jeden durch Potenzen von $\sin\omega$ aus, wozu in den Coefficienten der geraden Stellen noch $\cos\omega$ als Factor kommt. Die Potenzen von $\sin\omega$, die alle ungerade ſind, verwandle man in Sinus der Vielfachen von ω, nach Goniome-

trie, 137; und die Producte aus dem Sinus eines Vielfachen in $\cos\omega$ löſe man nach 27. daſ. in zwey Sinus auf. So erhält man durch eine für die vom Anfang entfernten Coefficienten etwas lange Rechnung folgende Formeln:

$$A = \sin\omega.$$

$$B = \frac{1}{2}\sin 2\omega.$$

$$C = \frac{3}{8}\sin 3\omega - \frac{1}{8}\sin\omega.$$

$$D = \frac{1}{3}\sin 4\omega - \frac{1}{6}\sin 2\omega.$$

$$E = \frac{125}{384}\sin 5\omega - \frac{27}{128}\sin 3\omega + \frac{1}{192}\sin\omega.$$

$$F = \frac{27}{80}\sin 6\omega - \frac{4}{15}\sin 4\omega + \frac{1}{48}\sin 2\omega.$$

u. ſ. f.

IV. Ordnet man nun die Reihe für u nach den Vielfachen des Winkels ω, ſo iſt die Anomalie des excentriſchen Kreiſes:

$$\begin{aligned}\psi = \omega &- \left(e - \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{192}e^5\right)\sin\omega \\ &+ \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4 + \frac{1}{48}e^6\right)\sin 2\omega \\ &- \left(\frac{3}{8}e^3 - \frac{27}{128}e^5\right)\sin 3\omega \\ &+ \left(\frac{1}{3}e^4 - \frac{4}{15}e^6\right)\sin 4\omega \\ &- \frac{125}{384}e^5\sin 5\omega \\ &+ \frac{27}{80}e^6\sin 6\omega - \text{etc.}\end{aligned}$$

In dem aſtron. Jahrb. S. 193 iſt durch einen Schreibfehler in dem letzten Gliede $\frac{27}{128}$ ſtatt $\frac{27}{80}$ geſetzt.

12. Eben dieſe Formel für u oder $\omega - \psi$, aber nach den Potenzen von e geordnet, iſt in dem Artikel, la Grange's Lehrſatz, 15, als Beyſpiel, durch Hülfe dieſes Lehrſatzes gefunden worden. (Es muß daſelbſt vor dem Gliede mit der Potenz e^4 ſtatt + geſetzt werden —).

13. Die Formel iſt wegen ihrer Leichtigkeit in der Anwendung brauchbar, da man nur ein für allemahl die Coefficienten von den Sinus der Vielfachen des Winkels ω berechnet zu haben braucht. Für die Bahn des Merkurs iſt vorher gefunden $\log e = 9,3128170$; daher iſt

$e = 0,2055025$;	$e^2 = 0,0422312$
$e^3 = 0,0086786$;	$e^4 = 0,0017835$
$e^5 = 0,0003665$;	$e^6 = 0,0000753$

und ſo iſt, wenn die höhern Potenzen von e über die ſechſte hinaus weggelaſſen werden,

$$\begin{aligned}\psi = \omega & - 0,204420 . \sin \omega \\ & + 0,020820 . \sin 2\omega \\ & - 0,003177 . \sin 3\omega \\ & + 0,000574 . \sin 4\omega \\ & - 0,000119 . \sin 5\omega \\ & + 0,000025 . \sin 6\omega \\ & - \text{etc.}\end{aligned}$$

Eine oder zwey Ziffern dieſer Coefficienten, die letzten, könnten unrichtig ſeyn, da noch $e^7 = 0,0000155$ und $e^8 = 0,0000032$ iſt, wobey es aber zugleich auf ihre Diviſoren ankommt.

14. Wenn man, wie es in der rechnenden Aſtronomie nöthig iſt, die Coefficienten durch Bogenſecunden ausdrucken will, ſo müſſen ſie durch die Anzahl der Secunden in dem Bogen, der dem Halbmeſſer (= 1) gleich iſt,

multiplicirt werden. Dieſe Zahl iſt 206264,8 wovon der Logarithme iſt 5,3144251 (Cyklometrie, Th. I. S. 643.).

Dadurch wird

$$v = w - 42164'',6 \sin w$$
$$+ 4294'',4 \sin 2w$$
$$- 655'',3 \sin 3w$$
$$+ 118'',5 \sin 4w$$
$$- 24'',6 \sin 5w$$
$$+ 5'',2 \sin 6w$$
$$- \text{etc.}$$

Man muß hiebey wohl bemerken, daß die Sinus der Winkel, welche die Form $(2n+1)\pi + \varphi$ haben, negativ ſind. (Goniometrie, 16.).

Anzeige einiger andern Methoden, dieſe Aufgabe aufzulöſen.

15. **Wallis** gebrauchte die gedehnte Cykloide (Th. I. S. 610.), um durch ihre Coordinaten den Punct des Kreiſes zu beſtimmen, durch welchen die Theilungslinie geht. Dieſer Kreis iſt der erzeugende Kreis der Cykloide; die Baſis derſelben iſt der Umfang eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer die dritte Proportionale zu der Excentricität und dem Halbmeſſer jenes Kreiſes iſt. Tractatus de Cycloide, Opp. T. I. p. 540. **Hermann** gebrauchte in den Commentt. Acad. Petrop. T. I. a. a. 1726. p. 144. auf gleiche Art die Quadratrix des **Tſchirnhauſen** eine Curve, die ſich ziemlich leicht durch eine Anzahl einzelner Puncte zeichnen läßt. Allein dieſes ſind geometriſche Künſteleyen, die der Aſtronom gar nicht gebrauchen kann. Die gedehnte Cykloide hat ſchon, wie **Hermann** anzeigt, **Wren** in England vor **Wallis** angewandt, welches dieſer aber nicht bemerkt.

16. **Hermann** giebt a. a. O. noch ein Verfahren an, welches zur aſtronomiſchen Rechnung bequemer iſt, als jenes. Es iſt ANB (Fig. 9.) ein Halbkreis,

der von dem Puncte D des Durchmeſſers AB aus durch die gerade DM nach einem gegebenen Verhältniſſe getheilt werden ſoll. Man nehme den Bogen AN zu dem Halbkreiſe ANB in dem gegebenen Verhältniſſe des Sectors ADM zur Fläche des Halbkreiſes, ziehe DN, und mit dieſer parallel die CP aus dem Mittelpuncte C, dann noch CN und DP. Der Unterſchied der beiden excentriſchen Sectoren ADM, ADP iſt das Kreisſegment NMP, ſo daß man in vielen Fällen den Sector ADP ſtatt des wahren ADM ſetzen kann. Denn es iſt erſtlich Sect. ACN = Sect. ADM, weil beide zu dem Halbkreiſe daſſelbe Verhältniß haben. Ferner beſteht der Sector ACN aus drey Theilen, dem Sector ACP, dem Dreyeck PCN und dem Kreisabſchnitte NMP. Der excentriſche Sector ADM beſteht auch aus drey Theilen, dem Sector ACP, dem Dreyeck PCD, und dem excentriſchen Sector PDM. Die Dreyecke PCN und PCD ſind ſich gleich, weil ſie über derſelben Grundlinie PC zwiſchen denſelben Parallelen liegen; alſo iſt der Abſchnitt NMP dem Ausſchnitt PDM gleich. Aus dieſer Gleichheit muß der Winkel PDM hergeleitet werden, welches aber nur näherungsweiſe geſchehen kann. Dazu iſt es nöthig, den Winkel NCP und die gerade PD zu kennen.

In dem Dreyeck NCD werden durch die Seiten CN, CD nebſt dem W. NCD, dem Nebenwinkel von dem gegebenen ACN (der mittlern Anomalie), die Winkel CDN und CND bekannt. Der W. CND iſt gleich dem NCP. Der W, CDN iſt gleich dem ACP. In dem Dreyeck PCD wird aus den Seiten CP, CD, und dem W. PCD, dem Nebenwinkel von ACP, die Seite PD nebſt den beiden Winkeln CDP, CPD gefunden.

Der Kreisabſchnitt NMP iſt $= \frac{1}{2}\, CN^2 (\text{Ang. } NCP - \sin NCP)$, wo Ang. NCP der zugehörige Bogen mit dem Halbmeſſer als Einheit beſchrieben iſt, und ſin NCP der Sinus für eben dieſen Halbmeſſer iſt. So fern DP und DM wenig verſchieden ſind, iſt nahe Sect. $PDM = \frac{1}{2} PD^2 \times \text{Ang } PDM$.

Folglich iſt nahe

$$CN^2 (\text{Ang. } NCP - \sin NCP) = PD^2 \times \text{Ang } PDM,$$

und daraus nahe

$$\text{Ang. } PDM = \frac{CN^2 (\text{Ang. } NCP - \sin NCP)}{PD^2}.$$

Dieſer Winkel zu dem vorher ſchon gefundenen ADP addirt giebt die verlangte Theilungslinie DM. Der W, PDM wird hier in Theilen des Halbmeſſers als Einheit gefunden. Wenn NCP unter 2° iſt, ſo iſt der W. PDM kleiner als 1,5 Secunde. Denn der Unterſchied zwiſchen einem Bogen 2° und ſeinem Sinus beträgt 0,0000071 für den Halbmeſſer als Einheit, d. i. 1″. 5.

17. Dieſe Methode, welche hier deutlicher und vollſtändiger als von Hermann vorgetragen iſt, kommt faſt mit der von Caſſini in den Mém. de l'Acad. des Sc. 1719., und in den Elémens d'Aſtronomie, p. 141 vorgetragenen überein. Nur wird nach der leztern der Quotient $\frac{CN}{PD}$ ſtatt $\frac{CN^2}{PD^2}$ geſezt. Die Caſſiniſche Auflöſung hat auch la Lande in ſeiner Aſtronomie §. 1247. aufgenommen.

18. David Gregory in ſeinen Elementis Aſtronomiae, pag. 316, ſucht die Sagitta oder den Sinus verſus des Bogens AM durch eine Reihe, die aber oft langſam oder gar nicht convergiren mag.

19. Thomas Simpſon in ſeinen Eſſays on ſeveral ſubjects in Mathematicks, Lond. 1740. trägt eine Annäherungsmethode vor, die mit der Newtoniſchen übereinkommt, und hier durch eine geometriſche Conſtruction verſinnlicht wird. Die Fehler der vorläufig angenommenen Anomalie, und ihres Sinus und Coſinus werden gezeichnet.

20. Jeaurat gebrauchte die cyklometriſchen Formeln zur Auflöſung der Gleichung, $\omega = \psi + e \sin \psi$, indem er die Winkel ω und ψ durch Potenzen ihrer Sinus ausdruckt, und daraus ſowohl $\sin \psi$ als $\cos \psi$ durch eine Reihe nach Potenzen von $\sin \omega$ darſtellt. Hieraus wer-

den die Coordinaten an der Ellipſe hergeleitet, von welchen die auf der Axe zum Anfang den einen Brennpunct hat. Durch dieſe gelangt er zu einem Ausdruck für die Tangente der wahren Anomalie, und von dieſem zu einer Reihe für die Anomalie ſelbſt. Die Reihe erſtreckt ſich bis zu der ſechſten Potenz von e. Auch findet er eine Reihe für den Abſtand eines Punctes der Ellipſe von dem gegebenen Brennpuncte durch Coſinus der Vielfachen von ω, welche bis zur ſiebenten Potenz von e geht. Doch iſt dieſes Verfahren mühſam. S. Mémoires présentés à l'Acad. des Sc. T. IV. 1763. p. 524 u. 601.

21. Früher hatte ſchon Clairaut in der Théorie de la Lune auch eine Formel für die wahre Anomalie durch die mittlere gegeben, ohne ihre Herleitung. Dieſe hat la Lande mitgetheilt in der erſten Ausgabe ſeiner Aſtronomie, §. 2686—2690. Sie iſt rein analytiſch, ohne Zuziehung eines excentriſchen Kreiſes, indem die mittlere Anomalie durch die wahre mittelſt der Integration gefunden wird, und daraus durch Umkehrung der Reihe die wahre Anomalie durch die mittlere. Da auch dieſe Methode zu mühſam iſt, ſo hat la Lande in der dritten Ausgabe ſeiner Aſtronomie, §. 3483. ſtatt derſelben die von Cagnoli in ſeiner Trigonometrie angewandte aufgenommen.

22. Von la Grange iſt eine ſehr wichtige Abhandlung über die Kepleriſche Aufgabe in den Mém. de l'Acad. de Berl. a. 1769. Er gebraucht ſie zum Beyſpiele der Anwendung ſeiner wichtigen Verwandlungsformel.

23. Boſſüt hat in den Mém. de l'Acad. de Sc. a. 1777., und daraus in ſeinen Traités du calc. diff. et integral. T. I. §. 529 eine Methode angegeben, aus der Differentialformel für die mittlere Anomalie durch die wahre dieſe durch jene herzuleiten, wobey er ſich einer Reihe mit unbeſtimmten Coefficienten bedient, und die ungeraden ſucceſſiven Differentialquotienten anwendet.

24. In der Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planétes, par de la *Place*,

art. XI. iſt noch eine feine Herleitung der wahren Anomalie aus der Gleichung $\omega = \psi + e \sin \psi$ anzutreffen.

25. Aus dieſer Gleichung hat auch Dü Sejour nach einem andern, aber nicht ſo bequemen Verfahren, eine Formel für die wahre Anomalie durch die mittlere hergeleitet, in dem Traité des mouvemens apparens des corps céleſtes, T. II. §. 431.

Eine neue Auflöſung der Aufgabe über die Relation zwiſchen wahrer und mittlerer Anomalie, die zugleich bequem und ſehr ſcharf iſt, hat derſelbe in den Mém. de l'Acad. des Sc. 1790. geliefert.

26. Wie aus der Theilung der Kreisfläche die Theilung einer Ellipſe, deren große Axe dem Durchmeſſer des Kreiſes gleich iſt, hergeleitet wird, welches die Veranlaſſung zu der Aufgabe von der Theilung jener war, das iſt in dem Artikel, la Grange's Lehrſatz, 20—23, gezeigt. Eben daſelbſt, 19, iſt eine Reihe für die wahre Anomalie in der Ellipſe, oder den Winkel der Theilungslinie aus dem einen Brennpuncte mit der großen Axe von dem entfernteſten Scheitelpuncte an, gefunden worden.

Kettenbruch, oder zuſammenhängender, fortlaufender, continuirlicher Bruch (fractio continua), iſt eine eigene Form eines Bruchs, worin der Nenner aus einer ganzen Zahl nebſt einem Bruche beſteht, der Nenner dieſes Bruchs wiederum nebſt der ganzen Zahl einen Bruch enthält, deſſen Nenner wieder auf dieſelbe Art zuſammengeſetzt iſt, es mag nun dieſe Verkettung ohne Ende fortgehen, oder irgendwo abbrechen. Die Zähler dieſer verketteten Brüche ſind ganze Zahlen, häufig die Einheit, z. B.

$$\cfrac{2}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{6}{7 + \cfrac{8}{9 + \text{etc.}}}}} \qquad \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{7}}}}$$

Die Querſtriche der Brüche pflegen auch über den nächſten Bruch mit gezogen zu werden. Um das Vorzeichen + vor den Querſtrich, wie in andern Fällen, zu bringen, ſind

hier die Querſtriche nur über den erſten Theil der Nenner gezogen, wie es auch nicht ungewöhnlich iſt.

Die Kettenbrüche dienen, theils numeriſche Brüche, rationale und irrationale, auf eine möglichſt genaue Art abzukürzen, theils auch allgemeine analytiſche Ausdrücke zur genauern Berechnung geſchickt zu machen. Bey der letztern Anwendung werden die Zähler und Nenner der partiellen Brüche oft ſelbſt gebrochne Ausdrücke.

1. Ein gewöhnlicher Bruch wird in einen Kettenbruch verwandelt durch die Anwendung derſelben Rechnung, wodurch der größte gemeinſchaftliche Theiler zweyer Zahlen gefunden wird. Die Quotienten, welche zu dieſem letztern Zwecke nicht gebraucht werden, ſind hier die ganzen Theile des Nenners, und die Zähler ſind durchgehends $= 1$. Es ſey z. B. der Bruch $\frac{405}{889}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln. Man dividire Zähler und Nenner durch den Zähler, ſo iſt der Bruch $= \frac{1}{2 + \frac{79}{405}}$. Mit dem Bruche, $\frac{79}{405}$, verfährt man auf dieſelbe Art; er iſt $\frac{1}{5 + \frac{10}{79}}$. Der Bruch $\frac{10}{79}$ iſt $\frac{1}{7 + \frac{9}{10}}$; der Bruch $\frac{9}{10}$ iſt $= \frac{1}{1 + \frac{1}{9}}$. Alle die Brüche an einander gehängt, geben den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{9}}}}}.$$

2. Ein Kettenbruch oder ein Stück deſſelben bis zu einem der ergänzenden Brüche wird in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, wenn man den letzten gemiſchten

Nenner auf die gemeine Bruchform bringt, darauf den neuen gemiſchten Nenner eben ſo behandelt, und ſo fortfährt bis zu dem erſten oder oberſten partiellen Bruche. Aus dem vorher angegebenen Kettenbruche entſtehen ſolchergeſtalt die Brüche,

$$\frac{1}{2},\ \frac{5}{11},\ \frac{36}{79},\ \frac{41}{90},\ \frac{405}{889},$$

von welchen der erſte und dritte zu groß, der zweyte und vierte zu klein ſind, der letzte den vollſtändigen Werth angiebt. Dieſes gründet ſich darauf, daß ein Bruch durch Vergrößerung des Nenners kleiner, und durch Verminderung deſſelben größer wird. Daher iſt in dem Beyſpiele, und ſo auch in jedem andern Falle der erſte Werth des Kettenbruchs $\frac{1}{2}$ zu groß, weil der Nenner zu klein iſt. Hingegen iſt der zweyte Werth $\frac{5}{11}$, zu klein, weil $\frac{1}{5}$ und alſo auch $2\frac{1}{5}$ zu groß iſt. Setzt man zu 5 noch den Bruch $\frac{1}{7}$ hinzu, ſo wird $5+\frac{1}{7}$ zu groß, der Bruch $\frac{1}{5+\frac{1}{7}}$ zu klein, und der Bruch $\frac{36}{79}$ zu groß. Jeder der folgenden Brüche kommt dem vollſtändigen Bruche näher als der vorhergehende.

3. Es ſey für lauter ganze poſitive Zahlen,

$$\frac{a}{b}=m+\frac{c}{b};\qquad \frac{b}{c}=n+\frac{d}{c};$$

$$\frac{c}{d}=p+\frac{e}{d};\qquad \frac{d}{e}=q+\frac{f}{e};$$

$$\frac{e}{f}=r+\frac{g}{f};\qquad \frac{f}{g}=s+\frac{h}{g};$$

etc. etc.

ſo entſteht hieraus der Werth von $\frac{b}{a}$ in der Form des Kettenbruchs,

$$\frac{b}{a} = \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}}}}$$

Es ſind hier m, n, p, q, r, s, etc. ſucceſſiv die Quotienten der Dividenden a, b, c, d, e, f, etc. durch die Diviſoren b, c, d, e, f, g. etc. und die zugehörigen Reſte c, d, e, f, g, h, etc.

Der uneigentliche Bruch $\frac{a}{b}$ iſt

$$m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \text{etc.}}}}$$

4. In dem Artikel, Aufheben der Brüche, (Th. I. S. 230.) iſt durch eine leichte Rechnung gefunden:

I. $mb = a - c$.

II. $(mn + 1)b = na + d$.

III. $(mnp + p + m)b = (np + 1)a - e$.

IV. $(mnpq + pq + mq + mn + 1)b =$
$= (npq + q + n)a + f$.

u. ſ. f.

wo das Geſetz der Formation der Factoren zu b und a ſehr deutlich erhellt.

5. Man bezeichne jene durch A, B, C, etc. dieſe durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. ſo daß

I. $Ab = \mathfrak{A}a - c$; II. $Bb = \mathfrak{B}a + d$;
III. $Cb = \mathfrak{C}a - e$; IV. $Db = \mathfrak{D}a + f$;
V. $Eb = \mathfrak{E}a - g$; VI. $Fb = \mathfrak{F}a + h$;
etc.

Digitized by Google

Hier iſt

$A = m.$	$\mathfrak{A} = 1.$
$B = nA + 1.$	$\mathfrak{B} = n\mathfrak{A}.$
$C = pB + A.$	$\mathfrak{C} = p\mathfrak{B} + \mathfrak{A}.$
$D = qC + B.$	$\mathfrak{D} = q\mathfrak{C} + \mathfrak{B}.$
$E = rD + C.$	$\mathfrak{E} = r\mathfrak{D} + \mathfrak{C}.$
$F = sE + D.$	$\mathfrak{F} = s\mathfrak{E} + \mathfrak{D}.$
etc.	etc.

Für die vier erſten Coefficienten zeigt es die geführte Rechnung. Es iſt alſo

$$Db = \mathfrak{D}a + f.$$

Nun iſt $fr = e - g$, alſo iſt $rDb = r\mathfrak{D}a + e - g$. Da $Cb = \mathfrak{C}a - e$ iſt, oder $e = \mathfrak{C}a - Cb$, ſo iſt

$$rDb + Cb = r\mathfrak{D}a + \mathfrak{C}a - g.$$

Die Vergleichung mit der Formel, V. giebt

$$E = rD + C; \quad \text{und} \quad \mathfrak{E} = r\mathfrak{D} + \mathfrak{C}.$$

Dieſelbe Form haben nun auch F und $\mathfrak{F}$, da $gs = f - h$ dieſelbe Form wie fr hat. So nun ferner für alle folgende.

6. Der Unterſchied je zweyer nächſten der genäherten Werthe von $\frac{b}{a}$ hat zum Zähler die Einheit, zum Nenner das Product der beiden Nenner dieſer Werthe, nämlich $\frac{\mathfrak{A}}{A} - \frac{\mathfrak{B}}{B} = \frac{1}{AB}$; $\frac{\mathfrak{B}}{B} - \frac{\mathfrak{C}}{C} = -\frac{1}{BC}$; $\frac{\mathfrak{C}}{C} - \frac{\mathfrak{D}}{D} = +\frac{1}{CD}$, und überhaupt $\frac{\mathfrak{M}}{M} - \frac{\mathfrak{N}}{N} = \pm\frac{1}{MN}$.

Denn die Unterſchiede dieſer Brüche haben nach ihrer Folge, wenn ſie immer in derſelben Ordnung von einander abgezogen werden, die Zähler, I. $\mathfrak{A}B - A\mathfrak{B}$; II. $\mathfrak{B}C - B\mathfrak{C}$; III. $\mathfrak{C}D - C\mathfrak{D}$; IV. $\mathfrak{D}E - D\mathfrak{E}$, u. ſ. f. Der erſte dieſer Zähler iſt $= +1$ (aus 5.).

Setzt man in II. für C und $\mathfrak{C}$ ihre Werthe aus (5), ſo verwandelt ſich II. in das Entgegengeſetzte von I., iſt alſo $= -1$. Setzt man in III. für D und $\mathfrak{D}$ ihre Werthe, ſo entſteht das Entgegengeſetzte von II. daher dieſer Zähler $= +1$ iſt. Auf gleiche Weiſe verwandelt ſich durch die Subſtitution der Werthe von E und $\mathfrak{E}$, der Zähler IV. in das Entgegengeſetzte von III. Da die folgenden Zähler und Nenner alle auf gleiche Art wie die erſtern gebildet werden, ſo erhellt der merkwürdige, und für dieſe Reihe von Brüchen charakteriſtiſche Satz, .

7. Die Abweichungen der genäherten Brüche von den vollſtändigen Werthen ergeben ſich aus den Formeln in (5.). Es iſt

$\frac{b}{a} - \frac{\mathfrak{A}}{A} = -\frac{c}{Aa}$	$\frac{a}{b} - \frac{A}{\mathfrak{A}} = +\frac{c}{\mathfrak{A}b}$
$\frac{b}{a} - \frac{\mathfrak{B}}{B} = +\frac{d}{Ba}$	$\frac{a}{b} - \frac{B}{\mathfrak{B}} = -\frac{d}{\mathfrak{B}b}$
$\frac{b}{a} - \frac{\mathfrak{C}}{C} = -\frac{e}{Ca}$	$\frac{a}{b} - \frac{C}{\mathfrak{C}} = +\frac{e}{\mathfrak{C}b}$
$\frac{b}{a} - \frac{\mathfrak{D}}{D} = +\frac{f}{Da}$	$\frac{a}{b} - \frac{D}{\mathfrak{D}} = -\frac{f}{\mathfrak{D}b}$
u. ſ. f.	u. ſ. f.

8. Hieraus erhellt erſtlich unmittelbar, daß die genäherten Brüche abwechſelnd größer und kleiner ſind, als der genaue, welches ſchon in (2.) bemerkt iſt. Zweytens, daß die Unterſchiede derſelben von dem vollſtändigen $\frac{b}{a}$ oder $\frac{a}{b}$ immer kleiner werden. Denn in der Reihe der Nenner A, B, C, D, etc. oder $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. iſt jeder kleiner als die vorhergehenden, ſo wie auch in der Reihe c, d, e, f, etc. das iſt der Reſte der Diviſionen von a durch b, von b durch c, von c durch d, u. ſ. f. jedes Glied kleiner iſt als die vorhergehenden.

9. Ein Bruch in ganzen Zahlen, der zwiſchen zwey nächſte Brüche der Reihe, $\frac{\mathfrak{A}}{A}$, $\frac{\mathfrak{B}}{B}$, $\frac{\mathfrak{C}}{C}$, etc. fällt, hat einen größern Nenner als der nachfolgende unter dieſen beiden. — Denn es ſeyn zwey ſolche Brüche, $\frac{\mathfrak{M}}{M}$, $\frac{\mathfrak{N}}{N}$, und der Bruch, der zwiſchen ihnen liegt, ſey $\frac{\beta}{\alpha}$. Iſt $\frac{\mathfrak{M}}{M}$ der größere unter jenen beiden, ſo iſt er größer als $\frac{\beta}{\alpha}$, und der Unterſchied $\frac{\mathfrak{M}}{M} - \frac{\beta}{\alpha}$, oder $\frac{\mathfrak{M}\alpha - M\beta}{M\alpha}$ kleiner als der Unterſchied jener beiden Brüche, das iſt, als $\frac{1}{MN}$ (6.). Es ſey $\mathfrak{M}\alpha - M\beta = n$, einer ganzen Zahl, ſo iſt $\frac{n}{M\alpha} < \frac{1}{MN}$, alſo $\alpha > nN$, und noch vielmehr $\alpha > N$. Iſt $\frac{\mathfrak{M}}{M}$ der kleinere unter den beiden Brüchen, ſo iſt ebenfalls $\alpha > N$, da nur die Vorzeichen vertauſcht werden.

10. Ein Bruch in ganzen Zahlen, welcher dem Bruche $\frac{b}{a}$ näher kommt, als einer der Brüche in der Reihe $\frac{\mathfrak{A}}{A}$, $\frac{\mathfrak{B}}{B}$, $\frac{\mathfrak{C}}{C}$, etc. hat einen größern Nenner als dieſer Bruch.

Denn es ſey $\frac{\mathfrak{N}}{N}$ ein Bruch in dieſer Reihe, und $\frac{\beta}{\alpha}$ ſey weniger von $\frac{b}{a}$ verſchieden, als es $\frac{\mathfrak{N}}{N}$ iſt.

D

Digitized by Google

Da $\frac{\mathfrak{M}}{M}$ mehr verſchieden von $\frac{b}{a}$ iſt, als es $\frac{\mathfrak{N}}{N}$ iſt, ſo fällt $\frac{\beta}{\alpha}$ zwiſchen die Brüche $\frac{\mathfrak{M}}{M}$ und $\frac{\mathfrak{N}}{N}$, daher iſt $\alpha > N$ aus (9.).

11. Zur Erläuterung dienen folgende Zeichnungen. Es ſeyn

A M P O P N

die Längen AM, AN zwey genäherte Brüche an den gegebenen AO, ſo daß NO kleiner ſey als MO. Die Länge AP ſtelle einen Bruch vor, der näher an den durch AO abgebildeten falle, als AN demſelben liegt, ſo fällt P nothwendig zwiſchen M und N, auf welcher Seite von O es auch liege, oder AP zwiſchen AM und AN.

Nimmt man hingegen

A M P O P N P

die Länge AP näher an AO als AM derſelben iſt, ſo kann der Punct P zwar zwiſchen M und N auf der einen oder der andern Seite von O fallen, allein es kann auch P jenſeits N liegen, ſofern nur daſelbſt OP kleiner als OM iſt. In dem letztern Falle liegt AP nicht zwiſchen AM und AN.

Darum konnte in dem Beweiſe von (10.) der Bruch $\frac{\mathfrak{N}}{N}$ nicht als ein vorangehender Bruch betrachtet werden, ſondern mußte ein nachfolgender ſeyn.

12. Aus der Reihe der annähernden Brüche, $\frac{\mathfrak{A}}{A}$, $\frac{\mathfrak{B}}{B}$, $\frac{\mathfrak{C}}{C}$, $\frac{\mathfrak{D}}{D}$, $\frac{\mathfrak{E}}{E}$, etc. nehme man zwey um zwey Stellen von einander abſtehende, wie

$\frac{\mathfrak{C}}{C}$, $\frac{\mathfrak{E}}{E}$, oder $\frac{\mathfrak{B}}{B}$, $\frac{\mathfrak{D}}{D}$. Dieſe ſind beide größer oder beide kleiner als der völlige Werth des Kettenbruchs, wenn nicht der letzte von ihnen ſelbſt der vollſtändige iſt. Man ſuche nun den Unterſchied zweyer ſolchen Brüche, z. B. $\frac{\mathfrak{C}}{C}$, $\frac{\mathfrak{E}}{E}$, wo der erſtere der größere iſt, weil die Brüche in den ungeraden Stellen größer als der Werth des Kettenbruchs ſind, und zugleich ſich demſelben nähern. Es iſt $\frac{\mathfrak{C}}{C} - \frac{\mathfrak{E}}{E} = \frac{\mathfrak{C}}{C} - \frac{\mathfrak{D}}{D} - \left(\frac{\mathfrak{E}}{E} - \frac{\mathfrak{D}}{D}\right) =$

$$\frac{1}{CD} - \frac{1}{ED} = \frac{E - C}{CDE} = \frac{rD}{CDE} = \frac{r}{CE},$$

zufolge (6. u. 5.).

Iſt $r = 1$, ſo kann zwiſchen $\frac{\mathfrak{C}}{C}$ und $\frac{\mathfrak{E}}{E}$ kein Bruch eingeſchoben werden, deſſen Nenner kleiner als E wäre, zufolge des in (9.) gebrauchten Beweiſes. Iſt aber r größer als 1, ſo laſſen ſich $r - 1$ Brüche einſchalten, zwiſchen welchen und den beiden an die äußerſten liegenden, $\frac{\mathfrak{C}}{C}$, $\frac{\mathfrak{E}}{E}$, kein Bruch mit einem kleinern Nenner, als der Nenner des nachfolgenden unter ihnen iſt, Statt findet. Es ſey z. B. $r = 4$, ſo erhält man folgende Reihe von Brüchen, die dieſe Beſchaffenheit haben:

$$\frac{\mathfrak{C}}{C};\ \frac{\mathfrak{D}+\mathfrak{C}}{D+C};\ \frac{2\mathfrak{D}+\mathfrak{C}}{2D+C};\ \frac{3\mathfrak{D}+\mathfrak{C}}{3D+C};\ \frac{4\mathfrak{D}+\mathfrak{C}}{4D+C},$$

wo der letzte $= \frac{\mathfrak{E}}{E}$ iſt (5.). Die Zähler der Unterſchiede je zweyer nächſten ſind jeder $= 1$, weil $\mathfrak{C}D - C\mathfrak{D} = 1$ iſt (6.). Zwiſchen zwey nächſten derſelben findet alſo kein Bruch Statt, deſſen Nenner kleiner als der Nenner des nachfolgenden unter ihnen beiden wäre. Jeder der Brüche nähert ſich dem Werthe des Ket-

tenbruchs mehr als der vorhergehende. Denn ſie machen eine abnehmende Reihe aus, in welcher das letzte Glied dem vollen Werthe des Kettenbruchs näher kommt als das erſte, daher jeder der Brüche nach der Reihe dem letzten Bruche, und dadurch dem Kettenbruche ſelbſt näher kommt. Die Unterſchiede werden fortweg kleiner.

Alles dieſes läßt ſich auch auf die Reihe der Brüche anwenden, die kleiner ſind, als der Werth des Kettenbruches.

Beyſpiele der Anwendung.

13. Exempel. I. Der Durchmeſſer eines Kreiſes verhält ſich zu dem Umfange wie 1:3,141592653 .... (Cyklometrie, Th. I. S. 642). Um eine Reihe ſucceſſiv annähernder Verhältniſſe zu erhalten, verwandle man den Bruch $\frac{3141592653\ldots}{1000000000\ldots}$ nach (3.) in einen Kettenbruch, deſſen erſtes Glied eine ganze Zahl 3 iſt,

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\text{etc.}}}}}}}}}$$

Hieraus ergeben ſich folgende rationale Brüche, die der Richtigkeit immer näher kommen.

$$\frac{3}{1};\ \frac{22}{7};\ \frac{333}{106};\ \frac{355}{113};\ \frac{103993}{33102}.$$

Hier ſind die Brüche in den ungeraden Stellen zu klein, die in den geraden zu groß. Der vierte Bruch enthält das von Metius gefundene Verhältniß. Man ſieht hier, wie genau es iſt. Der Unterſchied des Bruchs $\frac{355}{113}$ von dem genauen Werthe iſt kleiner als

$\frac{1}{113 \times 33102}$, welches der Unterſchied des vierten und fünften Bruchs iſt. — Die weiter fortgeſetzte Reihe der Brüche findet man in dem dritten Theile von Eulers Algebra, welcher der franzöſiſchen Ausgabe beygefügt iſt, und in der deutſchen Überſetzung deſſelben von Kaußler S. 48. 49.

14. Exempel. II. Die Baſis der natürlichen Logarithmen iſt $e = 2{,}718281828459\ldots$ Die Quotienten der ſucceſſiven Diviſionen ſind

2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, etc.

alſo

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

Es wechſeln in den Quotienten je zwey Einer mit den geraden Zahlen nach der Reihe ab. *Euler* in Comm. Ac. Petrop. T. IX. p. 120. Dieſe Quotienten geben die genäherten Brüche:

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{8}{3},\ \frac{11}{4},\ \frac{19}{7},\ \frac{87}{32},\ \frac{106}{39},$$

$$\frac{193}{71};\ \frac{1264}{465},\ \frac{1457}{536};\ \text{etc.}$$

15. Exempel. III. Das tropiſche Jahr enthält 365 T. 5 St. 48′, 48″, es wird das Verhältniß eines Tages zu einem Jahre in den kleinſten Zahlen nahe geſucht. Die Länge des Jahres iſt $365\frac{20928}{86400}$ Tage. Man braucht hier nur den Überſchuß in einen leichtern Bruch zu verwandeln. Der Bruch iſt durch 192

verkleinerlich und iſt $= \frac{109}{450}$. Dieſer Bruch giebt durch die fortgeſetzte Diviſion jedes Diviſors durch den zugehörigen Reſt die Quotienten,

4, 7, 1, 3, 1, 2.

Daher ſind die annähernden Brüche mit dem Bruche ſelbſt,

$$\frac{1}{4};\ \frac{7}{29};\ \frac{8}{33};\ \frac{31}{128};\ \frac{39}{161};\ \frac{109}{450}.$$

In dem Julianiſchen Kalender iſt das Jahr auf $365\frac{1}{4}$ Tage geſetzt; in dem Gregorianiſchen auf $365\frac{97}{400}$ Tage, da in 400 Jahren 97 Tage eingeſchaltet werden. Es ſind $\frac{97}{400} = \frac{109\frac{1}{8}}{450}$.

16. Exempel. IV. Der ſynodiſche Monath iſt 29 T. 12 St. 44′ 2″, 8283 = 29,530588 Tage. Das tropiſche Jahr hält 365,242222 Tage. Der Bruch $\frac{29530588}{365242222}$ giebt die ſucceſſiven Quotienten,

12, 2, 1, 2, 1, 1, 17, etc.

Daher ſind die annähernden Brüche,

$$\frac{1}{12};\ \frac{2}{25};\ \frac{3}{37};\ \frac{8}{99};\ \frac{11}{136};\ \frac{19}{235};\ \frac{334}{4131},\ \text{etc.}$$

Der Bruch $\frac{19}{235}$ giebt den Mondscyklus in der Chronologie, in welchem 235 ſynodiſche Monathe 19 Jahren gleich geſetzt werden. Er iſt etwas zu klein, daher 235 Monathe ſich ein weniges ſpäter endigen als 19 tropiſche Jahre, nämlich um 2 St. 4′ 33″.

17. Wenn einer der Quotienten m, n, p, etc. in (3.) um 1 zu groß genommen wird, ſo wird der Reſt negativ, und der ergänzende Bruch, der aus dieſem Reſte

entſteht, bekommt das Vorzeichen —. Dieſes geht den ganzen ergänzenden Bruch in allen ſeinen Theilen an. Daher bekommen dieſe das Vorzeichen +, ſo lange kein Quotient zu groß genommen wird. Der ergänzende ſubtractive Bruch iſt eben ſo wie ein unabhängiger Bruch zu behandeln. Dieſe ſubtractiven Brüche dienen die annähernden Brüche ſchneller zu finden, und einen oder mehrere Schritte zu erſparen, wenn Reſte vorkommen, die gegen den Diviſor beträchtlich ſind. Ungleichnamige Dividendus und Diviſor geben einen negativen Quotienten.

18. Exempel. I. Der Bruch $\frac{29530588}{365242222}$ in (16.) giebt mit Zuziehung negativer Reſte die Quotienten:

$$+12;\quad +3;\quad -3;\quad -2;\quad +18.$$

Daraus entſtehen nach derſelben Formation jedes Bruchs aus den beiden nächſt vorhergehenden, wie bey lauter poſitiven Quotienten, die annähernden Werthe:

$$\frac{+1}{12};\ \frac{3}{37};\ \frac{-8}{-99};\ \frac{19}{235};\ \frac{334}{4131}.$$

Hier ſind aus der Rechnung (16.) zwey Brüche erſpart. Der Kettenbruch iſt

$$\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{18+\text{etc.}}}}}}$$

Man verliert hier aber den Vortheil, der bey lauter poſitiven Quotienten iſt, daß der wahre Werth des vorgegebenen Bruchs zwiſchen zwey nächſten der Folge liegt.

19. Exempel. II. Bey der Verwandlung der Baſis der natürlichen Logarithmen, $e = 2{,}718281828459\ldots$ (14.) in einen Kettenbruch erhält man bey Anwendung negativer Reſte die Quotienten:

+2; +1; +3, −2, −5, +2, +7, −2, −9, +2, +11, −2, −13, etc.

Daraus entſtehen die genäherten Brüche:

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{11}{4},\ \frac{-19}{-7},\ \frac{106}{39},\ \frac{193}{71},\ \frac{1457}{536},$$

u. ſ. f. Hier ſind gegen die Rechnung in (14.) drey Brüche erſpart. Der Kettenbruch ſelbſt iſt

$$2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{9-\text{etc.}}}}}}}}}$$

20. Es ſey ein Theil eines Kettenbruchs =

$$r+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{u}},$$

wo r eine ganze Zahl, und u der ganze ergänzende Nenner iſt. Dieſer Theil wird durch Anwendung einer ſubtractiven Ergänzung $= r+1-\frac{1}{1+u}$.

Auf dieſe Art wird

$$r+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{u}}} = r+1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{u}},$$

indem hier $1+\frac{1}{u}$ ſtatt u in dem vorhergehenden Bruche kommt.

Ferner iſt

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{u}}}} = 1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{1+u},$$

wo ebenfalls $1 + \frac{1}{u}$ anſtatt des u in dem nächſt vorhergehenden Bruche kommt. Setzt man hier wiederum $1 + \frac{1}{u}$ anſtatt u, ſo ſind vier Nenner nach der Reihe $= 1$, und der reducirte Bruch iſt

$$1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{u}.$$

21. Es ſey nun allgemein der Kettenbruch

$$\cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \cfrac{\varepsilon}{e + \cfrac{\zeta}{f + \text{etc.}}}}}}}$$

Setzt man folgeweiſe zu a, b, c, etc. die Brüche $\frac{\beta}{b}$, $\frac{\gamma}{c}$, etc. und verwandelt die abgeſchnittenen Stücke des Kettenbruchs in gemeine Brüche, ſo entſteht daraus die Folge der convergirenden Brüche:

I. $\frac{\alpha}{a}$,

II. $\frac{\alpha b}{ab + \beta}$,

III. $\frac{\alpha bc + \alpha\gamma}{abc + \beta c + a\gamma}$.

IV. $\dfrac{\alpha b c d + \alpha\gamma d + \alpha b\delta}{a b c d + \beta c d + a\gamma d + a b\delta + \beta\delta}$.

V. $\dfrac{\alpha b c d e + \alpha\gamma d e + \alpha b\delta e + \alpha b c\varepsilon + \alpha\gamma\varepsilon}{a b c d e + \beta c d e + a\gamma d e + a b\delta e + \beta\delta e + a b c\varepsilon + \beta c\varepsilon + a\gamma\varepsilon}$.

22. Man bezeichne, wie oben, dieſe Brüche durch $\frac{\mathfrak{A}}{A}$, $\frac{\mathfrak{B}}{B}$, $\frac{\mathfrak{C}}{C}$, $\frac{\mathfrak{D}}{D}$, $\frac{\mathfrak{E}}{E}$, etc. ſo iſt

$A = a$.	$\mathfrak{A} = \alpha$.
$B = Ab + \beta$.	$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}b$.
$C = Bc + A\gamma$.	$\mathfrak{C} = \mathfrak{B}c + \mathfrak{A}\gamma$.
$D = Cd + B\delta$.	$\mathfrak{D} = \mathfrak{C}d + \mathfrak{B}\delta$.
$E = De + C\varepsilon$.	$\mathfrak{E} = \mathfrak{D}e + \mathfrak{C}\varepsilon$.
u. ſ. f.	u. ſ. f.

Für dieſe Brüche erhellt das Geſetz aus ihnen ſelbſt. In dem Bruche $\frac{\mathfrak{D}}{D}$ hat man ſtatt d zu ſetzen $d + \frac{\varepsilon}{e}$, um den Bruch $\frac{\mathfrak{E}}{E}$ zu erhalten. Dadurch iſt

$$\frac{\mathfrak{E}}{E} = \frac{\mathfrak{C}(d + \varepsilon : e) + \mathfrak{B}\delta}{C(d + \varepsilon : e) + B\delta} = \frac{(\mathfrak{C}d + \mathfrak{B}\delta)e + \mathfrak{C}\varepsilon}{(Cd + B\delta)e + C\varepsilon}$$

$$= \frac{\mathfrak{D}e + \mathfrak{C}\varepsilon}{De + C\varepsilon}.$$

Folglich entſteht der Bruch $\frac{\mathfrak{E}}{E}$ auf eine ähnliche Art aus den beiden nächſt vorhergehenden, wie der nächſte $\frac{\mathfrak{D}}{D}$ aus den beiden vor ihm vorhergehenden entſteht. Daſſelbe erhellt für den folgenden Bruch $\frac{\mathfrak{F}}{F}$ durch ein ähnliches Verfahren, indem nur die Buchſtaben mit den nächſt folgenden vertauſcht werden, und ſo für alle folgende.

23. Es iſt

$$\frac{\mathfrak{A}}{A} - \frac{\mathfrak{B}}{B} = + \frac{\alpha\beta}{AB},$$

$$\frac{\mathfrak{B}}{B} - \frac{\mathfrak{C}}{C} = - \frac{\alpha\beta\gamma}{BC},$$

$$\frac{\mathfrak{C}}{C} - \frac{\mathfrak{D}}{D} = + \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{CD},$$

$$\frac{\mathfrak{D}}{D} - \frac{\mathfrak{E}}{E} = - \frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{DE},$$

u. ſ. f.

Der Beweis wird wie in (6.) geführt, wo α, β, γ, δ, ε, etc. jede $= 1$ ſind.

24. Um jeden der convergirenden Brüche auch ohne die vorhergehenden zu finden, dient folgende Darſtellung des Zählers und Nenners, die Hindenburg in dem Archiv der Mathematik, 1. 2. 3ten Heft gewieſen hat.

Zähler.

	1	2	3	4	5
1	α	b	c	d	e
2		α	γ	d	e
3		α	b	δ	e
4		α	b	c	ε
			α	γ	ε
5					

Nenner.

	1	2	3	4	5
1	a	b	c	d	e
		β	c	d	e
2		a	γ	d	e
3		a	b	δ	e
			β	δ	e
4		a	b	c	ε
			β	c	ε
			a	γ	ε
5					

Die Winkelhaken ſondern hier die Werthe der Zähler und Nenner in den convergirenden Werthen des Kettenbruchs (21.) ab, zufolge des in (22.) bemerkten Geſetzes. Jeder Zähler und Nenner ſtellt zugleich die Zähler und Nenner der vorhergehenden Brüche dar. Dieſe zur Einſicht in die Formation der Kettenbrüche ſehr dienliche Schematiſirung nennt Hindenburg eine Involution, dergleichen in dem Artikel, Combination, 38, 39. vorgekommen iſt. Das Schema läßt ſich leicht fortſetzen. Der nächſte integrirende Bruch ſey $\frac{\zeta}{f}$, ſo ſetzt man einen neuen Winkelhaken 6—6 an, in welchem man erſtlich zu den Gliedern des Winkelhakens 5—5 den Factor f fügt, und zweytens den Winkelhaken 4—4 mit dem angehängten Factor ζ darunter ſetzt.

25. Man bemerke, daß alle Glieder des Zählers ſich mit α, dem Zähler des erſten Bruchs in dem Kettenbruche, anfangen. Vertauſcht man α mit a, dem Nenner dieſes Bruchs, und in den Gliedern, welche ſich mit αb anfangen, αb mit β, ſo erhält man alle Glieder des Nenners. Da der Zähler und Nenner des nächſten ſechsten Werthes aus den Zählern und Nennern der zwey nächſt vorhergehenden Werthe zuſammen geſetzt wird, durch Hinzufügung eines der Factoren, f, ζ, die hier rechter Hand angehängt werden, ſo iſt die hier gemachte Bemerkung allgemein gültig.

26. Die Glieder eines ergänzenden Bruchs, wie $\frac{\gamma}{c}$, darf man durch Diviſion mit derſelben Zahl nicht ändern, weil dieſe Glieder nicht in allen Theilen des Zählers und Nenners des verwandelten Kettenbruchs vorkommen. Aber der Zähler und Nenner eines der ergänzenden Brüche, nebſt dem Zähler des darauf folgenden Bruchs, wie γ, c, δ, dürfen mit derſelben Zahl multiplicirt oder dividirt werden. Denn in jedem Theile des Zählers und Nenners des reducirten Kettenbruchs kommt ein einzelnes

dieſer Glieder vor. Dieſes rührt daher, daß irgend ein Stück des Kettenbruchs, wie $\frac{\gamma}{c + \frac{\delta}{d + \text{etc.}}}$ unverändert bleibt, wenn der Zähler und der gemiſchte Nenner mit derſelben Zahl m multiplicirt oder dividirt werden. Dieſes geſchieht durch die Multiplication oder Diviſion von γ, c und δ.

27. Auch darf man die angenäherten Werthe des Kettenbruches nicht aufheben, wenn gleich Zähler und Nenner einen gemeinſchaftlichen Factor haben ſollten, wofern man ſich derſelben noch zur Erfindung folgender Werthe bedienen will. Denn es ſeyn zwey auf einander folgende Werthe, $\frac{M}{P}$, $\frac{N}{Q}$, woraus der folgende nach dem Geſetze (22.) dieſer ſey, $\frac{Mm + Nn}{Pm + Qn}$, ſo erhellt, daß man in dieſem keine gleichnamige Theile oder Vielfache von M und P, oder von N und Q ſetzen dürfe, es müßte denn in beiden Paaren auf gleiche Art geſchehen können.

Der Fall, daß ein angenäherter Werth verkleinerlich ſeyn ſollte, trift nie ein, wenn die Zähler der einfachen Brüche die Einheit ſind, wie in (3.). Denn man nehme z. B. den genäherten Werth aus IV. in (4.), nämlich $\frac{mnpq + pq + mq + mn + 1}{npq + q + n}$, ſo muß, wenn hier Zähler und Nenner einen gemeinſchaftlichen Diviſor enthalten, daſſelbe auch für den Bruch $\frac{pq + 1}{npq + q + n}$ Statt haben, daher auch für $\frac{pq + 1}{q}$, daraus für $\frac{1}{q}$, welches nicht möglich iſt, da die Einheit als gemeinſchaftlicher Theiler nicht betrachtet wird.

Anwendung auf die Algebra.

28. Die Kettenbrüche leiſten gute Dienſte zur Ausziehung der Quadratwurzeln, und zur Auflöſung quadratiſcher Gleichungen. Wenn nämlich die Nenner der **Elementarbrüche**, wie man ſie nennen mag, periodiſch wiederkehren, ſo iſt der Werth des Kettenbruchs die Wurzel einer quadratiſchen Gleichung. Es ſey erſtlich

$$x = \cfrac{1}{a} + \cfrac{1}{a} + \cfrac{1}{a} + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}$$

Aus dieſer ins Unendliche fortgehenden Zuſammenſetzung derſelben Brüche folgt

$$x = \cfrac{1}{a} + \cfrac{1}{a + x}.$$

Daraus ferner durch die Reduction des unreinen Bruchs,

$$xx + ax = 1,$$

und hieraus

$$x + \tfrac{1}{2}a = \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa + 1)}.$$

Die Quadratwurzeln der Zahlen von der Form, $\frac{1}{4}aa + 1$, laſſen ſich alſo durch periodiſche Kettenbrüche mit einem und demſelben wiederkehrenden Nenner ausdrucken.

29. Es ſey zweytens

$$x = \cfrac{1}{a} + \cfrac{1}{b} + \cfrac{1}{a} + \cfrac{1}{b} + \cfrac{1}{a} + \text{etc.}$$

ſo iſt

$$x = \cfrac{1}{a} + \cfrac{1}{b + x},$$

und daraus

$$axx + abx = b.$$

Dieſe Gleichung giebt

$$x+\tfrac{1}{2}b=\sqrt{(\tfrac{1}{4}b^2+\frac{b}{a})}.$$

30. Eine gegebene Zahl N laſſe ſich in zwey Theile, m^2+n, zerlegen, ſo daß $\frac{2m}{n}=a$ eine ganze Zahl iſt, wobey der Theil n auch eine gebrochne Zahl ſeyn mag.

Man nehme $b=2m$, ſo läßt ſich $\sqrt{(m^2+n)}$ durch einen Kettenbruch ausdrucken, in welchem die wiederkehrenden Nenner a und b ſind. Z. B. für die Zahl 12 iſt $a=2$; $b=6$.

31. Hat die Zahl N dieſe Beſchaffenheit nicht, ſo ſetze man $aabb+4ab=Nc^2$. Daraus iſt $aabb+4ab+4=Nc^2+4$, und $ab+2=\sqrt{(Nc^2+4)}$. Da

$x+\tfrac{1}{2}b=\frac{1}{2a}\sqrt{(aabb+4ab)}$ iſt, ſo iſt

$x+\tfrac{1}{2}b=\frac{c}{2a}\sqrt{N}$. Es muß alſo eine Zahl c geſucht werden, wodurch die Formel, Nc^2+4, das Quadrat einer ganzen Zahl wird. Von dieſer Zahl, das iſt, von $ab+2$, ziehe man 2 ab, und zerlege den Reſt in zwey ganze Factoren, a, b. Dieſe ſind die wiederkehrenden Nenner in dem Kettenbruche, wodurch $\frac{c}{2a}\sqrt{N}-\tfrac{1}{2}b$ ausgedruckt wird, woraus ſich dann $\sqrt{N}$ ſelbſt auch in dieſer Form ergiebt. Z. B. wenn $\sqrt{7}$ geſucht wird, ſetze man $c=6$, ſo iſt $ab+2=16$; $ab=14$. Setzt man $a=7$, $b=2$, ſo iſt $x+1=\tfrac{3}{7}\sqrt{7}$.

31.* Dieſes Verfahren kann man auch bey Zahlen von der in (30.) angegebenen Form anwenden, z. B. bey der Zahl 12. Es iſt $12.\,16+4=196=14.\,14$, und $ab+2=14$; $ab=12$. Nimmt man $a=3$, ſo iſt $b=4$, und $x+2=\tfrac{2}{3}\sqrt{12}$.

32. Exempel.

$$\sqrt{2}-1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2+\text{etc.}}$$

$$\sqrt{3}-1=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2+\text{etc.}}$$

$$\sqrt{12}-3=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6+\text{etc.}}$$

$$\tfrac{3}{4}\sqrt{8}-2=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4+\text{etc.}}$$

$$\tfrac{2}{3}\sqrt{12}-2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4+\text{etc.}}$$

Die Annäherung geſchieht ſchneller, wenn die Nenner größer ſind. Aus $\sqrt{8}$ erhält man die $\sqrt{2}$, da $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. So iſt auch $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

33. Aus dieſen Kettenbrüchen werden folgende genäherte Werthe erhalten:

für $\sqrt{2}-1$,

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{12},\ \frac{12}{29},\ \frac{29}{70},\ \frac{70}{169},\ \frac{169}{408},\ \text{etc.}$$

für $\sqrt{3}-1$,

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{8}{11},\ \frac{11}{15},\ \frac{30}{41},\ \frac{41}{56},\ \frac{112}{153},\ \text{etc.}$$

für $\frac{1}{4}\sqrt{8}-2$ oder $\frac{1}{2}\sqrt{2}-2$,

$$\frac{1}{8},\ \frac{4}{33},\ \frac{33}{272},\ \frac{136}{1121},\ \frac{1121}{9240},\ \frac{4620}{38081},\ \text{etc.}$$

Daher für $\sqrt{2}-1$,

$$\frac{5}{12},\ \frac{41}{99},\ \frac{169}{408},\ \frac{1393}{3363},\ \frac{5741}{13860},\ \text{etc.}$$

Für $\frac{2}{3}\sqrt{12}-2$ oder $\frac{4}{3}\sqrt{3}-2$,

$$\frac{1}{3},\ \frac{4}{13},\ \frac{13}{42},\ \frac{56}{181},\ \frac{181}{585},\ \frac{780}{2521},\ \text{etc.}$$

Daher für $\sqrt{3}-1$,

$$\frac{3}{4},\ \frac{19}{26},\ \frac{41}{56},\ \frac{265}{362},\ \frac{571}{780},\ \frac{3691}{5042},\ \text{etc.}$$

In den beiden letzten Reihen ſind gegen die zuerſt gefundenen je drey Brüche ausgefallen, für welche ein anderer Bruch gekommen iſt, deſſen Zähler und Nenner aus den Zählern und Nennern jener Brüche auf eine gewiſſe Weiſe zuſammen geſetzt ſind.

34. Jeder periodiſche Kettenbruch führt auf eine quadratiſche Gleichung. Z. B. Es ſey der periodiſche Kettenbruch

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{a+\text{etc.}}}}}}}}$$

Dieſer iſt

$$x=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+x}}}=\frac{1}{a+\cfrac{c+x}{bx+bc+1}}$$

$$=\frac{bx+bc+1}{(ab+1)x+abc+a+c};\ \text{woraus}$$

erhalten wird

$$(ab+1)x^2+(abc+a-b+c)x=bc+1.$$

35. Umgekehrt wird die Wurzel jeder quadratiſchen Gleichung immer durch einen periodiſchen Kettenbruch ausgedruckt. Den Beweis dieſes umgekehrten Satzes hat la Grange in der Abhandlung: ſur la réſolution des équations numériques, Mém. de l'Acad. de Berlin, 1768. p. 135. gegeben.

36. Es ſey die Gleichung,

$$\text{(I.)}\quad Az^m+Bz^{m-1}+Cz^{m-2}+Dz^{m-3}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ +K=0,$$

aufzulöſen, ſo läßt ſich eine ihrer Wurzeln, deren Gränzen in ganzen Zahlen nach Gleichung (231.) gefunden ſind, durch einen Kettenbruch darſtellen. Die nächſt kleinere Zahl ſey $=p$, ſo daß $z=y+\frac{1}{q}$. Dieſen Werth von z ſetze man in (I.), und multiplicire die ganze Gleichung mit y^m, ſo wird eine erſte transformirte Gleichung erhalten,

$$\text{(II.)}\quad A'y^m+B'y^{m-1}+C'y^{m-2}+D'y^{m-3}\ .\ .\ .\ .\ .\ +K'=0.$$

Wenn in (I.) zwiſchen p und $p+1$ nur eine Wurzel liegt, ſo hat y nur einen Werth, der größer als 1 iſt, von welchem man die Gränzen findet, wenn für y alle ganze poſitive Zahlen geſetzt werden, wobey man ſich die Rechnung abkürzen wird, wenn man den Werth von $\frac{1}{y}$ vorher geſchätzt hat. Nun ſey $y=q+\frac{1}{x}$, und es werde durch daſſelbe Verfahren, wie vorher, die zweyte transformirte Gleichung,

$$\text{(III.)}\quad A''x^m+B''x^{m-1}+C''x^{m-2}+D''x^{m-3}\ .\ .\ .\ .\ .\ +K''=0,$$

gefunden. In dieſer ſetze man $x = r + \frac{1}{v}$, und leite daraus eine dritte transformirte Gleichung für v her. In dieſer ſetze man $v = s + \frac{1}{u}$, ſo kann auf ähnliche Art u ausgedruckt werden, und ſo immer weiter. Demnach erhält die Wurzel der vorgegebenen Gleichung die Form,

$$z = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}$$

Es kommt alſo darauf an, die Gränzen p, q, r, s, etc. zu finden. La Grange hat dieſe Form für die Wurzel einer Gleichung angegeben in der vorher angeführten Abhandlung über die Auflöſung numeriſcher Gleichungen. Es iſt aber doch zu beſchwerlich, dieſe Gränzen zu ſuchen.

37. Exempel. Aus der Gleichung,

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

erhält man für p, q, r, s, etc. folgende Werthe:

2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, etc.

ſo daß die Wurzel derſelben iſt

$$z = 2 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

38. Es iſt vortheilhaft, wenn man immer die nächſte Gränze für die Wurzel jeder der Gleichungen nimmt, ſo daß, wenn dieſe größer als die Wurzel iſt, die Ergänzung ſubtractiv werde. Dadurch werden die Nenner der ergänzenden Brüche möglichſt groß, und die Annäherung geſchieht ſchneller. Man ſehe die Zuſätze zu der angeführten Abhandlung in dem beſondern Werke: ſur la résolution des équations numériques, p. 88. In dieſer Abhandlung wird auch gezeigt, wie man außer der erſten transformirten Gleichung der übrigen entbehren

könne, ſo daß bloß in der urſprünglichen Gleichung die Subſtitutionen gemacht werden.

Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche.

39. Aus den Formeln (23.) für die genäherten Werthe des Kettenbruchs,

$$\cfrac{\alpha}{a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \text{etc.}}}}$$

erhält man durch die Addition folgende Ausdrücke für dieſelben, worin für A deſſen Werth α geſetzt iſt.

$$\frac{\mathfrak{B}}{B} = \frac{\alpha}{A} - \frac{\alpha\beta}{AB}.$$

$$\frac{\mathfrak{C}}{C} = \frac{\alpha}{A} - \frac{\alpha\beta}{AB} + \frac{\alpha\beta\gamma}{BC}.$$

$$\frac{\mathfrak{D}}{D} = \frac{\alpha}{A} - \frac{\alpha\beta}{AB} + \frac{\alpha\beta\gamma}{BC} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{CD}.$$

u. ſ. f.

Folglich iſt der Werth eines Kettenbruchs, deſſen partielle Brüche alle gleichnamig ſind, eine Reihe mit abwechſelnden Vorzeichen, welche abbricht, wenn der Bruch aus einer endlichen Anzahl partieller Brüche zuſammen geſetzt iſt, ſonſt aber ohne Ende fortgeht.

40. Umgekehrt kann daher eine Reihe

$$s = P - Q + R - S + T - \text{etc.}$$

in einen Kettenbruch verwandelt werden, weil die Zähler und Nenner der partiellen Brüche aus den Gliedern der Reihe ſich beſtimmen laſſen, wie nun gezeigt werden wird.

41. Die Vergleichung der Glieder P, Q, R, S, etc. mit den Gliedern der Reihe, worin der Kettenbruch nach (39.) aufgelöſet wird, und die Formeln in (22.) für **A, B, C,** etc. geben folgende Gleichungen:

$$\alpha = AP. \qquad a = A.$$

$$\beta = \frac{BQ}{P}. \quad b = \frac{B-\beta}{A}.$$

$$\gamma = \frac{CR}{AQ}. \quad c = \frac{C-A\gamma}{B}.$$

$$\delta = \frac{DS}{BR}. \quad d = \frac{D-B\delta}{C}.$$

$$\varepsilon = \frac{ET}{CS}. \quad e = \frac{E-C\varepsilon}{D}.$$

u. ſ. f. u. ſ. f.

In den Werthen von β, γ, δ, ε, ſind die jedem vorhergehenden Werthe gebraucht, um ſie unabhängig von einander auszudrucken.

42. Es iſt hieraus

I. $\frac{\alpha}{a} = P.$

II. $B - \beta = \frac{B(P-Q)}{P}$, alſo

$$b = \frac{B}{A} \cdot \frac{P-Q}{P}, \text{ und}$$

$$\frac{\beta}{b} = A. \frac{Q}{P-Q} = \frac{Qa}{P-Q}.$$

III. $C - A\gamma = \frac{C(Q-R)}{Q}$,

$$c = \frac{C}{B} \cdot \frac{Q-R}{Q};$$

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{B}{A} \cdot \frac{R}{Q-R} = \frac{PRb}{(P-Q)(Q-R)}.$$

$$\text{IV.}\quad D - A\delta = \frac{D(R-S)}{R};$$

$$d = \frac{D}{C} \cdot \frac{R-S}{R};$$

$$\frac{\delta}{d} = \frac{C}{B} \cdot \frac{S}{R-S} = \frac{QSc}{(Q-R)R-S}.$$

Die gleichförmige Bildung aller dieſer Brüche erhellt aus der gleichförmigen Beſchaffenheit der Formeln in (41.).

43. Es iſt alſo

$$\alpha = Pa; \qquad \beta = \frac{Qab}{P-Q};$$

$$\gamma = \frac{PRbc}{(P-Q)(Q-R)}; \quad \delta = \frac{QScd}{(Q-R)(R-S)};$$

$$\varepsilon = \frac{RTde}{(R-S)(S-T)};$$ u. ſ. f.

44. Nun iſt der Kettenbruch, in welchen die Reihe,

$$s = P - Q + R - S + T - \text{etc},$$

verwandelt wird, folgender, worin zur Abkürzung für P — Q; Q — R; R — S; etc, geſetzt ſind p, q, r, etc.

$$\cfrac{Pa}{a + \cfrac{Qab:p}{b + \cfrac{PRbc:pq}{c + \cfrac{QScd:qr}{d + \text{etc.}}}}}$$

Es iſt nach (26.) erlaubt, die Zähler eines der partiellen Brüche mit einer Größe zu multipliciren oder zu dividiren, wenn der Nenner deſſelben, das iſt, hier der einfache Theil wie a, b, c, d, etc. und der Zähler des Ergänzungsbruchs mit derſelben Größe multiplicirt oder dividirt wird. Dadurch erhält der Kettenbruch, wenn die Werthe von p, q, r, r, s, etc. wieder hergeſtellt werden, die Geſtalt,

$$\frac{P}{1}+\cfrac{Q}{P-Q+\cfrac{PR}{Q-R+\cfrac{QS}{R-S+\cfrac{RT}{S-T+\text{etc.}}}}}$$

45. Euler hat in der Introd. in Anal. infin. T. I. §. 368. dieſe Formel auf ganze Werthe der Reihenglieder, P, Q, R, S, etc. eingeſchränkt. Er ſieht die Nenner der partiellen Brüche als willkührlich an, und beſtimmt ſie ſo, daß ſie, ſo wie die Nenner, ganze Zahlen werden, weswegen die Glieder der Reihe auch ganze Zahlen ſeyn ſollen. Er hat nicht bemerkt, daß jene Nenner durch die Diviſion aus dem Kettenbruche herausgehen, und in ſo fern willkührlich ſind. Die Glieder, P, Q, R, S, etc. dürfen jeden Werth erhalten, nur daß ſie poſitiv ſeyn, damit alle partiellen Brüche gleichnamig bleiben.

Die Herleitung der einfachen Brüche iſt hier auf eine andere Art bewerkſtelligt, als in dem gedachten Eulerſchen Werke.

46. Die Reihe,

$$s=\frac{1}{P}-\frac{1}{Q}+\frac{1}{R}-\frac{1}{S}+\frac{1}{T}-\text{etc.}$$

in einen Kettenbruch zu verwandeln, ſetze man in (44.) ſtatt P, Q, R, S, etc. die umgekehrten Größen, $\frac{1}{P}$, $\frac{1}{Q}$, $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{S}$ etc. und verwandle darauf die unreinen Brüche in dem Kettenbruche auf gehörige Art in reine Brüche, ſo wird

$$s=\frac{1}{P}+\cfrac{PP}{Q-P+\cfrac{QQ}{R-Q+\cfrac{RR}{S-R+\cfrac{SS}{T-S+\text{ꝛc.}}}}}$$

47. Euler hat zur Verwandlung einer ſolchen Reihe in einen Kettenbruch ein ſehr einfaches Verfahren angegeben, in den Opuſculis analyticis, T. II. p. 148.

Es ſey die ganze Reihe

$$s = \frac{1}{P} - \frac{1}{Q} + \frac{1}{R} - \frac{1}{S} + \frac{1}{T} - \text{etc.}$$ Der Theil nach dem erſten Gliede entgegengeſetzt genommen, ſey

$$t = \frac{1}{Q} - \frac{1}{R} + \frac{1}{S} - \frac{1}{T} + \text{etc.}$$

Auf gleiche Art ſey

$$u = \frac{1}{R} - \frac{1}{S} + \frac{1}{T} - \frac{1}{V} + \text{etc.}$$

$$v = \frac{1}{S} - \frac{1}{T} + \frac{1}{V} - \text{etc.}$$

und ſo werde von jedem Theile der Reihe das Anfangsglied abgeſondert. Es iſt nun

$$s = \frac{1}{P} - t = \frac{1 - Pt}{P},$$ daher

$$\frac{1}{s} = \frac{P}{1 - Pt} = P + \frac{P^2 t}{1 - Pt} =$$

$$P + \frac{P^2}{-P + \frac{1}{t}}.$$ Auf gleiche Art iſt

$$\frac{1}{t} = Q + \frac{Q^2}{-Q + \frac{1}{u}}; \quad \frac{1}{u} = R + \frac{R^2}{-Q + \frac{1}{v}};$$

u. ſ. f. Dieſe Werthe in den von $\frac{1}{S}$ geſetzt, wird

$$\frac{1}{s} = P + \frac{PP}{Q - P} + \frac{QQ}{R - Q} + \frac{RR}{S - R + \text{etc.}};$$

Durch Umkehrung dieſes Bruchs wird der Bruch in (46.) erhalten. Euler leitet a. a. O. §. 28. daraus den Kettenbruch für eine Reihe her, deren Glieder Brüche ſind.

48. Exempel. I. Es ſey der Halbmeſſer eines Kreiſes $= 1$, der halbe Umfang $= \pi$, ſo iſt der Bogen

$$= \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$$

$$- \frac{1}{11} + \text{etc.}$$ (Cyklometrie, 10. 11.)

Hier ſind P, Q, R, etc. die ungeraden Zahlen, alſo iſt

$$\frac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{etc.}}}}}}$$

Der umgekehrte Bruch druckt das Quadrat des Durchmeſſers durch die Kreisfläche, als Einheit, aus. Lord Brounker, der erſte Präſident der engliſchen Societät, hat dieſe Form durch eine ihm eigene, nicht bekannte, Methode gefunden. (Cyklotechnie, Th. I. S. 695.)

49. Exempel. II. Es ſey $s = \int \frac{x^{m-1}\partial x}{1 + x^n}$, ſo iſt, wenn die Differentialformel in eine Reihe entwickelt, und das Integral genommen wird, dieſes für $x = 1$, folgende Reihe,

$$s = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n}$$

$+$ etc. und der daraus entſtehende Kettenbruch,

$$s = \cfrac{1}{m + \cfrac{mm}{n + \cfrac{(m+n)^2}{n + \cfrac{(m+2n)^2}{n + \text{etc.}}}}}$$

50. Die Reihe für s habe die Geſtalt,

$$s = \frac{1}{P} - \frac{1}{PQ} + \frac{1}{PQR} - \frac{1}{PQRS} + \text{etc.}$$

In dem vorher gefundenen Kettenbruche ſetze man PQ, PQR, PQRS, etc. ſtatt P, Q, R, etc. ſo ergiebt ſich durch gehöriges Aufheben der partiellen Brüche für x der Kettenbruch.

$$s=\cfrac{1}{P}+\cfrac{P}{Q-1+\cfrac{Q}{R-1+\cfrac{R}{S-1+\cfrac{S}{T-1+\text{etc.}}}}}$$

51. Exempel. Die Baſis des natürlichen Syſtems der Logarithmen ſey $=e$, ſo iſt, wie in dem Artikel, Logarithme, gezeigt wird,

$$1-\frac{1}{e}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

Folglich iſt

$$1-\frac{1}{e}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\text{etc.}}}}}}}$$

und durch Umkehrung,

$$\frac{1}{e-1}=\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\text{etc.}}}}}}$$

52. Hieraus folgt

$$\frac{1}{e-2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\text{etc.}}}}}$$

Denn es iſt $e-1=1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+u}}$;

wo u die Ergänzung bedeutet. Hieraus ergiebt ſich $\frac{2}{e-2} = 2 + \frac{3}{3+u}$. Nun dividire man die partiellen Brüche nach ihrer Folge im Zähler und Nenner durch 2, durch 3, durch 4, u. ſ. f. mit Beobachtung der Vorſchrift (26.) ſo erhält man die hier angegebene Form.

53. Es ſey die mte Wurzel aus $(1+z)$ oder $(1+z)^{\frac{1}{m}}$ durch einen Kettenbruch darzuſtellen. Nach dem binomiſchen Lehrſatze iſt,

$$(1+z)^{\frac{1}{m}} = 1 + Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + Ez^5 - \text{etc.}$$

und hier $A = \frac{1}{m}$; $B = \frac{1.m-1.}{m.2m}$;

$$C = \frac{1.m-1.2m-1.}{m.2m.3m};$$

$$D = \frac{1.m-1.2m-1.3m-1.}{m.2m.3m.4m};$$

u. ſ. f. Da hier

$$(1+z)^{\frac{1}{m}} - 1 = Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + \text{etc.}$$

iſt, ſo hat man in dem Kettenbruche (44.) für P, Q, R, etc. zu ſetzen Az; Bz²; Cz³; etc. Dieſes giebt nach gehöriger Diviſion der Elementarbrüche durch die Potenzen von z,

$$(1+z)^{\frac{1}{m}} - 1 = \cfrac{Az}{1 + \cfrac{Bz}{A-Bz + \cfrac{ACz}{B-Cz + \cfrac{BDz}{C-Dz + \cfrac{CEz}{D-Ez+\text{etc.}}}}}}$$

54. Exempel. Die Quadratwurzel aus $1+z$ durch einen Kettenbruch anzugeben.

Es iſt $(1+z)^{\frac{1}{2}} - 1 =$

$$\cfrac{z}{2 + \cfrac{1.2z}{4 - z + \cfrac{3.4z}{6 - 3z + \cfrac{5.6z}{8 - 5z + \cfrac{7.8z}{10 - 7z + \text{etc.}}}}}}$$

Das hier angedeutete Geſetz der Formation der Elementarbrüche zeigt ſich auch bey den beiden folgenden Elementarbrüchen. Sie ſind $\frac{9.10.z}{12 - 9z}$ und $\frac{11.12.z}{14 - 11z}$.

Die unreinen Elementarbrüche ſind durch Multiplication und Diviſion in dem Zähler und Nenner eines jeden, und in dem Zähler des folgenden reducirt worden.

55. Auf gleiche Art iſt $(1+z)^{\frac{1}{3}} - 1 =$

$$\cfrac{z}{3 + \cfrac{2.3z}{6 - 2z + \cfrac{5.6z}{9 - 5z + \cfrac{8.9z}{12 - 8z + \cfrac{11.12z}{15 - 11z + \text{etc.}}}}}}$$

56. Um das Geſetz der Formation allgemein einzuſehen, drücke man jeden Coefficienten durch den vorhergehenden aus, wie folget:

$mA = 1$; $2mB = (m-1)A$;
$3mC = (2m-1)B$; $4mD = (3m-1)C$;
$5mE = (4m-1)D$; etc.

Dadurch wird erhalten

$$\frac{Az}{1} = \frac{z}{m}.$$

$$\frac{Bz}{A - Bz} = \frac{(m-1)z}{2m - (m-1)z}.$$

$$\frac{ACz}{B - Cz} = \frac{(2m-1)Az}{3m - (2m-1)z}.$$

$$\frac{Dz}{C-Dz} = \frac{(3m-1)Bz}{4m-(3m-1)z},$$

$$\frac{CEz}{D-Ez} = \frac{(4m-1)Cz}{5m-(4m-1)z},$$

etc.

In der Verkettung muß jeder Zähler mit derſelben Zahl multiplicirt und dividirt werden, mit welcher der Nenner des vorhergehenden multiplicirt und dividirt iſt. Dadurch werden die Elementarbrüche:

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{z}{m}; \qquad \frac{\beta}{b} = \frac{m.\overline{m-1}.z}{2m-(m-1)z};$$

$$\frac{\gamma}{c} = \frac{2m.\overline{2m-1}.z}{3m-(2m-1)z}; \quad \frac{\delta}{d} = \frac{3m.\overline{3m-1}.z}{4m-(3m-1)z};$$

$$\frac{\varepsilon}{e} = \frac{4m.\overline{4m-1}.z}{5m-(4m-1)z}; \qquad \text{etc.}$$

47. Damit die Reihe für die Wurzel, und dadurch auch der Kettenbruch convergirend ſey, muß z ein eigentlicher Bruch ſeyn. Iſt die gegebene Zahl größer als 2, ſo nehme man die nächſt kleinere Zahl, welche eine Potenz von dem Grade der Wurzel iſt, und dividire dadurch die gegebene Zahl, multiplicire aber die aus dem Quotienten gefundene Wurzel durch die Wurzel aus jener Zahl. Es ſey die gegebene Zahl $N = r^m + u$, ſo iſt

$$N^{\frac{1}{m}} = (r^m + u)^{\frac{1}{m}} = r\left(1 + \frac{u}{r^m}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Iſt z. B. die $\sqrt{12}$ zu finden, ſo iſt $r^2 = 9$; $z = \frac{u}{r^2} = \frac{1}{3}$, und

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{6}{11 + \cfrac{36}{17 + \cfrac{90}{19 + \text{etc.}}}}}$$

Die drey erſten Elementarbrüche geben nach den Formeln (5.) den Bruch $\frac{223}{1440}$. Daher iſt ziemlich nahe

$$\sqrt{12} = 3\left(1 + \frac{223}{1440}\right) = \frac{1663}{480} = 3{,}4645 \ldots$$

Sie iſt genauer 3,4641 ... Es iſt aber ein beträchtlicher Elementarbruch $\frac{90}{19}$ weggelaſſen worden, welcher inzwiſchen durch den nächſtfolgenden $\frac{168}{21}$ oder $\frac{8}{1}$ noch verkleinert wird. Nimmt man 20 ſtatt 17, ſo iſt $\sqrt{12} = 3{,}46377 \ldots$ Für Quadratwurzeln iſt das in (28. bis 34.) gebrauchte Verfahren bequemer.

58. Die Cubikwurzel aus 2 iſt =

$$1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{3.2}{2 + \cfrac{6.5}{4 + \cfrac{9.8}{4 + \cfrac{12.11}{4 + \text{etc.}}}}}}$$

Die fünf erſten Werthe ſind

$$\frac{4}{3},\ \frac{22}{18},\ \frac{208}{162};\ \frac{2416}{1944};\ \frac{37120}{29160};$$

die beiden letztern, nämlich 1,24279... und 1,27297... ſind noch beträchtlich von dem genauern 1,25992... (binom. Lehrſ. 16.) entfernt. Freylich kann auch die Reihe ſich nur langſam nähern, da die Progreſſionalgröße $z = 1$ iſt. Doch iſt es hier mehr um die Form als um die Annäherung zu thun.

59. La Grange hat in einer Abhandlung über die Anwendung der continuirlichen Brüche in der Integralrechnung, in den neuen Memoiren der Akad. zu Berlin für 1776. eine andere Formel für die Darſtellung der Potenz $(1 + x)^m$ gegeben. Zuerſt löſet er die Differentialgleichung, $my + (1 + x)\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, auf, ſo

daß y die Form eines Kettenbruchs erhält, auf eine ähnliche Art, wie oben bey der Auflöſung einer algebraiſchen Gleichung. Es iſt aber auch durch gewöhnliche Integration, $(1+x)^m = \frac{a}{y}$, da $\frac{m\,\partial x}{1+x} + \frac{\partial y}{y} = 0$ iſt.

Dadurch wird

$$(1+x)^m = 1 + \cfrac{mx}{1 - \cfrac{(m-1)x:2}{1 + \cfrac{(m+1)x:3.2}{1 - \cfrac{(m-2)x:3.2}{1 + \cfrac{(m+2)x:5.2}{1 - \cfrac{(m-3)x:5.2}{1 + \cfrac{(m+3)x:7.2}{1 + \text{etc.}}}}}}}}$$

Der Bruch endigt ſich, wenn m eine ganze, poſitive oder negative Zahl iſt.

Der Verfaſſer leitet hieraus Kettenbrüche für $\log(1+x)$ und für e^x her, giebt auch noch einige Verwandlungen dieſer Brüche an, wobey er auf eine für tang x kommt. Es iſt noch verſchiedenes merkwürdige in dieſer Abhandlung enthalten.

60. Eine Reihe,

$$x = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + Ez^4 - \text{etc.}$$

läßt ſich auf dieſelbe Art, wie ein numeriſcher Bruch in einen Kettenbruch verwandeln.

I. Man betrachte nämlich die Reihe als den Zähler eines Bruchs, deſſen Nenner die Einheit iſt. Dieſen Nenner dividire man durch die Reihe, nehme den Reſt, der nach Abziehung des Products aus dem erſten Theile des Quotienten in den Diviſor von dem Dividendus 1 bleibt, zum Diviſor, und die Reihe, die Diviſor war, zum Dividendus, auf welche Art immer fortgefahren werde.

Die Form der Rechnung iſt folgende:

$$\text{I.}\quad \frac{x}{1} = x.$$

$$\text{II.}\quad \frac{1}{x} = \frac{a}{\alpha} + \frac{p}{x}.$$

$$\text{III.}\quad \frac{x}{p} = \frac{b}{\beta} + \frac{q}{p}.$$

$$\text{IV.}\quad \frac{p}{q} = \frac{c}{\gamma} + \frac{r}{q}.$$

$$\text{V.}\quad \frac{q}{r} = \frac{d}{\delta} + \frac{s}{r}.$$

u. ſ. f.

Hier ſind $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{b}{\beta}$, $\frac{c}{\gamma}$, $\frac{d}{\delta}$, etc. die Quotienten, und p, q, r, s, etc. die Reſte.

II. Um die Rechnung zu erleichtern, ſetze man $x = A - Mz$, und bediene ſich folgender abgekürzten Ausdrücke:

$M = B - Nz$; $N = C - Pz$;
$P = D - Qz$; $Q = E - Rz$; etc.

ſo iſt

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{1}{A}.$$

$$p = \frac{Bz}{A} - \frac{Nz^2}{A}.$$

$$\frac{b}{\beta} = \frac{AA}{Bz}.$$

$$q = \frac{(AC - BB)z}{B} - \frac{(AP - BN)z^2}{B}.$$

$$\frac{c}{\gamma} = \frac{BB}{A(AC-BB)}.$$

$$x = \frac{(BD-CC)z^2}{AC-BB} - \frac{(BQ-CP)z^2}{AC-BB}$$

$$\frac{d}{\delta} = \frac{(AC-BB)^2}{B(BD-CC)z}.$$

$$s = [(AC-BB)Q-(AD-BC)P + (BD-CC)N]z^2:(BD-CC);$$

$$\frac{e}{\varepsilon} = \frac{(BD-CC)^2}{(AC-BB)[(AC-BB)E-(AD-BC)D+(BD-CC)C]}$$

III. Nun iſt

$$x = \frac{1}{(a:\alpha) + \frac{1}{(b:\beta) + \frac{1}{(c:\gamma) + \frac{1}{(d:\delta) + \text{etc.}}}}}$$

Es hindert hier nichts, die Zähler a, b, c, d, etc. jeden $=1$ zu ſetzen, wodurch nur ſtatt der Bezeichnungen $\frac{a}{\alpha}$, $\frac{b}{\beta}$, etc. die Bezeichnungen $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, etc. kommen, welche eben die Brüche wie jene bedeuten. Jene Form ward nur gewählt, um die Quotienten der ſucceſſiven Diviſionen dadurch deſto deutlicher anzuzeigen, und die bequemſte Beſtimmung des Zählers und Nenners frey zu laſſen. Werden nun die partiellen Brüche gehörig reducirt, ſo iſt

$$x = \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha\beta}{1 + \frac{\beta\gamma}{1 + \frac{\gamma\delta}{1 + \frac{\delta\varepsilon}{1 + \text{etc}}}}}$$

IV. Dieſe reducirten partiellen Brüche ſind:

$$\frac{\alpha}{1} = A.$$

$$\frac{\alpha\beta}{1} = \frac{Bz}{A}.$$

$$\frac{\beta\gamma}{1} = \frac{(AC - BB)z}{AB}.$$

$$\frac{\gamma\delta}{1} = \frac{A(BD - CC)z}{B(AC - BB)}.$$

$$\frac{\delta\varepsilon}{1} = \frac{B[(AC-BB)E-(AD-BC)D + (BD-CC)C]z}{(AC-BB)(BD-CC)}.$$

Die folgenden Werthe der Brüche werden noch zuſammengeſetzter.

61. Hieraus folgen nach den Formeln in (22.) die erſten vier genäherten Brüche:

I. $\frac{A}{1}$,

II. $\frac{AA}{A + Bz}$;

III. $\frac{AB + (AC - BB)z}{B + Cz}$,

IV. $\frac{A(AC-BB) + (A(AD-BC) - B(AC-BB))z}{AC-BB + (AD-BC)z + (BD-CC)z^2}$.

Zur Probe der Rechnung dient die Entwicklung dieſer Brüche durch die wirkliche Diviſion.

62. Es ſey $\sqrt[m]{(+z)}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln. Nach dem binomiſchen Lehrſatze iſt

$$(1 + z)^{\frac{1}{m}} - 1 = Az - Bz^2 + Cz^3 - Dz^4 + \text{etc.}$$

ſo daß

$$A = \frac{1}{m}; \quad B = \frac{1.m-1.}{m.2m}; \quad C = \frac{1.m-1.2m-1.}{m.2m.3m}; D = \frac{1.m-1.2m-1.3m-1.}{m.2m.3m.4m};$$

u. ſ. f.

Zu den Formeln für die partiellen Brüche und die genäherten Brüche hat man nun zu jeder der Größen A, B, C, etc. den Factor z zu ſetzen. Es iſt alſo

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{z}{m}; \quad \frac{\alpha\beta}{1} = \frac{(m-1)z}{2.1m};$$

$$\frac{\beta\gamma}{1} = \frac{(m+1)z}{2.3m}; \quad \frac{\gamma\delta}{1} = \frac{(2m-1)z}{2.3m};$$

$$\frac{\delta\varepsilon}{1} = \frac{(2m+1)z}{2.5m}; \quad \text{etc.}$$

Man entdeckt hier ſchon ein Geſetz der Fortſchreitung; allein es noch weiter zu verfolgen, iſt wegen der zu weitläufigen Rechnung zu beſchwerlich, da ſchon der letzte Bruch eine ziemlich lange Rechnung erfordert. Die Differential- und Integralrechnung ſind hier behülflich, ſo fern man ſich ihrer in einer Frage aus der Analyſis des Endlichen bedienen will. Denn der Kettenbruch, welchen wir hier gefunden haben, iſt derſelbe mit dem, welcher nach la Grange oben (59.) angeführt iſt. Man hat in unſern partiellen Brüchen nur zu ſetzen m ſtatt $\frac{1}{m}$, um jene zu erhalten.

63. Die genäherten Brüche ſind nach den Formeln in (60. V.), für $(1+z)^{\frac{1}{m}} - 1$ folgende:

I. $\frac{z}{m}$.

II. $\frac{2z}{2m+(m-1)z}$;

III. $\frac{6mz+(m+1)z^2}{6m^2+2m(2m-1)z}$;

IV. $\frac{12mz+6mz^2}{12m^2+6m(2m-1)z+(m-1)(2m-1)z^2}$;

Lambert hat in ſeinen Beyträgen zur Mathematik, Th. II. Abth. 3. §. 30. eine Formel für $\sqrt[m]{(a^m+b)}$ angegeben, die nicht ſo nett iſt, als die hier gefundene.

64. Exempel. Es ſey aus der Zahl 128 die Cubikwurzel zu ziehen. Dieſe iſt $= 125+3 = 5^3+3 = 5^3(1+\frac{3}{125})$. Hier iſt $m=3$; $z=\frac{3}{125}$. Der Werth des Bruches II. iſt $=\frac{1}{126}=0{,}0079365..$ Alſo $(1+\frac{3}{125})^{\frac{1}{3}} = 1{,}0079365..$ und $\sqrt[3]{128}=5{,}0396825..$ welcher Werth von dem in Th. I. S. 336 gefundenen in der ſechsten Decimalſtelle abzuweichen anfängt. Die Formel III. iſt $=0{,}007936842..$ Daher $\sqrt[3]{128}=5{,}03968421..$ bis in die achte Decimalſtelle mit dem angeführten übereinſtimmend.

65. Exempel. Es ſey die Cubikwurzel aus 2 zu finden, und man ſetze wie in (58.) auch hier $z=1$, ſo iſt der Werth von II. $=\frac{1}{4}$, und von III. $=\frac{11}{42}$. Alſo fällt dieſe Wurzel zwiſchen 1,25 und 1,2619.. Der zweyte und dritte genäherte Werth kommen hier der Wurzel, 1,259921 04989.. viel näher als in (58.) der vierte und fünfte. Der Formel IV. giebt den Werth $\frac{27}{104}$, alſo nach dieſer $\sqrt[3]{2}=\frac{131}{104}=1{,}25961..$

66. Den erſten Gebrauch der Kettenbrüche hat, wie ſchon erwähnt iſt, der Lord Brouncker gemacht. gemacht. Der Beweis, den Wallis von deſſelben Ausdrucke zu geben verſucht hat, iſt nach Eulers Urtheile (Comm. Petrop. vet. T. IX. p. 101) unbefriedigend, und ſcheint von der Methode des Erfinders ganz verſchieden zu ſeyn.

Huyghens zeigte, wie die Kettenbrüche dienen, das Verhältniß zweyer großen Zahlen durch kleinere beynahe auszudrucken, ſo daß keine kleinere es genauer angeben, in der Abhandlung: de automato planetario, in den Opp. reliquis, Vol. II. Zu der Berechnung des Räderwerks in dem Planetarium war dieſes nöthig.

Man ließ es aber bey einigen einzelnen ſolchen Reihenbrüchen bewenden, bis daß Euler es unternahm, eine Theorie derſelben zu errichten, auch ſelbſt transſcendente Formeln durch ſie darzuſtellen. Dieſes geſchah zuerſt in den Comment. Acad. Petrop. T. IX. a. a. 1737. wo vermuthlich die Benennung, fractio continua, zuerſt vorkommt. Dieſe Unterſuchung ſetzte er fort, und theilte ſie in einer ausführlichen Abhandlung mit, eb. daſ. T. XI. Hier wird die Lehre von den Kettenbrüchen ganz analytiſch und ſehr tiefſinnig behandelt. Zuerſt von der Verwandlung dieſer Brüche in Reihen und umgekehrt dieſer in jene. Dann von dem Zuſammenhange derſelben mit Brüchen, deren Zähler und Nenner Producte der Glieder einer arithmetiſchen Reihe ſind, oder den numeriſchen Facultäten nach Kramp, auch von der Verwandlung der Kettenbrüche in Integralformeln, oder dieſer in jene. In den Comment. novis Petrop. T. XI. a. a. 1765. zeigte Euler eine beſondere Methode an, Quadratwurzeln in Kettenbrüche zu entwickeln, in der Abhandlung, worin ein neuer Algorithmus zur Auflöſung der Pellſchen Aufgabe angewandt wird. In denſelben T XVIII a. a. 1773. in der Abhandlung, de reſolutione irrationalium per fractiones continuas, werden die Kettenbrüche als Hülfsmittel bey einer analytiſchen Aufgabe gebraucht, wo ein Kleinſtes geſucht wird. In den Actis Petrop. T. III.

P. I. a. a. 1779. p. 3 - 29. wird der Urſprung der Kettenbrüche höchſt allgemein angegeben, und mehrere analytiſche Formeln werden durch ſie entwickelt. Eben daſ. T. VI. P. II. a. a. 1782. kommen bey Gelegenheit einer Integralformel viele Entwickelungen analytiſcher Formeln durch Kettenbrüche vor. Noch iſt in den Opuſculis analyticis, T. II. eine Abhandlung: de transformatione ſerierum in fractiones continuas, worin eine ganz neue Methode gelehrt wird, irgend welche unendliche Reihe in continuirliche Brüche zu verwandeln. Dieſe Abhandlung iſt wegen der netten Darſtellung der Grundeigenſchaften dieſer Brüche beſonders zu empfehlen. Das letzte Capitel in der Introductione in Anal. Infin. enthält einen faßlichen Unterricht über die Kettenbrüche.

Von Dan. Bernoulli iſt in den Comm. novis Ac. Petr. T. XX. eine hieher gehörige Abhandlung enthalten, die nichts auszeichnendes hat.

La Grange hat in den Abhandlungen der Berliner Akademie, XXIII. u. XXIV. Bande, über die numeriſche Auflöſung der Gleichungen die Kettenbrüche zur Darſtellung der Wurzeln angewandt. Dieſe ſind im J. der Rep. VI. mit vielen Zuſätzen neu herausgekommen. Unter den Zuſätzen, die von dieſem Analyſten der franzöſiſchen Ausgabe von Eulers Algebra beygefügt ſind, befindet ſich ein Aufſatz über die continuirlichen Brüche, der elementariſch iſt, und ſich auf die numeriſche Anwendung bezieht. Dieſer Aufſatz iſt, mit einigen geringen Abänderungen, der neuen Ausgabe von Clairauts Algebra vom Jahre V oder 1797 beygefügt. Noch eine Abhandlung von jenem großen Analyſten über die Kettenbrüche iſt in (59.) angeführt.

Lambert von der Verwandlung der Brüche in den Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik, Th. II. 1. Abſchn.

Hindenburg über die continuirlichen Brüche in dem Leipziger Magazin für Naturkunde und Mathematik, Jahrgang von 1781 und 1782. Von demſelben iſt in

dem Archiv der Mathematik, 1. u. 2. Heft. ein combinatoriſches Verfahren angewieſen, die Werthe dieſer Brüche in und außer der Ordnung zu beſtimmen.

Burckhardti methodus combinatorio-analytica evolvendis fractionum continuarum valoribus maxime idonea. Lipſiae. 1794.

Die Lehre von den continuirlichen Brüchen, nebſt ihren vorzüglichſten Anwendungen, von C. J. Kausler. Stuttgard. 1803. 168 S. 8.

Kettenlinie iſt diejenige, nach welcher ſich eine gleichförmig ſchwere, vollkommen biegſame, nicht dehnbare, mathematiſche Linie, die an zwey Puncten aufgehängt iſt, krümmt. Die Gleichung für dieſe Linie muß aus der Mechanik hergeleitet werden, welches in der zweyten Abtheilung dieſes Werks geſchehen wird. Hier ſoll die Linie zum Beyſpiel dienen, wie aus einer gegebenen Eigenſchaft einer Curve die Gleichung für dieſelbe gefunden wird.

1. Es werde nun die Curve geſucht, an welcher der Bogen von einem gegebenen Puncte an der Tangente des Winkels der berührenden mit der Ordinate proportional iſt.

Die Curve (Fig. 10) ſey ADB, die Abſciſſenlinie DC, eine darauf ſenkrechte Ordinate MP, die berührende in M ſey EMm, welche mit der Ordinate MP den Winkel $EMP = \omega$ mache. Der Bogen DM, auf der einen oder andern Seite von DC ſey der Tangente von EMP proportional, ſo iſt DC die Axe der krummen Linie ADB. Der Bogen DM ſey $= s$, ſo iſt $s = a \tang \omega$, wo a eine gegebene oder angenommene Linie iſt. Dadurch iſt nämlich der Bogen s der $\tang \omega$ proportional.

2. Es ſey $DP = x$; $PM = y$. Nun iſt (berührende Linie, 13.) $\frac{PE}{PM} = \frac{\partial x}{\partial y}$, das iſt,

$\tang \omega = \frac{\partial x}{\partial y}$, und $\cot \omega = \frac{\partial y}{\partial x}$. Ferner iſt

$\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, ſ. Rectification; alſo

Digitized by Google

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \sqrt{(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2})} = \sqrt{(1 + \cot \omega^2)} = \frac{1}{\sin \omega}$$

(Goniometrie, 14.). Auch iſt $\frac{\partial s}{\partial y} = \sqrt{(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2})}$

$= \sqrt{(1 + \tang \omega^2)} = \frac{1}{\cos \omega}$. Oder es iſt $\partial x = \partial s . \sin \omega$, und $\partial y = \partial s . \cos \omega$.

3. Die gegebene Gleichung, $s = a \tang \omega$, werde differentiirt, ſo iſt $\partial s = a \partial \tang \omega = \frac{a \partial \omega}{\cos \omega^2}$ (Differentialformeln, 38. I. Th. S. 873). Dieſer Werth von ∂s in (2.) geſetzt, giebt

$$\partial x = \frac{a \sin \omega . \partial \omega}{\cos \omega^2} ; \quad \partial y = \frac{a \partial \omega}{\cos \omega}.$$

Da $\partial \omega = - \frac{\partial \cos \omega}{\sin \omega}$, und auch $\partial \omega = \frac{\partial \sin \omega}{\cos \omega}$ (a. a. O.), ſo iſt

$$\partial x = - \frac{a \partial \cos \omega}{\cos \omega^2} ; \quad \partial y = \frac{a \partial \sin \omega}{1 - \sin \omega^2}.$$

Die Integration giebt (Integralformel, 1. u. 12.)

$$x = \frac{a}{\cos \omega} + \text{Conſt.} = \frac{a}{\cos \omega} - a.$$

$$y = \tfrac{1}{2} a \log. \text{nat.} \frac{1 + \sin \omega}{1 - \sin \omega}$$

$$= a \log \tang (45° + \tfrac{1}{2} \omega),$$

(Goniometrie, 40.). Beide, x und y, ſind Null für $s = 0$, und $\omega = 0$.

4. Dieſe Formeln geben jede der beiden Coordinaten durch eine vermittelnde Größe, den Winkel ω. Um y durch x auszudrucken, muß in dem Werthe von y der $\cos \omega$ eingeführt werden, wodurch darauf derſelbe eine Function von x wird. Zuerſt iſt

$$\frac{1+\sin\omega}{1-\sin\omega} = \frac{(1+\sin\omega)^2}{\cos\omega^2}, \quad \text{daher}$$

$y = a\log\frac{1+\sin\omega}{\cos\omega}$. Ferner iſt $\sin\omega^2 = 1-\cos\omega^2$

$= 1 - \frac{a^2}{(x+a)^2} = \frac{xx+2ax}{(x+a)^2}$. Daraus wird nun

$$y = a\log.\frac{a+x+\sqrt{(xx+2ax)}}{a}.$$

5. Es ſey e die Baſis der natürlichen Logarithmen, ſo iſt

$$e^{y:a} = \frac{a+x+\sqrt{(xx+2ax)}}{a},$$

und $e^{-y:a} = \dfrac{a}{a+x+\sqrt{(xx+2ax)}}$,

$$= \frac{a+x-\sqrt{(xx+2ax)}}{a}.$$

Daraus iſt

$$e^{y:a}+e^{-y:a} = \frac{2(a+x)}{a},$$

und

$$x = \tfrac{1}{2}a(e^{y:a}+e^{-y:a}-2).$$

6. Aus der Gleichung (4.) folgt die Differentialgleichung zwiſchen ∂y und ∂x, nämlich

$$\partial y = \frac{a\partial x}{\sqrt{(xx+2ax)}},$$

nach der Formel für das Differential eines Logarithmen (Differentialformeln, 14 I.). Das Integral dieſer Formel iſt in dem Artikel, Integralformel, 56. angegeben.

7. Unmittelbar kommt man auf dieſe Differentialgleichung folgendergeſtalt. Da $s = a\tan\omega$, ſo iſt $s = \frac{a\partial x}{\partial y}$. Man differentiire dieſe Gleichung ſo,

daß ∂y conſtant ſey, und es iſt $\partial s = \frac{a \partial^2 x}{\partial y}$, oder $\partial y = \frac{a \partial^2 x}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$. Die Integration dieſer Formel iſt in Integralgleichung, 79. gewieſen.

8. Es ſey $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, ſo iſt der Halbmeſſer der Krümmung $r = -(1 + pp)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial p}$, ſ. Krümmungskreis. An der Kettenlinie iſt $p = \frac{a}{\sqrt{(xx + 2ax)}}$, oder $p = a(xx + 2ax)^{-\frac{1}{2}}$, alſo $\partial p = -a(xx + 2ax)^{-\frac{3}{2}}(x + a)\partial x$. Ferner $1 + pp = \frac{(x+a)^2}{xx + 2ax}$; und $(1 + pp)^{\frac{3}{2}} = \frac{(x+a)^3}{(xx + 2ax)^{\frac{3}{2}}}$. Dadurch iſt nun $r = \frac{(x+a)^2}{a}$.

9. An dem Scheitel iſt der Halbmeſſer der Krümmung = a.

10. Es werde $x = a$ genommen, ſo iſt $y = a \log \text{nat.} (2 + \sqrt{3}) = a \log. \text{nat.} (3,73205 \ldots) = 1,316957\,a$. Ein Kreis mit dem Halbmeſſer a durch den Scheitel der Kettenlinie, aus einem Mittelpuncte auf der Axe, beſchrieben, fällt innerhalb jener Curve. Der Unterſchied der beiderſeitigen Ordinaten, für dieſelbe Abſciſſe = a, iſt 0,316957 a.

11. Für $x = a$ iſt $\frac{1}{\text{coſ}\,\omega} - 1 = 1$, alſo $\text{coſ}\,\omega = \frac{1}{2}$, und $\omega = 60°$.

12. Wenn $x = y$ ſeyn ſoll, ſo iſt $\frac{1}{\cos\omega} - 1$ $= \log.\,nat.\,tang.\,(45^\circ + \frac{1}{2}\omega)$. Hieraus läßt ſich ω nur durch Verſuche finden. Die Neperiſchen oder Urſiniſchen Tafeln leiſten nebſt einer Tafel der Secanten hier Dienſte. Wenn in den letztern die Sinus ſo wie ihre Logarithmen durch 100 Mill. dividirt werden, und der Quotient für die Sinus $= z$ heißt, ſo iſt $\log.Nep.\,z = \log.\,nat.\,\frac{1}{z}$. Nun iſt $\log.\,nat.\,tang\,(45^\circ + \frac{1}{2}\omega) =$ $\log.\,nat.\,\frac{1}{tang(45^\circ - \frac{1}{2}\omega)}$, folglich iſt $\log.Nep.\,tang(45^\circ - \frac{1}{2}\omega) = \sec.\,\omega - 1$. Nach einigen Verſuchen findet man $\omega = 67^\circ\,32'$ nahe. Es iſt nämlich

$\sec 67^\circ 32' - 1 = 1{,}61680$

$\log.Brigg.\,tang.\,78^\circ 46' = 0{,}70200$

$\log.\,nat.\,tang.\,78^\circ 46' = 1{,}61641$.

Der Werth von x oder y iſt, wenn beide gleich groß ſind, $= 1{,}6168$ a beynahe.

13. Wenn man mit einem Halbmeſſer $= 1{,}6168$ a einen Halbkreis beſchreibt, ſo ſchließt dieſer die Kettenlinie, deren Grundlinie oder Doppelordinate mit dem Durchmeſſer des Halbkreiſes übereinkommt, in ſich ein bey einem gemeinſchaftlichen Scheitel. Die Krümmung an der Kettenlinie an dem Scheitel iſt größer als die am Kreiſe in dem Verhältniße 16168 : 10000.

Die Bemerkungen (10 — 13.) ſind für die Baukunſt in der Lehre von den Gewölben nützlich.

Kettenregel iſt in der Arithmetik die Vorſchrift, wie die Vergleichung zweyer Größen von verſchiedener Einheit durch Mittelgrößen angeſtellt wird, es mögen dieſe und jene gleichartig ſeyn, oder ungleichartig, in welchem Falle ſie als gleichgeltende oder gleichgültige (wie Waare und Geld) mit einander vertauſcht werden.

Kettenſatz iſt die Zuſammenſtellung der verbundenen Größen nach dieſer Regel.

Die Benennung rührt von der Art her, wie die Größen zuſammen geſtellt werden. Man vertauſcht nach derſelben eine Gattung von Größen folgeweiſe gegen eine andere, bis man auf diejenige kommt, nach welcher gefragt wird. Man nennt ſie auch die Regel Multiplex oder Conjointe. Sie wird im gemeinen Leben viel gebraucht, bey der Vergleichung von Maaßen, Gewichten, Geldſorten, bey der Vertauſchung von Waaren und Geld, wohin auch Gold und Silber als Waaren gehören. Die kaufmänniſchen Rechnungen werden nach dieſer Regel geführt, die durch die Anſetzung der Größen viele Leichtigkeit in der Ausführung gewährt.

Ein paar Beyſpiele werden das Verfahren gleich zeigen, und den allgemeinen Ausdruck der Regel begreiflich machen.

I. Wie viel rheinländiſche Fuß ſind 100 engliſche Fuß, wenn 81 engliſche Fuß gleich ſind 76 Pariſer, und 29 Pariſer gleich 30 rheinländiſchen?

x rheinl. F.	=	100 engl. F.
81 engl. F.	=	76 P F.
29 P. F.	=	30 rh. F.

Man dividire das Product der Zahlen rechter Hand durch das Product der Zahlen linker Hand: der Quotient iſt die geſuchte Zahl. Es werden nämlich zuerſt die 100 engliſche Fuß nach dem Verhältniſſe 81 : 76 in Pariſer Fuß verwandelt, und dieſe nach dem Verhältniſſe 29:30 in rheinländiſche. Dieſe beiden Operationen werden durch das angegebene Verfahren zuſammengezogen. Wenn die beiden Zahlencolumnen gemeinſchaftliche Factoren enthalten, ſo werden dieſe durch die Diviſion gegen einander aufgehoben. Das Facit iſt $97\frac{49}{781}$ rheinl. Fuß.

II. Eine engliſche Krone hält 573 As fein in Troysgewicht; 4864 As Troys machen eine cölniſche Mark; eine Mark fein Silber iſt werth 20 Gulden Conventionsgeld, ein Gulden hält 16 ggr.; wie viel beträgt eine Krone in Groſchen Conventionsgeld?

1 ggr.	=	1 engl. Krone
1 engl. Krone	=	573 As fein Troys
4864 As (fein)	=	1 Mark cöln. (fein)
1 Mark cöln. f.	=	20 Gulden C. G.
1 Gulden	=	16 ggr.

Nach demſelben Verfahren wie vorher iſt eine Krone gleich $573 \times 1 \times 20 \times 16$ dividirt durch $4864 \times 1 \times 1$, das iſt, $\frac{2865}{76}$ ggr. oder 37 ggr. 8 ₰.

Es ſeyn A, B, C, D, E, etc. Einheiten von verſchiedener Größe und Beſchaffenheit, als Maaßen, Räume, Gewichte, Geldſorten, Waaren, u. dgl. Ferner ſey der Größe oder dem Werthe nach

$$a. A = b. B$$
$$c. B = d. C$$
$$e. C = f. D$$
$$g. D = h. E,$$

ſo iſt $aceg. A = bdfh. E$.

Denn es wird hier nach der Reihe B mit C, C mit D, D mit E vertauſcht. Erſtlich iſt $B = \frac{d}{c} C$, alſo $a. A = \frac{bd}{c} C$, und $ac. A = bd. C$. Zweytens iſt $C = \frac{f}{e} D$, alſo $ac. A = \frac{bdf}{e} D$, und $ace. A = bdf. D$. Auf gleiche Art iſt $aceg. A = bdfh. E$, und ſo ferner, ſo viele Mittelgrößen zwiſchen der erſten und letzten auch ſeyn mögen.

Nun ſey eine Anzahl von der Gattung A, nämlich m. A, in eine gleichgeltende Anzahl von der Gattung E zu verwandeln, ſo iſt $m. A = \frac{bdfh}{aceg} . m. E$.

Man ſetze die geſuchte Anzahl der Einheiten E = x, ſo iſt

$$\begin{aligned} x.\ E &= m.\ A \\ a.\ A &= b.\ B \\ c.\ B &= d.\ C \\ e.\ C &= f.\ D \\ g.\ D &= h.\ E, \end{aligned}$$

und x iſt gleich dem Quotienten von dem Producte der Zahlen m, b, d, f, h dividirt durch das Product der Zahlen a, c, e, g.

Man fängt alſo an mit dem Frageſatze, wie viele Einheiten E betragen die gegebenen m Einheiten A? und ſetzt alsdann die Vergleichungsſätze für die Einheiten A und B, B und C, u. ſ. f. hin, bis man an die Gattung von Einheiten kommt, deren Anzahl geſucht wird. — Auf dieſe Art verfährt man bey irgend einer Anzahl von Vergleichungsſätzen.

Oft wird nur eine Vergleichung zwiſchen zweyerley Einheiten geſucht. Alsdann fällt der Frageſatz weg. Man fängt mit dem Vergleichungsſatze für die eine Gattung von Einheiten an, und fügt die Vergleichungsſätze nach der Reihe hinzu, bis zu demjenigen für die andere Gattung, die mit jener erſtern verglichen werden ſoll. Z. B.

1 Mark Silber fein	=	21 Gulden Preuß.
3 Gulden	=	2 Thlr.
$5\frac{1}{2}$ Rthlr.	=	1 Fr. d'or.
35 Fr. d'or	=	1 Mark Gold zu $21\frac{2}{3}$ Kar.
24 M. G. ($21\frac{2}{3}$ K.)	=	$21\frac{2}{3}$ M. G. (24 K.)
198 Mark Silber fein	=	13 Mark Gold fein.

nachdem in den Producten auf beiden Seiten die gemeinſchaftlichen Factoren weggelaſſen ſind. Oder es ſind 100 Mark Gold fein = 1523 Mark Silber fein, und der Werth des Goldes zum Silber $15\frac{3}{13} : 1$.

Zur Übung noch ein paar Beyſpiele.

Es werde das Gewicht von 1 Pariſer Duod. Cubikzoll Waſſer in Pariſer Gewicht aus dem Gewichte eines rheinländiſchen Decimalcubikzolles nach cölniſchem Gewichte geſucht.

x Grains Pariſ. Gew.	=	1 Pariſ. Duod. Cubzoll Waſſer
29^3 Par. Cubz.	=	30^3 Rheinl. Cubz. Duod.
1728 Rh. Duod. Cubz.	=	1000 Rh. Dec. Cubz.
1 Rh. Dec. Cubz. Waſſer	=	502, 7 Gran Cöln.
480 Gr. Cöln.	=	1 Unze Cöln.
20 Unzen Cöln.	=	19 Unzen Troys
1 Unze Troys	=	640 As Troys
637 As Troys	=	1 Unze Pariſ. Gew.
1 Unze P. G.	=	576 Grains.
x	=	369 Grains.

Hier ſind die Logarithmen bequem zu gebrauchen.

Wollte man unmittelbar das Gewicht eines ehemaligen Pariſer Cubikfußes Waſſer in Pfunden wiſſen, ſo iſt der Anſatz folgender:

x Pf. Par. Gew.	=	1 Cubf. Waſſer Par.
1 Cubf.	=	1000 Dec. Cubz.
29^3 Cubz. Par.	=	30^3 Cubz. Rheinl.
1 Dec. Cubz. Rh.	=	502, 7 Gr. Cöln.
480 Gr. Cöln.	=	1 Unze Cöln.
20 Unz. Cöln.	=	19 Unz. Troys
637 Unz. Troys	=	640 Unz. Par.
16 Unzen	=	1 Pf. Par.
x	=	69, 1642 Pfund.

Die Beſtimmung des Gewichts eines rheinländiſchen Decimalcubikzolles iſt aus Karſtens Anleitung zur Kenntniß der Natur, S. 47. genommen. Das Waſſer deſtil-

lirtes, die Temperatur zwiſchen 60] und 70 Gr. Fahrenheit.

Ein Beyſpiel aus der ſpaniſchen Münzrechnung mag noch Platz finden.

32 Reales de Bellon	=	17 Reales de Plata
1 Real d. Pl.	=	34 Maravedi d. Pl.
375 Mar. d. Pl.	=	1 Ducado de Cambio
1 Duc. d. C.	=	98 Grotvläm. Banco in Amſterdam.
12 Grvl.	=	1 fl. vl.
1 flvl.	=	6 Stüver Banco
100 Stvr. Bco	=	104 Stvr. Cour.
37 Stvr. Cour.	=	24 ggl. Sächſ.
115625 Reales de Bellon	=	184093 ggl. Sächſ.

Um das Verhältniß in kleinern Zahlen mit der geringſten Abweichung auszudrucken, verwandle man den Bruch $\frac{184093}{115625}$ in einen Kettenbruch, welcher iſt

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}}}$$

Dadurch wird der genäherte Werth $= \frac{121}{76}$, ſo daß 76 Realen gleich ſind 121 Groſchen Sächſiſch oder 5 Rthlr. 1 ggl.

Die Angaben ſind aus Reimers Rechenkunſt (Hamburg, 1776.) S. 270, 234. genommen.

Man kann die Kettenregel auch als eine Zuſammenſetzung von Verhältniſſen anſehen. Nur muß man, da die Einheiten, A, B, C, D, etc. ungleichartige Größen

ſeyn können, bloß auf den Zahlenwerth ſehen, den ſie bey der Vertauſchung haben. Es ſey

$$A:B = b:a$$
$$B:C = d:c$$
$$C:D = f:e$$
$$D:E = h:g,$$
ſo iſt $A:E = bdfh:aceg$,

welches mit dem oben gefundenen Vergleichungsſatze, $aceg.\ A = bdfh.\ E$, übereinſtimmt.

Käſtner trägt die Kettenregel nach dieſer Methode vor, in den Anfangsgründen der Arithmetik § 56, und in der Fortſetzung der Rechenkunſt S. 27. ff. Der Columnenanſatz mit Gleichheitsſätzen iſt viel bequemer.

Es giebt aber andere Aufgaben, wo der Kettenſatz nicht ſo bequem iſt, als die Zuſammenſtellung von Proportionen, nämlich wenn die Größen A, B, C, D, etc. alle gleichartig ſind, z. B. wenn man die Intereſſen verſchiedener Capitalien bey verſchiedenen Zeiten, Procenten und Münzſorten vergleichen wollte, oder die Zeiten, worin verſchiedene Arbeiter gewiſſe Arbeiten von verſchiedener Beſchaffenheit zu Stande bringen, als Gräben von unterſchiedener Länge, Breite und Tiefe. Die Kettenregel dient eigentlich da, wo die Einheiten der Größen verändert werden.

Die Kettenregel finde ich ſchon in Simon Jacob von Coburgk Rechenbuch, Frankf. a. M. 1557. Er giebt S. 66. ein Beyſpiel, um zu zeigen, wie man viele Regeln und Satzungen der de Tri in eine einige Satzung mit geringer Mühe bringen und reduciren könne. Die Vergleichungsſätze ſetzt er zuerſt hin, neben ihnen rechter Hand die Größe, von welcher etwas gefragt wird, in dem Beyſpiele 128 Pfund, wovon der Preis geſucht wird. Er ſagt, es könne das Verfahren gründlich durch compoſitionem proportionum erwieſen werden, welches er aber

der Kürze wegen unterlaſſe. Die Benennung Kettenregel, gebraucht dieſer Rechenmeiſter nicht.

Noch früher kommt in Peter Apianus Underweyſung aller Kaufmanns-Rechnung, zweyte Aufl. 1543, bey einer Wechſelrechnung der Kettenſatz vor, in der Form, wie er oben angegeben iſt, nur daß der hier erſte Vergleichungsſatz bey Apianus der letzte iſt. Die geſuchte Größe, welche er durch den Buchſtab o bezeichnet, macht unten rechter Hand den Beſchluß.

Käſtner ſagt a. a. O. S. 30. er habe nicht ſo genau unterſucht, wer den Kaufleuten ein Verfahren bekannt gemacht habe, das die Mathematiker vorlängſt brauchten. Wenn er ſich recht erinnere, werde in dieſer Bedeutung Graumann für den Erfinder der Kettenregel angegeben. Was dieſer in der Vorrede zu ſeinem Europäiſchen Arbitrage-Tractat von ſeiner Erfindung oder von ſeinen Verdienſten um die Anwendung der Kettenrechnung ſagt, möchte auf Unkunde älterer Methoden beruhen.

Kleinſtes, ſ. Größtes und Kleinſtes.

Knoten einer Curve iſt ein Punct, worin ſich zwey zuſammenhängende Zweige derſelben ſchneiden, ſo daß dadurch eine blattähnliche Figur, oder Ovale entſteht. Es begegnen ſich hier zwey Reihen von Ordinaten, die durch eine dritte Reihe verbunden ſind, in einer gemeinſchaftlichen. Dergleichen Punct iſt an der Curve, Tab. III. Fig. 37. Tab. V. Fig. 81. Fig. 79. In dieſen Punct kann zugleich ein Biegungspunct (Inflexionspunct) fallen aber erſt bey Linien vom vierten Grade, auch ein Schlangenpunct, oder auf dem einen Zweige ein Biegungspunct, auf dem andern ein Schlangenpunct. Cramer Analyse des lignes courbes. Ch. XIII.

Konoid, kegelartiger Körper (Conoides) iſt ein Körper, der durch die Umdrehung einer krummen Linie um eine Axe entſteht, wenn die Linie dieſe Axe ſchneidet, und ihre auf die Axe ſenkrechten Ordinaten fortweg zunehmen. Dieſe Beſtimmungen ſind nöthig, um die Ähnlichkeit

des Körpers mit einem geradſeitigen Kegel zu erhalten. Wenn die krumme Linie die Axe der Drehung nirgends ſchneidet, ihre Ordinaten aber beſtändig entweder zunehmen oder abnehmen, ſo entſteht ein cylinder- oder walzenförmiger Körper, (Cylindroides), z. B. wenn eine Hyperbel ſich um die conjugirte Axe dreht. Iſt die Linie in ſich ſelbſt zurücklaufend, wie eine Ellipſe, ſo entſteht ein kugelartiger Körper (Sphaeroides). Dieſe drey Formen von Körpern heißen: durch Umbrehung entſtandene runde Körper, (Solides de revolution). Die Schnitte, ſenkrecht auf die Axe der Umdrehung, ſind alle Kreiſe. Wenn die Schnitte durch die Axe eine andere runde, in ſich zurücklaufende Figur haben, ſo ſind es runde Körper überhaupt.

1. Die Konoiden, welche am meiſten verdienen bemerkt zu werden, ſind das paraboliſche und das hyperboliſche, deren jenes durch eine Parabel, dieſes durch eine Hyperbel bey der Umdrehung um die Axe dieſer Linien beſchrieben wird. Das hyperboliſche beſteht aus zwey verbundenen kegelartigen Körpern, wie die Hyperbel aus zwey entgegengeſetzten gleichen Theilen. Die Axe der Hyperbel iſt hier die ganze unbeſtimmte gerade durch den Mittelpunct und die beiden Scheitel.

2. Archimedes hat von den Konoiden (1.) und Sphäroiden ein Buch geſchrieben, worin er mit großem Scharfſinn die Figuren ihrer verſchiedenen Schnitte und den Inhalt der körperlichen Abſchnitte beſtimmt, der Schnitt mag ſenkrecht oder ſchief gegen die Axe der Körper gelegt ſeyn.

3. Aufg. Es ſey B A B (Fig. 11.) eine Parabel, die durch die Drehung um ihre Axe ein paraboliſches Konoid beſchreibt. Dieſes werde durch eine Ebene geſchnitten, die nicht durch Axe geht, auch nicht ſenkrecht darauf iſt: es ſoll die Geſtalt des Durchſchnittes der Ebene mit der Oberfläche des Konoids beſtimmt werden.

Man ſetze durch die Axe der Parabel eine Ebene ſenkrecht auf die ſchneidende Ebene. Der Durchſchnitt

jener Ebene mit der Oberfläche des Konoids iſt die angenommene beſchreibende Parabel, und werde durch die Parabel B A B der Zeichnung dargeſtellt. Der Durchſchnitt beider Ebenen iſt die gerade D E. Die Figur D M E N D ſtelle den Durchſchnitt der ſchneidenden Ebene mit der konoidaliſchen Oberfläche perſpectiviſch dar. Man ziehe durch irgend einen Punct P der Linie D E die ſenkrechte Q R auf die Axe, welche die Parabel in Q und R, und die Axe in S treffe. Durch dieſe Q R ſetze man eine Ebene ſenkrecht auf die Axe. Der Durchſchnitt dieſer Ebene mit der konoidaliſchen Oberfläche iſt ein Kreis, da bey der Umdrehung der Parabel um A C die Ordinate Q S oder R S in dieſer Ebene einen Kreis beſchreibt. Die Durchſchnittslinie M P N beider ſchneidenden Ebenen iſt ſenkrecht auf die Ebene B A B (Ebene, 22.), alſo iſt M P N ſenkrecht auf Q R, und es iſt, zufolge der Eigenſchaft des Kreiſes, $MP^2 = MS^2 - PS^2 = QS^2 - PS^2$. Hier iſt Q S durch A S, und P S durch D P gegeben. Man hat alſo beide durch D P und die gegebenen Größen auszudrucken, um den Werth von PM^2 in Beziehung auf D P zu erhalten. Man ziehe D G ſenkrecht auf A C, ſo ſind außer dem Parameter der Parabel die Linien A G und D G gegeben, nebſt dem Winkel D F A, welchen die Axe A C mit der ſchneidenden Ebene D M E N D macht. Es ſey der Parameter der Parabel $= a$, $AG = c$; $DG = d$; der W. $DFA = \phi$; $DP = x$; $PM = y$, wo P M als Ordinate des Schnittes D M E N D zu der Abſciſſe D P betrachtet wird. Es iſt G S gleich der ſenkrechten P T von P auf D G in der Ebene der Parabel, alſo $GS = DP \times \sin PDG = x \cos \phi$, und $AS = c + x \cos \phi$. Dadurch iſt $QS^2 = ac + ax \cos \phi$, weil Q S eine Ordinate an der Parabel iſt. Ferner iſt $PS = GT = DT - DG = x \sin \phi - d$. Durch dieſe Werthe von Q S und P S erhalten wir die Gleichung,

$$y^2 = ac + ax \cos \phi - (x \sin \phi - d)^2.$$ Da D G eine Ordinate an der Parabel iſt, ſo iſt $d^2 = ac$, und daher

$$y^2 = (a\cos\phi + 2d\sin\phi)\,x - \sin\phi^2\,x^2.$$

Dieſes iſt überhaupt eine Gleichung für eine Ellipſe, in welcher die Abſciſſen auf einem Durchmeſſer von dem einen Scheitel an genommen werden, und die Ordinaten dem andern Durchmeſſer parallel ſind. (Ellipſe, 16). Da die Coordinaten ſenkrecht auf einander ſind, ſo iſt der Durchmeſſer für die Abſciſſen eine der beiden Axen der Ellipſen, und zwar die größere, wegen des Coefficienten von x^2, der kleiner als die Einheit iſt.

4. Es ſey die halbe große Axe $= f$, die halbe kleine $= g$, ſo iſt (Ellipſe, 7.)

$$y^2 = \frac{2gg}{f}\,x - \frac{gg}{ff}\,x^2.$$

Die Vergleichung der Coefficienten giebt

$$\text{I. } a\cos\phi + 2d\sin\phi = \frac{2gg}{f},$$

$$\text{II. } \sin\phi^2 = \frac{gg}{ff}, \text{ oder } g = f\sin\phi.$$

Daher wird die erſtere Gleichung

$$a\cos\phi + 2d\sin\phi = 2g\sin\phi,$$

woraus $2g = a\cot\phi + 2d$, alſo

$$2f = \frac{a\cot\phi + 2d}{\sin\phi} = \frac{a\cos\phi + 2d\sin\phi}{\sin\phi^2}.$$

5. Man ziehe EH ſenkrecht auf AC, ſo iſt $DG + EH = DE \times \sin\phi = 2f\sin\phi$, alſo $DG + EH = 2g$, der kleinen Axe der Ellipſe.

6. In dieſer Auflöſung iſt die Durchſchnittslinie DE aus der Gleichung für den elliptiſchen Schnitt hergeleitet. Sie kann aber auch unmittelbar aus den gegebenen AF, AG und der dadurch in der Parabel beſtimmten DF hergeleitet werden. Es iſt nämlich, wenn DG, EH als Ordinaten an der geraden DFE betrachtet werden,

$$DG : EH = GF : FH.$$

Eben dieſe, als Ordinaten an der Parabel, geben die Proportion,

$$DG^2 : EH^2 = AG : AH.$$

Aus beiden Proportionen folgt

$$AG : AH = GF^2 : FH^2.$$

Hieraus iſt

$$AG : GH = GF^2 : FH^2 - GF^2$$
$$= GF^2 : (FH + GF)(FH - GF).$$

Folglich iſt $AG (FH - GF) = GF^2$,
und daraus $AG \times GH = GF^2 + 2AG \times GF = (AF + AG) GF$. Da $GH : GF = DE : DF$ iſt, ſo iſt

$$AG \times DE = (AF + AG) DF,$$

$$\text{und } DE = \frac{AF + AG}{AG} \times DF.$$

Die Linie AF bleibt nicht willkührlich, wenn DF und AG angenommen ſind, ſo wie auch AG aus AF und DF beſtimmt wird.

Aus dieſem Werthe von DE wird durch die Einführung des Winkels $AFD = \varphi$ der vorher gefundene Ausdruck erhalten. Es iſt $AF = c + d \cot \varphi$ und $DF = \frac{d}{\sin \varphi}$.

7. Um DE durch Größen auszudrucken, die von einander unabhängig ſind, verfahre man folgendergeſtalt. Es werden der Parameter a, der Punct F in dem Abſtande vom Scheitel $AF = h$, und der Winkel $AFD = \varphi$ gegeben. Nun iſt

$$AF = AG + GF = \frac{DG^2}{a} + DF . \cos \varphi$$
$$= \frac{DF^2 . \sin \varphi^2}{a} + DF . \cos \varphi.$$

Dieſes iſt eine quadratiſche Gleichung für DF, wodurch zugleich der Werth von FE gegeben wird. Es iſt

$$DF^2 + \frac{a \cos\phi}{\sin\phi^2} DF = \frac{a h}{\sin\phi^2}.$$

Die poſitive Wurzel dieſer Gleichung iſt

$$DF = \sqrt{\left(\frac{a^2 \cos\phi^2}{4 \sin\phi^4} + \frac{a h}{\sin\phi^2}\right)} - \frac{a \cos\phi}{2 \sin\phi^2}.$$

Die negative Wurzel entgegengeſetzt genommen iſt

$$FE = \sqrt{\left(\frac{a^2 \cos\phi^2}{4 \sin\phi^4} + \frac{a h}{\sin\phi^2}\right)} + \frac{a \cos\phi}{2 \sin\phi^2}.$$

Alſo iſt

$$DE = \frac{\sqrt{(a^2 \cos\phi^2 + 4 a h \sin\phi^2)}}{\sin\phi^2}.$$

Dieſer Ausdruck verwandelt ſich in den zuerſt gefundenen, wenn man für h ſeinen Werth ſetzt, nämlich $c + d \cot\phi$. Es iſt $a h = a c + a d \cot\phi = d d + a d \cot\phi. = d d + \frac{a d \cos\phi}{\sin\phi}$. Dadurch wird die Größe unter dem Wurzelzeichen $= a^2 \cos\phi^2 + 4 d d \sin\phi^2 + 4 a d \sin\phi. \cos\phi = (a \cos\phi + 2 d \sin\phi)^2$, und daher $DE = \frac{a \cos\phi + 2 d \sin\phi}{\sin\phi^2}$.

8. Aufg. Das Konoid ſey ein hyperboliſches, es ſoll die Geſtalt des Durchſchnittes einer ſchneidenden Ebene beſtimmt werden, die nicht durch die Axe geht, auch nicht ſenkrecht auf dieſelbe iſt.

Es mag um eine weitſchichtige Figur zu erſparen, die krumme Linie in Fig. 11. eine Hyperbel vorſtellen, um deren Axe AC ſie ein Konoid beſchreibt. Der Durchſchnitt der ſchneidenden Ebene mit der Oberfläche des hyperboliſchen Konoids ſey die Figur DMEND. Auch

ſey QMRNQ der Durchſchnitt einer auf die Axe ſenkrechten Ebene. Eben ſo wie bey dem paraboliſchen Konoid iſt $MP^2 = QS^2 - PS^2$, und, mit Beybehaltung der vorher gebrauchten Benennungen, $AS = c + x\cos\varphi$; $PS = x\sin\varphi - d$. Die halbe Hauptaxe der Hyperbel ſey $= a$, die halbe zugeordnete $= b$, die Abſciſſe auf der Axe vom Scheitel an genommen, ſey $= t$; die normale Ordinate $= u$, ſo iſt

$u^2 = \frac{2bb}{a} t + \frac{bb}{aa} t^2$ (Hyperbel, 3.). Daher iſt erſtlich für den Punct D,

$$d^2 = \frac{2bb}{a} c + \frac{bb}{aa} c^2;$$

zweytens für den Punct Q,

$$QS^2 = \frac{2bb}{a} AS + \frac{bb}{aa} AS^2.$$

Daher iſt MP^2 oder

$$y^2 = \frac{2bb}{a}(c + x\cos\varphi) + \frac{bb}{aa}(c + x\cos\varphi)^2 - (x\sin\varphi - d)^2,$$

das iſt,

$$y^2 = \left(\frac{2bb}{a}\cos\varphi + \frac{2bb}{aa} c\cos\varphi + 2d\sin\varphi\right)x + \left(\frac{bb}{aa}\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2\right)x^2.$$

Dieſes iſt eine Gleichung für einen der drey Kegelſchnitte.

9. Iſt $\sin\varphi^2$ größer als $\frac{bb}{aa}\cos\varphi^2$, das iſt $\tang\varphi$ größer als $\frac{b}{a}$, ſo iſt der Schnitt eine Ellipſe;

ſind beide einander gleich, oder iſt tang $\varphi = \frac{b}{a}$, ſo iſt der Schnitt eine Parabel; iſt tang φ kleiner als $\frac{b}{a}$, ſo iſt der Schnitt eine Hyperbel, deren entgegengeſetzter Theil in dem zugeordneten Konoid liegt.

10. Er iſt $\frac{b}{a}$ die Tangente des Winkels, welchen die Aſymptoten mit der Axe machen. (Hyperbel, 6.). Wenn die ſchneidende Ebene parallel mit einer der Aſymptoten der Hyperbel BAB, oder, wenn der Winkel AFD dem Winkel derſelben mit der Axe gleich iſt, ſo kann die ſchneidende Ebene den zugehörigen Schenkel AB nicht treffen, daher ſich die Ellipſe, welche der Schnitt für einen größern Winkel der Ebene mit AC iſt, in eine Parabel verwandelt. Wird der Winkel AFD kleiner genommen als Ang. tang $\frac{b}{a}$, ſo trifft DE einen Schenkel der entgegengeſetzten Hyperbel.

11. Der Schnitt ſey eine Ellipſe, für den Fall, da tang $\varphi > \frac{b}{a}$ iſt; die beiden halben Axen ſeyn wie vorher, f und g, ſo iſt

$$y^2 = \frac{2gg}{f} x - \frac{gg}{ff} x^2.$$

Alſo iſt $\sin\varphi^2 - \frac{bb}{aa} \cos\varphi^2 = \frac{gg}{ff}$, und

$$\frac{2bb}{a}\cos\varphi + \frac{2bb}{aa} c.\cos\varphi + 2d\sin\varphi = \frac{2gg}{f}.$$

Daraus iſt

$$f = \frac{b.b(a+c)\cos\varphi + aad\sin\varphi}{aa\sin\varphi^2 - bb\cos\varphi^2}$$

Es ſey $\frac{b}{a} = \text{tang } \alpha$, ſo iſt

$$f = \frac{(a + c)\,\text{tang } \alpha^2 + d\,\text{tang } \varphi}{(\text{tang } \varphi^2 - \text{tang } \alpha^2)\cos\varphi};$$

$$g = f \cos\varphi \sqrt{(\text{tang } \varphi^2 - \text{tang } \alpha^2)}.$$

Auf gleiche Art findet man die beiden Axen des hyperboliſchen Schnittes.

Archimedes betrachtet bloß den Schnitt, wenn die ſchneidende Ebene die Aſymptoten (omnia latera coni, comprehendentis conoidem) trifft. A. a. O. Satz. 14.

Von der Meſſung des körperlichen Inhalts eines konoidaliſchen Abſchnittes in dem Artikel, Cubirung; von der Meſſung der Oberfläche in dem Artikel, Complanation.

Von den Schnitten der Sphäroiden in dem Artikel, der von ihnen handelt.

Körper, geometriſcher, iſt das begränzte körperlich Ausgedehnte, das iſt, was nach drey auf einander ſenkrechten Richtungen ausgedehnt iſt, oder Theile neben Theilen ſtetig liegen hat. Euklides ſagt, Körper iſt, was Länge, Breite und Tiefe hat. Das Wort, welches er gebraucht, iſt *το στερεον*, das Dichte, solidum.

Die Art der Begränzung, oder die Form eines Körpers, macht denſelben zu einem Gegenſtande der Geometrie.

Ein Körper kann von ebenen Flächen allein, von ebenen und krummen zugleich, oder von krummen allein begränzt werden.

Unter denen, die von ebenen Flächen allein begränzt werden, ſind die merkwürdigſten: die Prismen, die Pyramiden, die vollkommen regulären, und die bedingt regulären Körper, oder die nach einem gewiſſen Geſetz irregulären.

Zu den Körpern, die von einer krummen Fläche allein eingeſchloſſen ſind, gehören die Kugel, die elliptiſchen Sphäroiden, die runden Körper, die durch Umdrehung einer geſchloßnen krummlinichten Figur um eine Axe entſtehen, und diejenigen, die durch die ſich parallel bleibende Bewegung einer nach einem Geſetze veränderlichen geſchloßnen Figur beſchrieben werden, wenn dieſe an den entgegengeſetzten Endpuncten der Axe oder Richtungslinie verſchwinden.

Körper, die von ebenen und krummen Flächen begränzt werden, ſind Cylinder und Kegel, Cylindroiden und Konoiden, und diejenigen, welche durch die ſich parallel bleibende Bewegung einer, nach einem gewiſſen Geſetze veränderlichen, geſchloßnen Figur beſchrieben werden, wenn dieſe an dem einen Ende der Richtungslinie nicht verſchwindet; auch die Abſchnitte der Körper der zweyten Gattung, die durch ſchneidende Ebenen gemacht werden.

Der geometriſche Körper iſt wegen der Stetigkeit ſeiner Theile ins Unendliche theilbar. Weil er bloß eine abſtracte Form des phyſiſchen Körpers iſt, ſo kann man einen Körper ſich in dem andern vorſtellen, ohne daß er darum als Theil deſſelben betrachtet wird.

Körperberechnung iſt die arithmetiſche Vergleichung eines Körpers mit einem andern, der als Einheit betrachtet wird. Dieſe Einheit iſt häufig ein Würfel, deſſen Seite die Einheit für die Linien iſt. Man kann aber auch mit Vortheil einen Körper, der mit dem vorgegebenen von einer Art iſt, zur Einheit nehmen, z. B. einen Cylinder bey der Berechnung eines Cylinders, wie dergleichen bey der Ausmeſſung der Fäſſer geſchieht, mit Rückſicht auf die Ausbauchung.

In der Geometrie nach der Methode der Alten kommt keine Berechnung der Körper vor, ſo wie eine geometriſche Berechnung überhaupt darin nicht gebraucht wird. (Geometrie in Th. II. S. 312.) Jede Vergleichung geſchieht durch zuſammengeſetzte Verhältniſſe, oder

durch beſtimmte Zahlen. Z. B. Prismen, oder Cylinder, ſtehen in dem zuſammengeſetzten Verhältniſſe der Grundflächen und Höhen. Eine Kugel und ein Cylinder, deſſen Durchmeſſer und Höhe dem Durchmeſſer der Kugel gleich ſind, verhalten ſich wie 2 : 3. Ein paraboliſches Konoid verhält ſich zu einem geradlinichten Kegel von gleicher Grundfläche und Höhe wie 3 : 2.

Jeder Körper wird durch das Product dreyer Linien, als a b c, ausgedruckt. Dieſes iſt eigentlich der Ausdruck für ein Parallelepipedon mit rechten Winkeln, deſſen Seiten a, b, c ſind. Vergleicht man dieſes mit einem Würfel, deſſen Seite d iſt, ſo verhält ſich der Würfel zu jenem Körper zuſammengeſetzt, wie die Grundflächen und die Höhen. Das Verhältniß der Grundflächen, die Rechtecke ſind, iſt das zuſammengeſetzte der Seitenlinien. Alſo wird das Verhältniß der beiden Körper zuſammengeſetzt aus den Verhältniſſen, d : a; d : b; d : c. Betrachten wir nun die Linien a, b, c, d, als Zahlen für eine gewiſſe Einheit, ſie mögen dabey rationale oder irrationale ſeyn, ſo iſt das zuſammengeſetzte Verhältniß des Würfels C und das Prisma P = d^3 : a b c. Nimmt man für d die Einheit, und C als Einheit der körperlichen Räume, ſo iſt das Prisma P = a b c. Jeder Körper kann entweder durch eine geometriſche Conſtruction in ein ſenkrechtes Prisma, wie P iſt, verwandelt werden, oder es läßt ſich durch Rechnung ein Prisma angeben, das von demſelben weniger verſchieden iſt, als irgend eine angebbare Größe beträgt, und daher iſt die Gränze, welcher die Rechnung ſich ohne Ende nähert, ebenfalls einem Prisma gleich.

Iſt der Körper irgend ein Prisma, ſo läßt ſich die Grundfläche in ein Rechteck verwandeln, welches durch a b ausgedrückt werde. Die Seitenlinie ſey c, und unter dem Winkel α gegen die Grundfläche geneigt, ſo iſt die Höhe des Prisma = c sin α, und der Inhalt = a b c sin α, wo sin α eine bloße Zahl für den Sinustotus als Einheit iſt.

Ein Cylinder habe den Halbmeſſer a, Seitenlinie oder Axe b, und der Neigungswinkel der Axe ſey α, ſo iſt der Inhalt $= \pi a a b \sin \alpha$. Es bedeutet π die Irrationalzahl für den halben Kreisumfang in Beziehung auf den Halbmeſſer als Einheit.

Die Grundfläche einer Pyramide werde in ein Rechteck verwandelt, deſſen Seiten a, b ſind. Eine der Seitenlinien ſey $= c$, ihr Neigungswinkel $= \alpha$, ſo iſt der Inhalt $= \frac{1}{3} a b c. \sin \alpha$.

Die Grundfläche eines Kegels habe den Halbmeſſer a, die Axe ſey $= c$, ihr Neigungswinkel $= \alpha$, ſo iſt des Kegels Inhalt $= \frac{1}{3} \pi a a c. \sin \alpha$.

Das Differential eines körperlichen Abſchnittes hat daher eben die Form wie der Ausdruck für einen endlichen Körper, ſ. Cubirung.

Ausdrücke wie $\frac{abcd}{e}$, $\frac{abcde}{fg}$, $\frac{abcdef}{ghk}$, bedeuten ebenfalls körperliche Räume. Es iſt, wenn abc das Prisma P, und R eine dieſer Größen bedeutet, $e:d = P:R$; $fg : de = P:R$; $ghk : def = P : R$.

Körper, reguläre, ſ. vieleckige reguläre Körper.

Kreis iſt eine ebene Figur, von einer ſtetigen Linie ſo eingeſchloſſen, daß die geraden Linien, welche bis zu derſelben, aus einem innerhalb der Figur befindlichen Puncte, gezogen werden, alle einander gleich ſind. Dieſer Punct heißt der Mittelpunct. Die begränzende Linie heißt die Kreislinie (Peripherie, Umfang des Kreiſes), und die begränzte Figur die Kreisfläche, wenn man die Umfangslinie von dem eingeſchloſſenen Flächenraum unterſcheiden will.

1. Jede gerade Linie von dem Mittelpuncte, an den Umfang gezogen, heißt ein Halbmeſſer (radius) des Kreiſes. Zwey Halbmeſſer, die in entgegengeſetzter

Richtung gezogen ſind, zuſammengenommen, ſind ein Durchmeſſer, (diameter.)

2. Eine gerade Linie zwiſchen zwey Puncten des Kreisumfanges heißt eine Chorde oder Sehne. Der Durchmeſſer iſt eine Chorde, die durch den Mittelpunct gezogen iſt.

3. Das Stück der Kreisfläche zwiſchen einer Chorde und dem zugehörigen Bogen, auf der einen oder auf der andern Seite der Chorde heißt ein Kreisabſchnitt oder Segment. Das Stück zwiſchen zwey Halbmeſſern und dem zugehörigen Bogen, dem einen oder dem andern Theile des ganzen Umfanges, heißt ein Kreisausſchnitt oder Sector. — Bogen, Sectoren und Segmente, die in verſchiedenen Kreiſen gleichen Winkeln am Mittelpuncte zugehören, ſind einander ähnlich.

4. Euklides zeigt nicht, wie die Kreislinie beſchrieben oder im Verſtande gezeichnet wird. Er ſtellt gleich den Forderungsſatz auf, daß aus jedem Puncte mit jedem Abſtande ein Kreis beſchrieben werden möge. In der That liegt in dem Begriffe eines Kreiſes auch die Möglichkeit deſſelben.

5. Das Poſtulat möchte folgendergeſtalt ausgedruckt werden können: Einen Kreis beſchreiben, heißt, eine ſtetige Folge von gleichen geraden Linien um einen feſten Punct ſich gedenken.

6. Hierauf gründet ſich die techniſche Zeichnung eines Kreiſes, der das ſinnliche Bild des intellectuellen iſt. Man führt mit dem bekannten Inſtrumente, dem Zirkel, eine Linie zwiſchen den Spitzen deſſelben um die eine feſtgeſtellte Spitze herum. Wenn man den abſtracten Begriff von Bewegung gleich Anfangs in die Geometrie aufnimmt, ſo kann man eine, wie die Logiker ſie nennen, genetiſche Erklärung des Kreiſes geben, daß er diejenige Figur iſt, die entſteht, wenn eine beſtimmte gerade Linie um ihren einen, unverrückt bleibenden, Endpunct herum geführt wird, bis ſie wiederum in ihre erſte Lage kommt.

7. Der Kreis hat ſehr viele merkwürdige Eigenſchaften, wodurch er theils zur Auflöſung mancher geometriſchen Aufgaben dient, theils ohne dieſe Rückſicht dem Verſtande eine angenehme Beſchäftigung gewährt. Die Trigonometrie beruht auf dem Kreiſe. In dem Artikel, Goniometrie, ſind die erſten Formeln, welche den übrigen zur Grundlage dienen, aus einer Eigenſchaft des Kreiſes hergeleitet. Auch die daraus dort durch Rechnung entwickelten Formeln laſſen ſich größtentheils durch geometriſche Conſtructionen im Kreiſe erfinden. Unſere trigonometriſchen Tafeln enthalten coordinirte Linien und Winkel am Kreiſe. Die geometriſche Berechnung derſelben gründet ſich auf die Lehre von den regulären in einem Kreiſe beſchriebenen Vielecken. Die analytiſche iſt ein beſonderer Fall einer allgemeinen Methode für Rectificationen krummer Linien. In der höhern Geometrie werden viele Auflöſungen auf Rectification der Kreisbogen oder Quadratur von Kreisausſchnitten und Kreisabſchnitten gebracht. Der Kreis dient die Krümmung an krummen Linien zu meſſen.

8. Ich werde die vornehmſten Eigenſchaften des Kreiſes, wovon in unſern Lehrbüchern gar zu wenig vorkommt, hier anführen, und erweiſen. Um den Raum nicht zu beengen, werde ich die leichten Sätze ohne Beweis nur anzeigen. In Kraffts Institutionibus Geometriae sublimioris, Tubingae 1753 ſind viele Lehrſätze und Aufgaben über den Kreis geſammelt. Dazu nehme man noch eine Sammlung geometriſcher Aufgaben, nach der geometriſchen analytiſchen Methode aufgelöſet, welche Schwab ſeiner Ueberſetzung von Euklids Datis beygefügt hat, und einen Abſchnitt in Newtoni Arithmetica universali, worin manche Aufgaben über den Kreis algebraiſch aufgelöſet ſind. In dem Opere geometrico Gregorii a Sto. Vincentio, pag. 167—218, iſt eine Sammlung von Sätzen den Kreis betreffend enthalten, woraus Krafft, wie er es ſelbſt anzeigt, vieles genommen hat. In den Werken des Vieta kommt man-

ches über den Kreis, beſonders über die Berührungen vor. — Das dritte Buch des Euklides dient für dieſen Artikel zur Grundlage. Was die Hülfe höherer Rechnungen erfordert, kommt in den Artikeln Cyklometrie, und Cyklotechnie vor.

9. Gleichen Winkeln am Mittelpuncte gehören in demſelben Kreiſe gleiche Ausſchnitte und Bogen zu, und umgekehrt.

10. Winkel am Mittelpuncte verhalten ſich wie die zugehörigen Sectoren und Bogen.

Denn es ſeyn (Fig 12.) ADB, ADC zwey Winkel an dem Mittelpuncte des Kreiſes AEA. Man füge von A durch E nach M mehrere, dem A D B gleiche, Winkel an einander, welche den Winkel ADM bilden; eben ſo mehrere, dem ADC gleiche Winkel, welche den Winkel ADN bilden, ſo iſt der Bogen AEM daſſelbe Vielfache von AB als ADM von ADB iſt, und der Bogen AEN daſſelbe Vielfache von AC als es der Winkel ADN von ADC iſt. Iſt der W. ADM größer oder kleiner oder ſo groß als der W. ADN, ſo iſt auch der Bogen AEM größer oder kleiner oder ſo groß als der Bogen AEN, die Vielfachen der Winkel und Bogen mögen ſeyn, welche man will, wobey die Winkel unbeſtimmt größer als vier Rechte, und die Bogen eben ſo größer als der Kreisumfang ſeyn können. Daraus folgt, (ſ. Proportion), daß die Winkel ADB, ADC ſich wie die Bogen AB, AC verhalten. — Eben ſo wird der Satz für die Sectoren erwieſen.

11. Die Kreislinie hat mit der geraden Linie dieſes gemeinſchaftlich, daß die gleichen an einander liegenden Theile einerley Lage neben einander haben. Allein auf der geraden Linie haben zugleich die von einander entfernten Theile einerley Lage gegen einander, ſofern man dabey auf ihren Abſtand nicht ſieht.

12. Der Mittelpunct eines Kreiſes liegt auf der geraden Linie, die durch die Mitte einer Chörde ſenkrecht darauf gezogen iſt.

13. Das Perpendikel von dem Mittelpuncte auf eine Chorde halbirt dieſe, und die gerade, welche von dem Mittelpuncte durch die Mitte einer Chorde gezogen iſt, ſteht auf dieſe ſenkrecht.

14. Eine gerade Linie ſchneidet einen Kreis nur in zwey Puncten, oder berührt ihn in einem einzigen, oder liegt ganz außerhalb deſſelben.

15. I. Die auf einen Durchmeſſer in dem Endpuncte ſenkrechte berührt den Kreis. II. Die berührende ſteht auf den Durchmeſſer durch den Berührungspunct ſenkrecht. III. Die auf eine berührende in dem Berührungspuncte ſenkrechte geht durch den Mittelpunct.

16. I. Zwey Kreiſe ſchneiden ſich, wenn der Abſtand ihrer Mittelpuncte kleiner iſt, als die Summe ihrer Halbmeſſer, oder größer als der Unterſchied derſelben; und zwar nur in zwey Puncten. II. Sie berühren ſich in einem einzigen Puncte, wenn der Abſtand der Mittelpuncte gleich iſt der Summe oder dem Unterſchiede der Halbmeſſer, und haben eine gemeinſchaftliche berührende, die ſenkrechte auf die gerade durch die beiden Mittelpuncte in dem gemeinſchaftlichen Endpuncte der Halbmeſſer. In dem erſtern Falle liegen die beiden Kreiſe auf entgegengeſetzten Seiten der berührenden, in dem andern Falle auf derſelben Seite, und der kleinere Kreis iſt ganz von dem größern eingeſchloſſen. III. Sie liegen ganz außerhalb einander, wenn der Abſtand der Mittelpuncte größer iſt als die Summe der Halbmeſſer; iſt jener Abſtand kleiner als der Unterſchied der Halbmeſſer, ſo liegt der kleinere Kreis ganz innerhalb des größern und abgeſondert.

Die Beweiſe dieſer Sätze gründen ſich darauf, erſtlich, daß in einem geradlinichten Dreyeck jede Seite kleiner iſt als die Summe der beiden andern Seiten, und größer als ihr Unterſchied; zweytens, daß mit drey Seiten nur ein und daſſelbe Dreyeck möglich iſt, in zweyerley Lage an einer der Seitenlinien, in einer gegebenen Ebene.

17. Drey Puncte beſtimmen daher einen Kreis. Der Mittelpunct deſſelben iſt der Durchſchnitt der beiden ſenkrechten durch die Mitte zweyer geraden zwiſchen den drey gegebenen Puncten.

18. Der Kreis iſt diejenige krumme Linie, welche durch die kleinſte Anzahl von Puncten beſtimmt wird. Die Parabel und die gleichſeitige Hyperbel werden durch vier Puncte völlig beſtimmt, eine Ellipſe und ungleichſeitige Hyperbel durch fünf Puncte.

19. In einem Kreiſe ſind alle Winkel in einem und demſelben Abſchnitte ſich gleich; oder, die Winkel an der Peripherie, welche auf demſelben Bogen ſtehen, ſind ſich gleich. Nämlich in Fig. 13. ſind die Winkel ACB, ADB gleich groß, ſo wie die Winkel AEB und AFB auch gleich groß ſind.

Jeder iſt halb ſo groß als der Winkel am Mittelpuncte, der mit ihm auf demſelben Bogen ſteht. Der Winkel ACB oder ADB iſt die Hälfte von dem Winkel AGB am Mittelpuncte G; und AEB oder AFB iſt die Hälfte von dem Winkel AgB auf derjenigen Seite beider Schenkel, welche mit der Öffnung dieſer Winkel nach derſelben Seite hin liegt.

Dieſes iſt eine Haupteigenſchaft des Kreiſes, woraus die meiſten übrigen abgeleitet werden.

20. Ein Winkel in dem größern Abſchnitte iſt ſpitz, in dem kleinern ſtumpf, in dem Halbkreiſe ein rechter.

21. Wenn in der vierſeitigen Figur ACDB (Fig. 13.) die Winkel ACB, ADB gleich groß ſind, ſo läßt ſich um dieſelbe ein Kreis beſchreiben. — Denn wenn der Kreis, der durch drey Eckpuncte der Figur, als A, C, B, beſchrieben iſt, nicht durch D gienge, ſondern durch einen andern Punct d der geraden BD, ſo wäre der W. AdB = ACB, und ADB größer oder kleiner als AdB, alſo nicht gleich ACB.

22. Die beiden Winkel in den beiden Abſchnitten zuſammen ſind zwey rechten gleich. Oder in einem Viereck, das in einen Kreis eingeſchrieben iſt, machen die ſich gegen über liegenden Winkel zwey rechte aus, wie C und E in dem Vierecke ACBE; oder D und F in dem Vierecke ADBF.

23. Um ein Viereck ADBE (Fig. 13.), worin die einander gegen über ſtehenden Winkel zwey rechte ausmachen, kann ein Kreis beſchrieben werden. — Denn wenn durch drey Winkelpuncte, als A, D, B, ein Kreis beſchrieben wird, und dieſer nicht durch E gienge, ſo könnte der W. AEB mit ADB nicht zwey rechte ausmachen.

24. Es ſey AB (Fig. 14.) der Durchmeſſer eines Kreiſes, ſo iſt der Umfang deſſelben der geometriſche Ort für alle rechtwincklige Dreyecke, die wie ADB über der AB als Hypotenuſe gezeichnet werden können. An jedem Puncte des Umfanges D iſt der W. ADB ein rechter. Iſt alſo von einem rechtwinkligen Dreyeck auſſer der Hypotenuſe AB eine der Katheten AD gegeben: ſo trägt man dieſe von A an den Kreis, zieht DB, und es iſt ADB das verlangte Dreyeck.

25. Um ein rechtwinkliges Dreyeck ADB (Fig. 14) über AB als Hypotenuſe zu zeichnen, ſo daß die Spitze des rechten Winkels D in eine gegebene, auf AB ſenkrechte, CD falle, beſchreibe man über AB als Durchmeſſer einen Kreis, und ziehe an den Punct D, wo dieſe durch C ſenkrechte den Kreisumfang trifft, die geraden AD, BD, ſo iſt das verlangte geſchehen.

26. Oder wenn die Höhe DC eines rechtwinkligen Dreyecks über der Hypotenuſe AB gegeben iſt, ziehe man in dem Abſtande CD die parallele FG mit AB, welche den Kreis in D und E ſchneide, ſo geben dieſe Puncte jeder das verlangte Dreyeck.

27. Iſt ADB ein bey D rechtwinkliges Dreyeck, ſo geht der über der Hypotenuſe beſchriebene Kreis durch die Spitze des rechten Winkels D.

28. In dem Halbkreiſe ADB (Fig. 14.) ſey von einem Puncte des Umfanges die ſenkrechte DC auf AB gelaſſen, ſo iſt AC : CD = CD : CB (Dreyeck, 11.), und daher $CD^2 = AC \times CB$. — Dieſes iſt die einfachſte Gleichung für den Kreis, woraus alle Eigenſchaften und Verbindungen mit andern Linien, geraden oder krummen, ſich algebraiſch herleiten laſſen.

29. Vermittelſt des Kreiſes wird eine mittlere Proportionale zwiſchen zwey gegebenen Linien geometriſch gefunden. Dieſe beiden ſeyn AC, CB. Man ſetze ſie in eine gerade AB zuſammen, beſchreibe über AB einen Halbkreis ADB, ziehe an denſelben die auf AB in C ſenkrechte CD, ſo iſt dieſe die geſuchte.

Oder man trage auf die größere der gegebenen, AB, die kleinere AC, beſchreibe über AB einen Halbkreis, ziehe in demſelben durch C die ſenkrechte CD, und verbinde AD, ſo iſt ſolche die mittlere Proportionale zwiſchen AB und AC. (Dreyeck, 11.).

30. In dem Kreiſe ABD (Fig. 15.), deſſen Mittelpunct C, ſey eine Chorde AB gezogen, und durch den Endpunct A eine berührende EF, nämlich die auf AC ſenkrechte (15.). Der ſpitze Winkel FAB dieſer berührenden mit der Chorde AB iſt ſo groß als der Winkel in dem größern Abſchnitte ADB, und der ſtumpfe EAB ſo groß als der Winkel in dem kleinern Abſchnitte AdB. — Umgekehrt, wenn der Winkel FAB gleich iſt dem Winkel in dem Abſchnitte AGB, ſo iſt FA eine berührende.

Denn man ziehe an den Endpunct G des Durchmeſſers ACG die gerade BG, ſo iſt der W. ABG ein rechter. Daher iſt BAG + AGB = R. Nun ſind auch BAG + FAB = R, alſo iſt FAB = AGB. Dieſes iſt ein Winkel in dem Abſchnitte ADB. Ein Winkel in dem andern Abſchnitte AdB iſt die Ergänzung von AGB zu zwey rechten, eben ſo wie der Nebenwinkel EAB es zu dem W. FAB iſt. Alſo iſt EAB dem Winkel in dem Abſchnitte AdB gleich.

31. Wenn die Spitze des Winkels in dem Abſchnitte A D B auf dem Umfange B D A herumgeführt wird, ſo bleibt der Winkel am Umfange immer derſelbe, wie nahe auch die Spitze an A falle. Fällt die Spitze in A ſelbſt, ſo verwandelt ſich die ſchneidende Linie, von welcher der eine Schenkel des Winkels in dem Kreiſe ein Theil iſt, in die berührende, und der andere Schenkel fällt in A B. Daraus folgt auch, daß der Winkel der berührenden mit der Chorde A B dem Winkel in dem entgegengeſetzten Abſchnitte gleich iſt.

32. Über einer gegebenen Chorde A B (Fig. 15.) ein Segment eines Kreiſes zu zeichnen, welches einen gegebenen Winkel faßt, zeichne man an der entgegengeſetzten Seite von A B den Winkel F A B gleich dem gegebenen, ziehe auf A F in A die ſenkrechte A G, und in B auf A B die ſenkrechte B G, welche die A G in G ſchneide, halbire A G in C, beſchreibe aus C mit dem Halbmeſſer A C oder A G einen Kreis, ſo iſt das Segment A D G B das verlangte, da W. A G B = F A B iſt. — Der Bogen A D G B iſt der geometriſche Ort für alle Dreyecke über der Grundlinie A B, worin der Winkel, der A B gegen über ſteht, dem gegebenen F A B gleich iſt.

33. Zwiſchen parallelen Chorden ſind gleiche Bogen enthalten. — Denn die geraden zwiſchen entgegen liegenden Endpuncten der Chorden machen mit denſelben gleich große Winkel am Umfange; daher ſind die Bogen, worauf dieſe gleichen Winkel ſtehen, einander gleich. Sie gehören zu gleichen Winkeln am Mittelpuncte.

Umgekehrt, die Chorden durch die gegen über liegenden Endpuncte gleicher Bogen ſind ſich parallel, wegen der gleichen Winkel, welche ſie mit den geraden durch entgegen liegende Endpuncte machen.

34. Zwey Chorden A B, C D (Fig. 16.) ſchneiden ſich innerhalb des Kreiſes in E, es iſt

$EA : EC = ED : EB$, oder

$EA \times EB = EC \times ED$.

Denn man ziehe die geraden B C, A D, ſo ſind die Winkel A, D, A E D, den Winkeln C, B, B E C nach der Ordnung gleich, alſo ſind die Dreyecke A E D, C E B ſich ähnlich. Daher folgt die angegebene Proportion (Dreyeck, 6.).

35. Zwey Chorden, A B, C D (Fig. 17.) ſchneiden ſich verlängert außerhalb des Kreiſes in E, es iſt E A : E C = E D : E B, oder E A × E B = E C × E D.

Denn man ziehe die geraden B C, A D, ſo ſind die Winkel E, D, B A D den Winkeln E, B, B C D nach der Ordnung gleich. Da W. B A D = B C D, ſo iſt auch W. E A D = E C B, und die Dreyecke E D A, E B C ſind ſich ähnlich.

36. Wenn die geraden A B, C D (Fig. 16. 17.) zwiſchen vier gegebenen Puncten, A, B C, D, ſich in E ſchneiden, und E A : E C = E D : E B iſt, ſo geht derſelbe Kreis durch alle vier Puncte.

Denn man beſchreibe durch drey derſelben, als A, C, D einen Kreis, und ziehe in demſelben durch den Punct A des Umfanges und den Punct E auf A B eine gerade, welche den Kreis zum zweytenmahl in einem Puncte P auf der A B ſchneide, ſo iſt E A : E C = E D : E P. Da nun auch iſt E A : E C = E D : E B, ſo iſt E P = E B, und der Kreis zugleich geht durch den vierten Punct B.

37. Es ſey E D (Fig. 18.) eine den Kreis in C berührende gerade. Durch einen Punct E derſelben ziehe man an den Kreis eine gerade, welche denſelben in A und B ſchneide: es iſt E A : E C = E C : E B, oder $EA \times EB = EC^2$.

Denn man ziehe A C und B C, ſo iſt W. E C A = E B C (30.) und W. D C B = B A C. Daher ſind die Dreyecke E C A, E B C ähnlich, und es iſt E A : E C = E C : E B.

38. Wenn AB in F (Fig. 18.) halbirt wird, ſo iſt $EF^2 = EA^2 + AF^2 + 2\,EA \times AF = EA \times EB + AF^2$, alſo $EF^2 = EC^2 + AF^2$, und $EC^2 = EF^2 - AF^2$.

39. Wenn von einem Puncte E außerhalb eines Kreiſes (Fig. 18.) an denſelben zwey gerade gezogen ſind, deren eine denſelben in A und B ſchneidet, die andere ED ihn in C trifft, und es iſt EA : EC = EC : EB; ſo iſt ED eine den Kreis in C berührende.

Denn wenn AC, BC an den Punct C gezogen werden, ſo ſind wegen der Proportionalität der Seiten EA, EC; EC, EB, und des gemeinſchaftlichen Winkels E die Dreyecke ECA, EBC ſich ähnlich, und es iſt W. ECA = EBC, ſo wie W. ECB = EAC, oder W. DCB = CAB, daher iſt aus (31.) die gerade ECD eine in C berührende.

40. Um von einem gegebenen Puncte E (Fig. 18.) an einen gegebenen Kreis ACB eine berührende ECD zu ziehen, ziehe man irgend eine gerade EAB an den Kreis, welcher von derſelben in A, B geſchnitten werde, und finde nach (29.) die mittlere Proportionale zwiſchen EA und EB, beſchreibe mit derſelben als Halbmeſſer aus E einen Kreis, ſo ſind die beiden Durchſchnittspuncte deſſelben mit dem Kreiſe ACB diejenigen, in welchen die von E daran gezogenen geraden den Kreis ACB berühren.

Am einfachſten iſt die Conſtruction, wenn über der geraden durch E und den Mittelpunct des Kreiſes G als Durchmeſſer ein Kreis beſchrieben wird. Dieſer ſchneidet den Kreis ACB in den beiden geſuchten Berührungspuncten. — Es iſt nämlich der W. ECG ein rechter.

Oder man ziehe, wie vorher, eine willkürliche EAB an den Kreis, halbire AB in F, beſchreibe über EF einen Halbkreis, trage in denſelben von F aus eine Chorde ſo groß als AF, ziehe an den andern Endpunct derſelben von E aus eine gerade, ſo iſt dieſe nach (38.) der berührenden EC gleich.

41. Der Berührungspunct C auf der berührenden E D iſt unter allen Puncten dieſer Linie derjenige, an welchem der Winkel der nach den Puncten A, B, gezogenen geraden am größten iſt.

42. Wenn in Fig. 16. die Segmente E C, E D der Chorde C D einander gleich ſind, ſo liegt der Mittelpunct des Kreiſes in dem Durchſchnitte der beiden Perpendikel durch die Mitte der Chorden A B, C D, und C E, oder D E iſt die mittlere Proportionale zwiſchen A E, E B. – Hieraus erhellt, wie zwiſchen zwey gegebenen geraden Linien eine mittlere Proportionale in einer gegebenen Lage gefunden werden kann.

43. Euklides hat die beiden Sätze (34. 37.) durch eine geometriſche Rechnung erwieſen, weil er die Lehre von der Ähnlichkeit der Dreyecke noch nicht vorgetragen hatte. Es iſt aber nöthig einzuſehen, wie dieſe Sätze von der charakteriſtiſchen Eigenſchaft des Kreiſes abhangen. Den Satz (39.) hat Euklides auf eine andere Art erwieſen. Den Satz (35.) hat er nicht mit aufgeführt.

44. In einem Kreiſe (Fig. 19.) iſt ein Viereck A B C D beſchrieben, worin die Diagonalen A C, B D gezogen werden: es iſt $AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD$.

Man ziehe A E unter dem W. $BAE = CAD$. Da auch W. ABE oder $ABD = ACD$ iſt, ſo iſt der Winkel $AEB = ADC$, und die Dreyecke, A B E, A C D ſind ſich ähnlich. Ferner iſt W. $BAC = BAE + EAC = DAC + EAC = DAE$, und der W. $BCA = BDA$ oder EDA. Daher iſt W. $ABC = AED$, und die Dreyecke A B C, A E D ſind ſich ähnlich. Daher iſt

$$AB : BE = AC : CD$$
$$AD : ED = AC : BC,$$

oder

$$AB \times CD = BE \times AC$$
$$AD \times BC = ED \times AC.$$

Daraus folgt durch Addition

$$AB \times CD + AD \times BC = BD \times AC.$$

45. Dieſer Satz iſt in dem Artikel, Goniometrie, angewandt, um die ganze Lehre von der Zuſammenſetzung der Winkel mittelſt der zugehörigen goniometeriſchen (oder trigonometriſchen) Linien darauf zu gründen. Man nennt den Satz den Ptolemäiſchen Lehrſatz, weil Ptolemäus ihn in ſeinem aſtronomiſchen Syſtem (Almageſt), 1. B. 9. Cap. auch zum Grunde der Berechnung der Chorden gelegt hat.

46. Daß der W. AEB = ADC iſt, läßt ſich auch unmittelbar ſo erweiſen. Es iſt W. AEB = ADB + EAD, und EAD = EAC + CAD = EAC + BAE = BAC = BDC, alſo W. AEB = ADB + BDC = ADC.

Oder W. AED = ABD + BAE, und W. BAE = CAD = CBD, alſo W. AED = ABD + CBD = ABC. Daraus iſt ferner W. AEB gleich dem W. ADC, der dem ABC gegen über liegt, nach (22.).

47. In dem Viereck ABCD (Fig. 19.) iſt AC : BD = sin ABC : sin BAD. — Denn

$$AC : AB = \sin ABC : \sin ACB$$

$$AB : BD = \sin ADB : \sin BAD.$$

Daraus folgt durch die Zuſammenſetzung der Verhältniſſe, da ADB = ACB iſt, die angegebene Proportion.

48. Die beiden Diagonalen AC, BD des Vierecks ABCD in einem Kreiſe (Fig. 20.), ſchneiden ſich unter einem rechten Winkel in E; es iſt $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2 =$ dem Quadrate des Durchmeſſers.

Man ziehe durch A den Durchmeſſer AF, und durch F nach B und D hin die Chorden FB, FD. Da der W. AFB = ADB, und die Winkel ABF, AED rechte ſind, ſo ſind die Winkel BAF, CAD ſich gleich, alſo auch die Bogen, worauf ſie ſtehen, und deren Chor-

den, das iſt, $BF = CD$. Da $AB^2 + BF^2 = AF^2$ iſt, ſo iſt auch $AB^2 + CD^2 = AF^2$. — Auf gleiche Art ſind die Chorden B C, D F ſich gleich. Denn der W. $AFD = ABD$, daher W. $DAF = BAC$, und die Chorde $DF = BC$. Da $AD^2 + DF^2 = AF^2$, ſo iſt auch $AD^2 + BC^2 = AF^2$.

49. Hieraus folgt noch $AE^2 + BE^2 + CE^2 + ED^2 = AF^2$.

50. Es iſt A B C (Fig. 21.) ein in einem Kreiſe beſchriebenes Dreyeck, und C D die ſenkrechte auf die Seite A B; durch C werde der Durchmeſſer C E gezogen: es iſt $CA : CE = CD : CB$, oder $CA \times CB = CE \times CD$.

Denn man ziehe B E, ſo iſt W. $E = A$, und W. E B C ein rechter, wie A D C; alſo ſind die Dreyecke A D C, E B C ähnliche, woraus die Proportion folgt.

51. Über dem Durchmeſſer A B ſey (Fig. 22.) aus dem Mittelpuncte C ein Halbkreis A M B beſchrieben. Auf dem Halbmeſſer C A nehme man irgend einen Punct D, und auf der Verlängerung den Punct E, ſo daß $CD : CA = CA : CE$ ſey. Von den Puncten D und E ziehe man an irgend einen Punct des Umfanges M die geraden D M, E M: es iſt $DM : EM = DA : EA$.

Man ziehe den Halbmeſſer C M, ſo iſt, zufolge der Annahme, $CD : CM = CM : CE$. Dadurch ſind die Dreyecke C M D, C E M ſich ähnlich, und es iſt $CM : DM = CE : EM$, oder $CM : CE = DM : EM$. Aus der angenommenen Proportion folgt durch Trennung und Verwechslung dieſe $CA : CE = DA : EA$. Alſo iſt $DM : EM = DA : EA$.

52. Für den Endpunct B des Durchmeſſers A B iſt $DB : EB = DA : EA$. Denn aus der angenommenen Proportion folgt durch Verknüpfung und Verwechslung $CA : CE = DB : EB$. Nun iſt auch, wie

vorher gefunden iſt, $CA : CE = DA : EA$, alſo iſt $DB : EB = DA : EA$.

53. Die Linie BE iſt durch die Puncte A, D harmoniſch getheilt, ſ. harmoniſche Theilung.

54. Der Kreis iſt der geometriſche Ort für die Dreyecke, die über einer gegebenen Grundlinie ein gegebenes Verhältniß der beiden Seiten haben. Dieſe Eigenſchaft beruht ganz auf der Gleichheit der Halbmeſſer.

55. Um den Kreis aus dem gegebenen Verhältniſſe $DM : EM$ und der Grundlinie DE des Dreyecks DME zu beſtimmen, theile man DE nach dieſem Verhältniſſe ein, ſo daß $DA : EA = DM : EM$ ſey. Der Halbmeſſer CA iſt die vierte Proportionale zu $AE - AD$, AD, AE. — Denn da $CD : CA = CA : CE$ iſt, ſo iſt $AD : CA = EA : CE$, oder $AD : EA = CA : CE$. Daraus iſt $AE - AD : AD = AE : AC$.

56. In einem Dreyeck ABC (Fig. 23.) werde auf der Seite AB genommen $AE : BE = m : n$, ſo iſt $n \times AC^2 + m \times BC^2 = n \times AE^2 + m \times BE^2 + (m + n) CE^2$.

Man ziehe CD ſenkrecht auf AB, und verbinde CE, ſo iſt $AC^2 = AE^2 + CE^2 + 2 AE \times ED$; und $BC^2 = BE^2 + CE^2 - 2 BE \times ED$, (Dreyeck, 19. 20). Multiplicirt man die Theile der erſten Gleichung durch n, der zweyten durch m, und addirt die auf der einen und der andern Seite in jener und dieſer zu einander, ſo wird da $n \times AE = m \times BE$ geſetzt iſt, der aufgeſtellte Satz erhalten. — Dieſer Zwiſchenſatz iſt zu den folgenden Sätzen für den Kreis nöthig. Wenn $m = n$, oder $AE = BE$ iſt, ſo iſt $AC^2 + BC^2 = 2 AE^2 + 2 CE^2$, wie in (Dreyeck, 24).

57. Aus dem Mittelpuncte O (Fig. 24.) ſey ein Kreis beſchrieben. Auf dem Durchmeſſer oder deſſen Verlängerung werden die gleichen OA, OB genommen. An irgend einen Punct des Umfanges P ſeyn AP, BP ge-

zogen: es iſt $AP^2 + BP^2 = AB \times BO + 2 OP^2$, eine unveränderliche Summe.

Folgt aus (56.), da $m = n$ iſt.

58. Es iſt aus dem Mittelpuncte O (Fig. 25.) ein Kreis beſchrieben. In der Ebene deſſelben nehme man zwey Puncte, A, B, theile die gerade AB in H halb, ziehe durch den Mittelpunct des Kreiſes die gerade HOC, nehme darauf $HC = 3 HO$: es iſt, wenn an irgend einen Punct des Kreiſes P die geraden AP, BP, CP gezogen werden, $AP^2 + BP^2 + CP^2 = AB \times BH + 2 CH \times HO + 3 OP^2$, eine unveränderliche Summe.

Denn man ziehe HP, ſo iſt in dem Dreyeck APB,

$$AP^2 + BP^2 = 2 AH^2 + 2 HP^2,$$

und in dem Dreyeck CPH, worin $CO = 2 HO$,

$$CP^2 + 2 HP^2 = CO^2 + 2 HO^2 + 3 OP^2.$$

Durch die Verknüpfung dieſer beiden Gleichungen entſteht

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 2 AH^2 + CO^2 + 2 HO^2 + 3 OP^2.$$

Da $CO = 2 HO$ iſt, ſo iſt $CO^2 + 2 HO^2 = 2 CH \times HO$. Auch iſt, wie vorher, $2 AH^2 = AB \times BH$.

59. Es iſt aus dem Mittelpuncte O (Fig. 26.) ein Kreis beſchrieben. In der Ebene deſſelben nehme man drey Puncte, A, B, C, willkürlich, theile AB in H halb, ziehe HC, nehme HK gleich dem dritten Theile von HC, ziehe durch K und O die gerade KOD, nehme darauf $KD = 4 KO$: es iſt für jeden Punct P auf dem Umfange des Kreiſes, $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = AB \times BH + 2 CH \times HK + 3 DK \times KO + 4 OP^2$, einer beſtändigen Summe.

Denn man ziehe KP und OP, ſo iſt

I. $AP^2 + BP^2 = AH^2 + BH^2 + 2HP^2$;
II. $CP^2 + 2HP^2 = CK^2 + 2HK^2 + 3KP^2$;
III. $DP^2 + 3KP^2 = DO^2 + 3KO^2 + 4OP^2$.

Durch Verbindung dieſer drey Gleichungen wird erhalten,

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 = 2AH^2 + CK^2 + 2HK^2 + DO^2 + 3KO^2 + 4OP^2.$$

Da $AB = 2AH$; $CK = 2HK$, und $DO = 3KO$ iſt, ſo ergiebt ſich die in dem Satze aufgeſtellte Form des zweyten Theils dieſer Gleichung.

60. Es erhellt ſchon hinlänglich, daß der Kreis der geometriſche Ort iſt, an welchem die Summe der Quadrate der geraden, von irgend einer Anzahl gegebener Puncte an irgend einen Punct desſelben gezogenen Linien eine beſtimmte Größe hat. Der Mittelpunct wird durch die gegebenen Puncte beſtimmt; der Halbmeſſer durch die gegebene Summe der Quadrate und die Rechtecke von den gegebenen Abſchnitten auf den Verbindungslinien AB, HC, KD u. ſ. f. Iſt der Kreis der Größe und Lage nach gegeben, ſo wird dadurch einer der Puncte beſtimmt, da die übrigen willkürlich bleiben. Die Conſtruction iſt durchgehends eine Verknüpfung jedes gegebenen Punctes nach einer willkürlichen Folge mit einem Theilungspuncte auf einer vorher gleichmäßig gezogenen geraden Verknüpfungslinie. Jede wird in ſo viele Theile getheilt als die Ordnungszahl des Punctes, nach welchem die Linie gezogen wird, Einheiten hat. Der genannte Theilungspunct iſt der erſte von dem auf ähnliche Art beſtimmten Theilungspuncte der vorhergehenden Verknüpfungslinie an gezählt.

61. Anſtatt der Quadrate der Linien von den gegebenen Puncten an den Kreis kann man auch Flächenräume nehmen, die zu den Quadraten beſtimmte Verhält-

niſſe haben. Nur müſſen die Verbindungslinien zwiſchen den gegebenen Puncten und den Theilungspuncten anders getheilt werden, als in dem erſtern Falle.

62. Es ſeyn vier Puncte (Fig. 26.) gegeben, und die Summe $m \times AP^2 + n \times BP^2 + p \times CP^2 + q \times DP^2$ unveränderlich, ſo muß genommen werden: $AH : BH = n : m$; $CK : HK = m + n : p$; $DO : KO = m + n + p : q$.

Dann werde aus O mit einem willkürlichen Halbmeſſer OP ein Kreis beſchrieben, ſo iſt für jeden Punct deſſelben die angegebene Summe unveränderlich. Die Rechnung wird auf ähnliche Art wie in (59.) geführt.

63. Dieſe merkwürdige Eigenſchaft des Kreiſes hat Apollonius in ſeiner Schrift von den ebenen Örtern vorgetragen, nach dem Berichte, den uns Pappus von dieſem Werke gegeben hat. Fermat nennt den Satz einen der ſchönſten in der Geometrie, in einem Briefe an Roberval, Operum pag. 151. Er giebt daſelbſt eine Conſtruction der Aufgabe, für fünf Puncte den Kreis zu finden, an welchem die Quadrate der an denſelben von jenen fünf Puncten gezogenen geraden Linien eine gegebene Summe ausmachen. Sie iſt eine andere als die hier vorgetragene. Der Beweis ſey lang, ſagt er, weswegen er ihn nicht beyfüge, ſondern dem Scharfſinne Robervals überlaſſe. In Fermats Schrift, Apollonii Pergaei Libri duo de locis planis restituti, findet ſich der Beweis; Opera varia mathematica, pag. 33—40. Zuerſt für Puncte, die in einer geraden Linie liegen, dann für jede Lage derſelben in einer Ebene. Er meynt, daß Apollonius nur von Quadraten den Satz ausgeſagt habe, und bemerkt dagegen, daß er ganz allgemein ſey. Allein Apollonius hat ihn wirklich allgemein genommen, weil das von Pappus gebrauchte Wort ʼειδος jede geradlinichte Figur bedeutet.

64. Robert Simpſon hat in dem von ihm wieder hergeſtellten Werke des Apollonius die Analyſis

und Synthesis des Satzes nach der alten griechischen Methode vorgetragen. Im wesentlichen iſt der Beweis mit dem hier gegebenen derſelbe, aber durch die Form der altgeometriſchen Rechnung weitläufiger und ſchwieriger. Die Art, wie Simpſon die Allgemeinheit des Satzes für irgend eine Anzahl von Puncten darthut, iſt einfach und ſinnreich. Es wird gezeigt, daß der Satz, wenn er für irgend eine Anzahl von Puncten gilt, auch für die nächſt größere richtig iſt, auf folgende Art für drey und vier Puncte.

65. Für drey Puncte ſey der Satz erwieſen, er ſoll auch für vier Puncte dargethan werden, nämlich daß der Kreis der Ort iſt, an welchem die Summe $m \times AP^2 + n \times BP^2 + p \times CP^2 + q \times DP^2$ (Fig. 27.) unveränderlich iſt. — Man verbinde zwey der gegebenen Puncte, wie A, B nehme auf der Linie AB den Punct E ſo, daß $BE : AE = m : n$ ſey, und beſtimme einen Kreis ſo, daß an demſelben die Summe $(m + n) EP^2 + p \times CP^2 + q \times DP^2 = H$, unveränderlich ſey, ſo iſt an demſelben auch $m \times AP^2 + n \times BP^2 + p \times CP^2 + q \times DP^2$ unveränderlich.

Denn es iſt $m \times AP^2 + n \times BP^2 = m \times AE^2 + n \times BE^2 + (m + n) EP^2$. Addirt man zu den Theilen dieſer Gleichung die Theile $(m + n) EP^2 + p \times CP^2 + q \times DP^2 = H$, ſo iſt $m \times AP^2 + n \times BP^2 + p \times CP^2 + q \times DP^2 = m \times AE^2 + n \times BE^2 + H$, einer unveränderlichen Größe.

Auf gleiche Art folgt nun der Satz für fünf Puncte, daher für ſechs, u. ſ. f.

66. Unter die merkwürdigen Eigenſchaften des Kreiſes gehört auch diejenige, welche der Coteſiſche Lehrſatz ausſagt, ſ. Th. I S. 561 ff. Es wird aber dieſer Satz nicht anders als durch eine algebraiſch-trigonometriſche Rechnung erwieſen werden können.

67. Aus dem Mittelpuncte C (Fig. 28.) ſey ein Kreis beſchrieben, und an dem Puncte M ſey die berührende MD gezogen, welche den verlängerten Durchmeſſer BA in D ſchneide. Von M ſey MP ſenkrecht auf AB in P: es iſt CP : CA = CA : CD.

Wegen der ähnlichen Dreyecke PCM, MCD. — Der Satz gilt auch für die Ellipſe, ſ. Ellipſe, 30.

68. Aus der Proportion CP : CA = CA : CD folgen dieſe beide:

CA + CP : CD + CA = CP : CA,
CA — CP : CD — CA = CP : CA.

Daraus iſt BP : BD = AP : AD, oder BD : BP = AD : AP. Die Linie DB wird von dem Kreiſe und der ſenkrechten durch den Berührungspunct harmoniſch getheilt, ſ. harmoniſche Theilung, Th. II. S. 698.

69. Wenn an zwey Puncte M, N eines Kreisumfanges (Fig. 28.) berührende gezogen werden, die ſich in D ſchneiden, und von dieſem Durchſchnittspuncte an den Kreis irgend eine gerade DEF gezogen wird, ſo wird dieſe von dem Durchſchnittspuncte der berührenden, dem Kreisumfange und der geraden, die Berührungspuncte verbindenden MN harmoniſch getheilt.

Denn man ziehe aus dem Mittelpuncte C die CD, und die Halbmeſſer CM, CN, ſo ſind die rechtwinkligen Dreyecke, CMD, CND, einander gleich (Dreyeck, 4), und MN ſchneidet die CD in P unter einem rechten Winkel. Eben dieſe treffe die DF in G. Es werde CH auf DF ſenkrecht geſetzt, ſo ſind die Dreyecke CHD, GPD ſich ähnlich, und es iſt CD : DH = DG : DP, alſo CD × DP = DH × DG. In dem rechtwinkligen Dreyeck CMD, worin MP ſenkrecht auf CD ſteht, iſt CD × DP = DM², zugleich iſt DM² = DE × DF (37.), alſo iſt DE × DF

= DH × DG. Nun iſt DE + DF = 2 DH, weil EH = FH iſt, alſo iſt 2 DE × DF = DE × DG + DF × DG. Man nehme auf beiden Seiten die beiden Rechtecke, DE × DG + DF × DE weg, ſo bleibt DE × GF = DF × EG. Daraus iſt DF : FG = DE : EG, und DF iſt in E, G, H harmoniſch getheilt.

70. Dieſe Eigenſchaften haben alle Kegelſchnitte mit dem Kreiſe gemein, wie in dem Artikel, krumme Linien der erſten Claſſe, gezeigt wird.

71. Von einem Puncte A außerhalb eines Kreiſes (Fig. 29.) ſind an dieſen zwey berührende AB, AC gezogen, auch zwey denſelben ſchneidende, ADE, AFG: die geraden DF, EG durch die neben einander liegenden Durchſchnittspuncte D, F und E, G der ſchneidenden mit dem Kreiſe, ſchneiden verlängert ſich auf der verlängerten BC, der durch die Berührungspuncte gezogenen, in demſelben Puncte H; und die geraden DG, FE, durch die entgegengeſetzten Durchſchnittspuncte mit dem Kreiſe, D, G und F, E treffen ſich in demſelben Puncte K der geraden BC innerhalb des Kreiſes.

Es iſt nämlich eine Eigenſchaft der harmoniſchen Theilung einer geraden Linie, daß die geraden, welche durch die vier Theilungspuncte nach irgend einem Puncte gezogen ſind, jede andere gerade auch harmoniſch theilen (ſ. Theilung gerader Linien). Die geraden AE, AG werden von dem Kreiſe und der die Berührungspuncte verbindenden BC harmoniſch getheilt, von der letztern die erſtere in L, die andere in M. Zieht man nun von dem Puncte H, wo die EG die BC ſchneidet, nach den Puncten A und D die geraden HA, HD, ſo theilen dieſe nebſt den ſchon gezogenen LH, EH die Linie AG harmoniſch ein. Dieſe iſt aber auch durch den Kreis und die BC harmoniſch getheilt. Da drey Puncte, A, M, G beiden Theilungsarten gemein ſind, ſo kann der vierte, durch jene beſtimmte, nicht verſchieden ſeyn, ſondern die

DH und der Kreis ſchneiden die AG in demſelben Puncte F. Daher geht die DF nach demſelben Puncte der BCH, in welchem die EG ſie trifft.

Auf gleiche Art wird gezeigt, daß die geraden verbindenden DG, FE ſich in einem Puncte K der BC treffen.

72. In einem Kreiſe (Fig. 30.) iſt irgend ein Sechseck ABCDEF gezeichnet. Je zwey Seiten, zwiſchen welche zwey andere liegen, werden bis zu ihrem Durchſchnittspuncte verlängert; (den Fall, da ſie parallel ſind, bey Seite geſetzt), nämlich AB und ED nach G; BC und FE nach H; CD und AF nach I: die Durchſchnittspuncte G, H, I liegen in einer geraden Linie.

Den Gang des ziemlich künſtlichen Beweiſes zu überſehen dient folgende vorläufige Bemerkung. Wenn die beiden GH, HI eine gerade Linie ausmachen, ſo iſt der Winkel GHM der GH und der mit CI parallel gezogenen HM gleich dem W. HID; und eben ſo iſt, wenn HN parallel der EG gezogen iſt, der W. IHN = HGD. Daher ſind die Drenecke GHM, HIN ähnliche, und es iſt GM : MH = HN : NI, oder GM : DN = MD : NI, oder GM : MD = DN : NI. Umgekehrt, wenn erwieſen werden kann, daß dieſe Proportion unbedingt Statt hat, ſo liegen die drey Durchſchnittspuncte in einer und derſelben geraden Linie.

Man ziehe MB, NF, ſo wird das Verhältniß GM : MD zuſammengeſetzt aus den Verhältniſſen GM : MB und MB : MD. Eben ſo iſt das Verhältniß DN : NI zuſammengeſetzt aus denen, DN : NF und NF : NI. Jene Verhältniſſe müſſen nun mit dieſen verglichen werden, weswegen die geraden BD, FD zu ziehen ſind. Man verbinde auch noch B und E durch die geraden BE, und C, F durch CF.

In dem Viereck BCDE iſt der W. CBE = dem äußern CDM, weil beide mit dem W. CDE zwey Rechte

ausmachen (22.). Da MH parallel mit CD iſt, ſo iſt W. HMD = CDM, alſo W. HMD = CBE, oder W. HME = HBE. Darum läßt ſich um das Viereck HMBE ein Kreis beſchreiben (21.), und es iſt W. BME = BHE. Auf gleiche Weiſe iſt in dem Viereck HNFC der W. HNC = HFC. Darum läßt ſich um daſſelbe ein Kreis beſchreiben, und es iſt W. CNF = CHF. Folglich iſt W. BME = CNF. Ferner iſt W. MBH = MEH = FCD. Da W. CBD = CFD, ſo iſt MBH + CBD = FCD + CFD, das iſt, W. MBD = FDN. Gleichfalls iſt W. NFH = NCH = BED. Da W. EFD = EBD, ſo iſt W. NFD = BDM. Folglich ſind die Dreyecke MBD, NDF ähnliche, worin die übereinſtimmenden Winkel in derſelben Folge liegen, als in der Bezeichnung der Dreyecke die Buchſtaben an ihren Scheiteln.

Man verlängere MB, NF bis an den Kreis in L, K, ziehe BK, FL. Es iſt W. LFC = MBC. Da, wie vorher ſchon bemerkt iſt, der W. MBC oder MBH = FCD, alſo W. LFC = FCD iſt, ſo iſt FL parallel mit CD. Ferner iſt W. KBE = NFE, und, wie vorher bemerkt iſt, der W. NFE oder NFH = BED, alſo iſt W. KBE = BED, und daher BK parallel der DE. Nun iſt W. GBM = LBA = LFA = CIF; und eben ſo IFN = KFA = KBA = DGB. Folglich ſind die Dreyecke MBG, NIF ähnliche, worin die übereinſtimmenden Winkel dieſelbe Folge haben, wie in der Bezeichnung der Buchſtaben.

Die zwey Paare ähnlicher Dreyecke MBG, NIF, und MBD, NDF geben die Proportionen, MG : MB = NF : NI, und MB : MD = ND : NF. Aus beiden entſteht durch Zuſammenſetzung der Verhältniſſe die Proportion MG : MD = ND : NI. Da die parallelen MH und DN, MD und HN ſich gleich ſind, ſo iſt MG : HN = MH : NI, oder MG : MH = NH : NI. Da auch der W. GMH = HNI iſt,

ſo ſind die Dreyecke GMH, NHI ſich ähnlich, ſo daß der W. MGH = NHI, und der W. MHG = NIH iſt. Daher liegen GH, HI in gleicher Richtung, da die Verlängerung von GH oder von IH eben ſolche gleiche Winkel giebt.

73. Wenn zwey der zu verlängernden Chorden einander parallel ſind, als AB und DE, ſo fällt die mit DE parallele BK in BA; es iſt alsdann der W. ABK = o, alſo der W. AFK oder NFI = o, und N fällt in I. Daher iſt HI parallel mit DE oder mit AB.

74. Der Satz iſt in dem Anhange zu den geometriſchen Aufgaben, welche Schwab ſeiner Ausgabe von Euklids Datis beygefügt hat, enthalten. S. 256. ff. Es wird da geſagt, daß er in Maclaurins Werke über die Fluxionen, nr. 623, ſich befinde. An dieſem Orte iſt aber ein anderer, doch ähnlicher, Satz enthalten. Noch wird daſelbſt angeführt, daß der Lehrſatz ein beſonderer Fall eines Satzes ſey, den Robert Simſon allgemein von den Kegelſchnitten erwieſen hat; Lord Stanhope habe denſelben für den Kreis durch die Elementar-Geometrie erwieſen. — Der hier vorgetragene Beweis weicht von dem, welchen Schwab mitgetheilt hat, in der Anordnung ab.

75. In einem Kreiſe (Fig. 31.) iſt irgend ein Viereck ABCD beſchrieben. Mit der Seite AB iſt eine parallele EI gezogen, welche von der Seite CD in E geſchnitten wird. Dieſe treffe den Kreis in F, I, und die beyden Seiten des Vierecks AD, BC, in G, H; es iſt EF : EG = EH : EI.

Denn es iſt der W. IGD = A = 2 R — C; alſo W. EGD = ECH, und die Dreyecke EGD, ECH ſind ſich ähnlich. Daher ED : EG = EH : EC. Da auch iſt EF : ED = EC : EI, ſo iſt EF : EG = EH : EI.

76. In einem Kreisumfange (Fig. 32.) ſind ſechs Puncte, A, B, C, D, E, F genommen. Die Chorden AB, CD ſchneiden ſich in G, die Chorden BE, DF in H; die Chorden CE, AF in I: die Durchſchnittspuncte G, H, I liegen in derſelben geraden Linie.

Durch den Punct I ziehe man mit AB die Parallele IK, welche von BE in L geſchnitten werde, und an den Punct H die geraden GH, IH, ſo wird man zu zeigen haben, daß die Dreyecke GBH, ILH ſich ähnlich, und daher die Winkel BHG, LHI einander gleich ſind.

Man ziehe die Chorde EF, ſo iſt in dem Viereck ABEF die Summe der Winkel bey A und E = 2 R. Da auch BAI + AIK = 2 R, ſo iſt W. BEF = AIK, oder FEL + FIL = 2 R. Daher läßt ſich um das Viereck HFLI ein Kreis beſchreiben (23.), und es iſt W. LFI = LFI, oder W. CEB = AFN, wenn LF nach N hin verlängert wird. Dieſe FN ſchneide den Kreis in O, ſo iſt der Bogen AO, auf welchem der Winkel AFN oder AFO ſteht, gleich dem Bogen BC, der zu dem Winkel BEC am Umfange gehört. Folglich iſt die gerade CO durch die Puncte C, O parallel mit AB (33.). Sie ſchneide die verlängerte DF in P, die Chorde AF in Q, und die von B nach D gezogene in R. Die DF ſchneide die verlängerten AB und LI, jene in M, dieſe in K, und LF die BAM in N, ſo iſt PO : PQ = MN : MA, und PR : PC = MB : MG. Nun iſt PO : PQ = PR : PC (75.), alſo iſt MN : MA = MB : MG. Daraus durch Trennung MN : NA = MB : BG. Wegen der ähnlichen Dreyecke, MFN, KFL, und AFN, IFL, iſt MN : NA = KL : LI, alſo auch MB : BG = KL : LI. Wegen der ähnlichen Dreyecke MHB, KHL iſt HB : BM = HL : KL, alſo durch Zuſammenſetzung der Verhältniſſe, HB : BG = HL : LI. Daher ſind die beiden Dreyecke HBG, HLI, in welchen die Winkel bey B und L gleich ſind, ſich ähnlich; die Winkel

BHG, LHI ſind ſich gleich, und GH, HI liegen in gerader Richtung.

77. Die beiden Lehrſätze für den Kreis (72. 76.) gelten auch für die Kegelſchnitte, da jeder Kegelſchnitt als eine Projection eines Kreiſes anzuſehen iſt. In der projicirten Figur ändern ſich zwar die Verhältniſſe und Lagen der geraden Linien, allein alle Theile gerader Linien bleiben in gerader Richtung bey einander. Die beiden Lehrſätze haben ihren Nutzen, wenn ein Kegelſchnitt, von dem fünf Puncte gegeben ſind, gezeichnet werden ſoll. Davon in dem Artikel, krumme Linien der erſten Claſſe.

Beſtimmung eines Kreiſes durch Puncte, berührende gerade und berührende Kreiſe.

78. Daß ein Kreis durch drey Puncte, die nicht in gerader Linie liegen, beſtimmt wird, iſt oben (17.) bemerkt. Anſtatt der Puncte kann man auch berührende gerade Linien oder Kreiſe nehmen. Es ſind aber, außer dem Falle, da drey gegebene gerade Linien zu berühren ſind, zwey, auch mehrere Kreiſe möglich, welche die Forderung erfüllen. Die Aufgabe iſt: wenn von Puncten, geraden Linien und Kreiſen in derſelben Ebene der Lage nach drey gegeben ſind, (Kreiſe zugleich der Größe nach), einen Kreis zu zeichnen, der durch die gegebenen Puncte geht, wofern Puncte (einer, zwey oder drey) gegeben ſind, und jede der gegebenen Linien berührt. Apollonius hat über dieſe Aufgabe eine Abhandlung in zwey Büchern geſchrieben, welche verloren iſt. Sie führte den Titel, περι ἐπαφῶν, von den Berührungen. Pappus hat zu dieſer Schrift Lemmata aufgeſetzt, welche wir in ſeinen Sammlungen mathematiſcher Sätze im 7ten Buche noch haben. Vieta gab 1600 eine kleine Schrift heraus, unter dem Titel, Apollonius Gallus, worin er die zehn beſondern Aufgaben, welche die Hauptaufgabe begreift, aufgelöſet hat. Man kann dieſe Schrift zwar nicht für die Wiederherſtellung der Apolloniſchen ge-

ten laſſen, allein ſie iſt ohne Rückſicht auf dieſe eine ſelbſtſtändige, worin die Auflöſungen ſcharfſinnig und doch einfach ſind. Man könnte daran ausſetzen, daß nicht alle beſondern Fälle der Aufgaben darin vorgenommen ſind; allein dieſe mag ein Liebhaber dieſer Unterſuchungen, der Zeit dazu hat, ſelbſt zuſetzen. Die eigene Methode des Verfaſſers iſt, daß er jede Aufgabe auf eine andere bringt, die ſchon aufgelöſet iſt. So zeigt er bey der letzten und ſchwerſten Aufgabe, nämlich, einen Kreis zu beſchreiben, der von drey gegebenen berührt wird, daß ſie darauf beruhet, einen Kreis zu finden, der von zwey gegebenen Kreiſen berührt wird, und durch einen gegebenen Punct geht. Dieſe wird auf die Aufgabe gebracht, durch drey gegebene Puncte einen Kreis zu beſchreiben. Die Auflöſungen des Vieta gefielen dem Adrianus Romanus, der die gedachte Aufgabe aufzulöſen einen unzuläſſigen Weg gewählt hatte, ſo ſehr, daß er von Würzburg, wo er ſich damals aufhielt, nach Frankreich reiſete, um ſich mit Vieta über mathematiſche Gegenſtände zu beſprechen. Camerer hat die Schrift des Vieta mit den Hülfsſätzen des Pappus, die hier zum erſtenmahl griechiſch erſcheinen, herausgegeben, und beiden Schriften Zuſätze und Berechnungen beygefügt. Die empfehlungswerthe Sammlung hat den Titel: Apollonii de tactionibus, quae ſuperſunt, ac maxime Lemmata Pappi, cet. Gothae et Amſtel. 1795. 178 pag. 8. 3 Kpft.

79. Die Aufgabe kann dahin abgeändert werden, daß der geſuchte Kreis einen gegebenen Halbmeſſer habe, wobey von den Puncten, geraden Linien und Kreiſen nur zwey in derſelben Ebene gegeben ſeyn dürfen. Marinus Ghetaldus hat ſie in ſeinem Supplemento Apollonii Galli; Venet. 1607. aufgelöſet.

80. Die Aufgabe von dem Kreiſe, der drey gegebene Kreiſe berührt, hat viele beſchäftigt. Descartes hat darüber ein paar Briefe mit der Prinzeſſinn Eliſa-

beth, (der Tochter des Kurfürſten Friedrich von der Pfalz, der eine kurze Zeit König von Böhmen war) gewechſelt. Sie hatte ihm eine Auflöſung geſchickt, die er ſehr rühmt. Es war eine analytiſche, nach der Methode des Descartes. Er ſelbſt zeigt nur, wie man eine Gleichung für den Halbmeſſer des geſuchten Kreiſes finden könne. (Cartesii epistolae, T. III. ep. 72. 73.) — Newton findet in ſeiner Arithmetica universali durch eine geometriſche Rechnung die Auflöſung des Falles, da ein Kreis gefunden werden ſoll, der durch einen gegebenen Punct geht, und zwey gegebene Kreiſe berührt. Auf dieſen bringt er die Aufgabe von drey berührenden Kreiſen. Zu vergleichen iſt hierbey das Lemma XVI. in den Princip. Phil. nat. L. I. — L'Hopital zeigt in ſeinem Werke von den Kegelſchnitten, S. 377, wie für dieſe Aufgabe eine Gleichung gefunden werden könne. Weil aber dieſe die Conſtruction ungemein beſchwerlich machen würde, leitet er eine Conſtruction aus derjenigen für den Fall her, da zwey Kreiſe ſich gleich ſind. Die Aufgabe hat bey ihm eine andere Form. — In Lamberts deutſchem Briefwechſel, Bd. I. S. 311 ſind zwey Auflöſungen der Aufgabe von drey berührenden Kreiſen, von welchen die eine mit der von Descartes angezeigten Ähnlichkeit hat, die andere auf trigonometriſchen Gründen beruht. Die Gleichungen werden aber nicht völlig entwickelt, noch weniger zu Conſtructionen benutzt. Eine polniſche Gräfinn hatte einem Freunde Lamberts, Holland, die Frage von den drey berührenden Kreiſen vorgelegt, zu dem Zwecke, wenn ein Uhrrad gefunden werden ſollte, das drey Räder von gegebener Größe und Lage zu treiben hätte. — In derſelben Sammlung, Bd. V. S. 252 iſt eine Auflöſung von Oberreit, die auf der Formel für den Inhalt eines Dreyecks aus den drey Seiten (ſ. Dreyeck, 34.) beruht. Die Werthe der Coefficienten ſind zwar ſehr ſymmetriſch zuſammengeſetzt, beſtehen aber aus ſehr vielen Gliedern, wie es nicht anders möglich iſt. — Selbſt Euler hat noch in den letzten Jahren ſeines Lebens die Frage vorgenommen. In den Novis Actis Ac. Petrop. T. VI. a.

a. 1788 iſt von ihm eine im J. 1779 mitgetheilte Aufſöſung enthalten, die der von Lambert angewandten Methode ähnlich iſt. Er leitet daraus ſowohl eine Gleichung für den Abſtand der Mittelpunete des geſuchten Kreiſes und eines der gegebenen her, als auch eine Conſtruction, die aber keine ächt geometriſche ſeyn möchte. Eben daſelbſt hat Fuß noch zwey analytiſche Auflöſungen beygefügt, und aus der einen eine Conſtruction hergeleitet, die in Rückſicht auf die Beſchaffenheit der Aufgabe bequem genug iſt. Die Conſtruction, welche Vieta angiebt, iſt dem Scheine nach ſehr einfach, in der That aber aus drey Conſtructionen zuſammen geſetzt. — In der deutſchen Überſetzung von Clairauts Algebra, die von Tempelhoff beſorgt hat, ſind einige Aufgaben über die Berührungen am Kreiſe trigonometriſch aufgelöſet, unter dieſen auch diejenige, wo drey Kreiſe zu berühren ſind. — Camerer hat in der vorher angeführten Schrift auch einige dieſer Aufgaben durch eine geometriſche Rechnung aufgelöſet, von der letztern auch eine ihm von Pfleiderer mitgetheilte beygefügt.

81. Es iſt nicht nöthig, hier alle zehn Aufgaben, auch nur von jeder einen Fall, aufzulöſen. Folgende Lehrſätze und Aufgaben genügen, um das ganze Geſchäft zu überſehen.

82. Ein Kreis (Fig. 33.) ſchneide die gerade AB in B, C, und berühre die gerade AD in E, welche beide ſich in A ſchneiden, ſo iſt $AE^2 = AB \times AC$, (37.). Daraus erhellt, wie der Mittelpunct O eines Kreiſes gefunden wird, der durch zwey gegebene Puncte B, C geht, und eine der Lage nach gegebene gerade AD berührt. Der Mittelpunct liegt in der auf BC durch die Mitte derſelben, und in der auf AD durch E ſenkrecht gezogenen. Um den Punct E, oder die Länge von AE zu finden, dient hier bequem das Verfahren in (42.), wozu man nur AB oder AC auf die andere Seite von A in der verlängerten AB tragen muß.

83. Die beiden geraden AD, AF berühren einen Kreis in E, G, ſo halbirt die durch den Mittelpunct O gezogene gerade AO den Winkel DAF, wegen der gleichen Dreyecke AOE, AOG.

84. Soll ein Kreis gezogen werden, der drey gegebene, ſich in den drey Puncten A, D, F ſchneidende gerade AD, AF, DF, berührt, ſo liegt der Mittelpunct in dem Durchſchnitte je zweyer die Winkel A, D, F halbirenden geraden.

85. Sind zwey gerade AD, AF der Lage nach gegeben, welche ein Kreis berühren ſoll, der zugleich durch den gegebenen Punct C geht, ſo halbire man den Winkel DAF durch die gerade AO, ziehe von C auf AO die ſenkrechte CH, verlängere ſie nach K, ſo daß HK = CH, und zeichne den Kreis, der durch die Puncte C, K gehe, und die eine der gegebenen geraden berühre, ſo berührt dieſer auch die andern. — Eine künſtlichere Auflöſung iſt in dem Artikel, Analyſis als Methode, Th. I. S. 92. gegeben.

86. Es ſind A, B (Fig. 34.) die Mittelpuncte zweyer Kreiſe, die ſich in C berühren. Durch den Berührungspunct C ziehe man willkürlich in dem einen Kreiſe die Chorden CD, CE, welche den andern Kreis in F, G ſchneiden; es iſt FG parallel mit DE.

Denn man ziehe die Halbmeſſer AD, AE, und BF, BG, ſo ſind die Dreyecke CAD, CBF ähnliche, ſo wie CAE, CBG, weil in gleichſchenkligen Dreyecke durch einen der Winkel die andern gegeben ſind. Da nun CD : CF = CA : CB, und CE : CG = CA : CB iſt, ſo iſt CD : CF = CE : CG; oder CD : CE = CF : CG; alſo ſind die Dreyecke DCE, FCG ſich ähnlich, (Dreyeck, 6), und die Seiten DE, FG ſind parallel.

87. Man ziehe in dem Puncte G die berührende HGI an den Kreis CFG, welche DE in H ſchneide,

ſo iſt CE × EG = DE × EH. Denn es iſt der W. CGI = CFG (30.), das iſt, W. HGE = CFG = CDE. Alſo ſind die Dreyecke CDE, HGE ähnliche, in welchen iſt CE : DE = EH : EG.

88. Eben dieſe Eigenſchaften finden Statt an Kreiſen, die ſich außerhalb berühren.

89. Sind D, E zwey gegebene Puncte, durch welche ein Kreis zu ziehen iſt, der einen gegebenen CFG berühre, ſo theile man die gerade DE in H ſo, daß DE × EH gleich ſey dem Rechtecke der Segmente einer von E an den Kreis CFG gezogenen geraden Linie, wie es das Rechteck CE × EG iſt, oder dem Quadrate der berührenden EK. Zieht man die ſchneidende durch den Mittelpunct B, ſo iſt CE × EG = (EB + BG)(EB — BG) = $EB^2 - BG^2$. Es iſt alſo DE : EK = EK : EH. Von H ziehe man an den gegebenen Kreis die berührende HG. Durch den Berührungspunct G ziehe man EG, welche den Kreis in C ſchneide. Durch die Puncte D, E, C ziehe man einen Kreis, ſo berührt dieſer den gegebenen in C.

Der Beweis beruht darauf, daß durch die Conſtruction die Dreyecke CED, HEG ähnliche ſind; daß der W. CFG = HGE, alſo auch der W. CDE = CFG iſt. Zu dieſen gleichen Winkeln am Umfange der beiden Kreiſe gehören gleiche Winkel an ihren Mittelpuncten, nämlich CAE = CBG. Daher iſt der W. ACE = BCG, und die Mittelpuncte der beiden Kreiſe liegen mit dem gemeinſchaftlichen Endpuncte der Halbmeſſer AC, BC in gerader Linie. Daher berühren ſich die beiden Kreiſe in C. (16. II.)

90. Ein Kreis um den Mittelpunct C (Fig. 35.) berührt die um A und B beſchriebenen Kreiſe in D, E. Die geraden durch A, B und D, E ſchneiden ſich in F. Dieſer Durchſchnittspunct iſt derſelbe für jede Größe und Lage eines Kreiſes, der die gegebenen um A, B beſchriebenen Kreiſe berührt.

Die gerade DE ſchneide den Kreis um A in G, den um B in H, und es ſeyn AG, BH gezogen. In dem Dreyeck DCE ſind die Winkel bey D und E ſich gleich, ſo wie in dem Dreyeck DAG die Winkel D und G. Da CD und AD, ſo wie CE und BE eine gerade ausmachen, ſo iſt W. CDE = ADG, und W. CED = BEH; alſo iſt der W. DEB = DGA, und AG parallel mit BE. Daher iſt AF : BF = AG : BE, und durch Zerlegung AF : AB = AG : AG — BE, folglich AF eine gegebene gerade Linie.

91. So wie AG und BE parallel ſind, ſind es auch AD und BH, daher iſt der W. DAG = HBE, und die Bogen DG, HE, ſo wie die zugehörigen Sectoren und Segmente ähnliche.

92. Die gerade durch die Mittelpuncte A und B, ſchneide den erſtern Kreis in K, L, den andern in M, N, und es werden GL, EN gezogen. Wegen der parallelen AG, BE ſind die Winkel GAF, EBF ſich gleich, alſo auch die Winkel GLA, ENB, und ihre Nebenwinkel. Ferner ſind in dem Viereck DGLK die Winkel bey D und K den Nebenwinkeln derer bey L und G gleich, das iſt den Winkeln FLG, FGL, oder den Winkeln FNE, FEN. Folglich ſind die Dreyecke FDK, FNE ſich ähnlich, und es iſt FK : FD = FE : FN. Daher iſt das Rechteck FD × FE ein gegebenes, und gleich dem FK × FN.

93. Wenn die Kreiſe um A und B gleich groß ſind, ſo iſt AF : BF = 1 : 1, das iſt, AF und BF ſind beide unendlich groß, und DE parallel mit AB.

94. Soll durch einen gegebenen Punct P ein Kreis beſchrieben werden, der zwey gegebene Kreiſe, die um A und B, berührt, ſo beſtimme man zuerſt den Punct F auf der geraden durch A, B, ſo, daß AF : BF = AD : BE ſey. Iſt EDP der geſuchte Kreis, und es wird an denſelben die FP gezogen, welche ihn in Q ſchneidet, ſo iſt

FP × FQ = FD × FE. Sind nun D, E die Berührungspuncte, ſo iſt FD × FE = FK × FN, alſo iſt FP × FQ = FK × FN, ein gegebenes Rechteck. Dadurch iſt FQ oder der Punct Q gegeben. Demnach iſt nun durch zwey Puncte, P, Q ein Kreis zu ziehen, der einen der gegebenen Kreiſe berührt. Daß dieſer auch den Kreis um B berührt, iſt noch zu erweiſen.

Es ſey QDP der um C beſchriebene Kreis, welcher den um A in D berührt. Man ziehe FD, welche den Kreis QDP in E ſchneide, ſo iſt FP × FQ = FD × FE. Da genommen iſt FP × FQ = FK × FN, ſo iſt FD × FE = FK × FN, und da D zugleich ein Punct auf dem Kreiſe um A iſt, ſo iſt FD × FG = FK × FL. Hieraus fließen die beiden Proportionen, FD : FK = FN : FE, und FD : FK = FL : FG. Alſo iſt FN : FE = FL : FG; die Dreyecke EFN, GFL ſind ſich ähnlich, und daher iſt EN : GL = FN : FL, auch ſind die Winkel bey N und L ſich gleich. Ferner, da AF : BF = AL : BN genommen iſt, ſo iſt AF — AL : BF — BN, oder FL : FN = AL : BN. Aus dieſer und der vorher gefundenen Proportion folgt EN : GL = BN : AL, oder EN : BN = GL : AL. Folglich ſind die Dreyecke BNE, ALG ſich ähnlich, und es iſt BE = BN, alſo iſt E ein Punct des Kreiſes um B. Da EN und GL parallel ſind, ſo iſt W. DEN = DGL, und wegen des W. BEN = AGL iſt W. BEH = AGD = EDC = DEC, alſo liegt BE mit CE in derſelben geraden Linie, und die Kreiſe um B und C berühren ſich in E.

95. Die Aufgabe, zu drey Kreiſen einen vierten zu finden, der von jenen berührt wird, löſet Vieta, wie vorher bemerkt iſt, dadurch auf, daß er ſie auf diejenige gründet, einen Kreis zu finden, der von zwey gegebenen Kreiſen berührt wird, und durch einen gegebenen Punct geht. Die Mittelpuncte der drey Kreiſe ſeyn, des erſten

A, des zweyten B, des dritten C. Aus dem Mittelpuncte C beſchreibe man einen Kreis, deſſen Halbmeſſer die Summe oder die Differenz der Halbmeſſer des erſten und dritten Kreiſes iſt; aus dem Mittelpuncte B einen Kreis, deſſen Halbmeſſer die Summe oder die Differenz des erſten und zweyten iſt. Hierauf beſchreibe man einen Kreis, der durch den Mittelpunct des erſten A gehe, und zugleich die beiden gezogenen Hülfskreiſe berühre. Der Mittelpunct deſſelben iſt derjenige des geſuchten. Der Halbmeſſer wird durch die bey den Hülfskreiſen gemachten Annahmen beſtimmt.

96. Es ſind hier vier Hauptfälle, nachdem man zu den Halbmeſſern der Hülfskreiſe entweder Summe oder Differenz der gegebenen Halbmeſſer genommen hat. Die drey Kreiſe berühren den gefundenen entweder alle auswärts, oder alle einwärts, oder zwey berühren ihn auswärts (einwärts), und einer einwärts (auswärts). Bey den beiden letztern Fällen finden jedesmahl drey Abänderungen Statt, nachdem man an jedem der gegebenen Kreiſe die innere oder die äußere Berührung annimmt. So hat die Hauptaufgabe acht verſchiedene Fälle.

97. Man kann dieſe Aufgabe noch in einer andern Geſtalt vortragen, nämlich in einem gegebenen Dreyeck ABC (Fig. 36.) einen Punct O zu finden, ſo daß die Unterſchiede, AO − CO; BO − CO, gegebene Größen ſeyn. Man ſetze $CO = z$, $AO = z + f$; $BO = z + g$, wo f und g auch beide ſubtractiv ſeyn können. Die Halbmeſſer der um A, B, C beſchriebenen gegebenen Kreiſe ſeyn α, β, γ, der Halbmeſſer des ſie alle drey berührenden $= x$, der in jedem beſondern Falle verſchieden iſt, ſo ſind, nach den vier vorher angezeigten Hauptfällen,

	I.	II.	III.	IV.
AO	$x + \alpha$	$x - \alpha$	$x + \alpha$	$x - \alpha$
BO	$x + \beta$	$x - \beta$	$x - \beta$	$x + \beta$
CO	$x + \gamma$	$x - \gamma$	$x - \gamma$	$x + \gamma$

In III. kann jeder einzelne der drey Halbmeſſer additiv, in IV. jeder einzelne ſubtractiv ſeyn. So entſtehen noch vier Abänderungen von III. und IV. welche hier mit den fortlaufenden Zahlen bezeichnet ſind.

	V.	VI.	VII.	VIII.
AO	$x - \alpha$	$x + \alpha$	$x - \alpha$	$x + \alpha$
BO	$x + \beta$	$x - \beta$	$x - \beta$	$x + \beta$
CO	$x - \gamma$	$x + \gamma$	$x + \gamma$	$x - \gamma$

Hieraus werden folgende Werthe von f und g durch die gegebenen Halbmeſſer erhalten.

I. II. $f = \pm(\alpha - \gamma)$; $g = \pm(\beta - \gamma)$.
III. IV. $f = \pm(\alpha + \gamma)$; $g = \mp(\beta - \gamma)$.
V. VI. $f = \mp(\alpha - \gamma)$; $g = \pm(\beta + \gamma)$.
VII. VIII. $f = \mp(\alpha + \gamma)$; $g = \mp(\beta + \gamma)$.

Die zuſammengehörigen Werthe von f und g ſind entweder zwey Unterſchiede der Halbmeſſer, oder zwey Summen, oder eine Summe und ein Unterſchied mit gegenſeitigem Wechſel.

98. Obgleich die Aufgabe kaum eine theoretiſche oder praktiſche Anwendung hat, ſo iſt ſie doch durch ſich ſelbſt beachtungswerth. Die analytiſche Auflöſung iſt lehrreich.

Man ſetze in dem Dreyeck ABC (Fig. 36.) die Seite AC $= a$; BC $= b$; den W. ACB $= 2\zeta$; ACO $= \zeta + \varphi$; BCO $= \zeta - \varphi$; CO $= z$; AO $= z + f$; BO $= z + g$.

Es iſt

$$\operatorname{coſ}(\zeta + \varphi) = \frac{a^2 + z^2 - (z + f)^2}{2az} = \frac{a^2 - f^2 - 2fz}{2az}$$

$$\cos(\zeta-\varphi)=\frac{b^2+z^2-(z+g)^2}{2bz}=\frac{b^2-g^2-2gz}{2bz}$$

(Trigonometrie, oder Dreyeck, 19. 20.).

Man ſetze $a^2 - f^2 = 2F$; $b^2 - g^2 = 2G$; ſo iſt

$$\cos(\zeta+\varphi)=\frac{F}{az}-\frac{f}{a};$$

$$\cos(\zeta-\varphi)=\frac{G}{bz}-\frac{g}{b}.$$

Aus dieſen Gleichungen kann man entweder den Winkel φ oder die Größe z wegſchaffen, um entweder eine Gleichung für z, oder eine für φ durch $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ zu erhalten. Das erſtere geſchieht durch Zerlegung der Coſinus von $(\zeta\pm\varphi)$ in Sinus und Coſinus von ζ und φ, oder kürzer folgendergeſtalt. Man ziehe OP und OQ ſenkrecht auf AC und BC, und verbinde PQ, ſo kann um das Viereck $CPOQ$ ein Kreis beſchrieben werden (23.), und es iſt $CO \times \sin PCQ = PQ$ (47.), und $CO^2 \times \sin 2\zeta^2 = PQ^2 = CP^2 + CQ^2 - 2CP \times CQ \times \cos 2\zeta$; (Dreyeck, 19.). Da

$$\frac{CP}{CO}=\cos(\zeta+\varphi),\text{ und }\frac{CQ}{CO}=\cos(\zeta-\varphi)$$

iſt, ſo iſt

$$\sin 2\zeta^2 = \cos(\zeta+\varphi)^2 + \cos(\zeta-\varphi)^2 - 2\cos(\zeta+\varphi).\cos(\zeta-\varphi).\cos 2\zeta.$$

In dieſer Gleichung ſetze man für $\cos(\zeta+\varphi)$ und $\cos(\zeta-\varphi)$ ihre obigen Werthe, ſo wird eine quadratiſche Gleichung für z erhalten, die unter dieſer Form,

$$Lzz - 2Mz + N = 0,$$

dargeſtellt werden kann, worin

$L = bbff + aagg - aabb \sin C^2 - 2abgf \cos C$;
$M = bbFf + aaGg - ab(Gf + Fg) \cos C$;
$N = bbF^2 + aaG^2 - 2abFG \cos C$.

Die Größe N iſt immer poſitiv, weil $N = (bF - aG)^2 + 2abFG - 2abFG \cos C$, und $\cos C < 1$ iſt. Die Coefficienten L und M mögen poſitiv oder negativ ſeyn.

99. Die Gleichung hat zwey Wurzeln, weil die Unterſchiede, f, g, poſitiv oder negativ ſeyn können, welches in der Frage nicht beſtimmt iſt, und nicht beſtimmt werden darf. Wir haben geſetzt, $AO - CO = + f$, und $BO - CO = + g$; es kann aber auch, ohne die Auflöſung weiter als in den Vorzeichen von f und g zu verändern, $CO - AO = + f$, und $CO - BO = + g$ geſetzt werden, welches eben ſo viel iſt, als f und g in Beziehung auf jene Annahmen negativ nehmen. Nimmt man f und g negativ, ſo bleiben F und G dieſelben mit derſelben Beſchaffenheit; die Coefficienten L und N bleiben auch ungeändert, und nur M wird negativ. Die Gleichung wird nun

$$Lzz + 2Mz + N = 0.$$

Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind dieſelben mit denen jener erſtern Gleichung, nur entgegengeſetzt (Gleichung, 35.). Daher werden die beiden Fälle, welche nur durch die Beſchaffenheit der Unterſchiede f und g verſchieden ſind, in einer einzigen Gleichung begriffen.

100. Es iſt hier ein ähnlicher Fall, als bey der Frage, aus dem Unterſchiede zweyer Zahlen, $x - y$, und ihrem Producte dieſe Zahlen zu finden. Die quadratiſche Gleichung, deren poſitive Wurzel die eine dieſer Zahlen iſt, giebt zugleich die andere als eine negative Größe, (Gleichung, 34.). Die Form, in welcher die Gleichung für z aufgeſtellt iſt, deutet zwar auf zwey poſitive Wurzeln, allein ſie muß entgegengeſetzte Wurzeln haben, weil CO nach den beiden Annahmen, $AO - CO = + f$ un

K

$BO - CO = + g$ eine andere Beziehung gegen AO und BO, ſo wie gegen f und g hat, als bey den Annahmen, $CO - AO = + f$ und $CO - BO = + g$. Es muß entweder L allein oder L mit M negativ ſeyn.

101. Bey der Anwendung auf die Frage von drey Kreiſen, die von einem vierten berührt werden ſollen, iſt ſchon vorher gefunden, daß $AO - CO$, ſo wie $BO - CO$ vier Paare gleicher und entgegengeſetzter Werthe hat. Bey jedem Paare verwandeln ſich äußere Berührungen in innere und umgekehrt. Daher zeigen entgegengeſetzte Wurzeln der Gleichung die entgegengeſetzte Beſchaffenheit der Berührung an. Man laſſe α den größten der drey gegebenen Halbmeſſer, γ den kleinſten bedeuten, und ſetze $f = \alpha - \gamma$; $g = \beta - \gamma$, ſo zeigt die poſitive Wurzel der Gleichung für z drey äußere Berührungen, hingegen die negative Wurzel drey innere an. Setzt man $f = + (\alpha + \gamma)$; $g = -(\beta - \gamma)$, ſo deutet die poſitive Wurzel der Gleichung auf eine äußere Berührung an dem größten Kreiſe, und auf innere Berührung an den beiden andern; die negative Wurzel aber auf eine innere an jenem und äußere an dieſen. So auch in den übrigen Fällen.

102. Exempel. Es ſey $AC = a = 30$; $BC = b = 20$; $C = 60°$; $f = 8$; $g = 4$: ſo iſt

$L = - 249200$; $M = + 1066400$;

$N = + 54913600$.

Dadurch wird unſere Gleichung nach der Diviſion mit 400,

$$623 z^2 + 5332 z = 137284.$$

Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind $z = + 11, 17..$ und $z = - 19, 73..$ Folglich

$AO = z + f = + 19, 17..$ und $- 11, 73..$;

$BO = z + g = + 15, 17..$ und $- 15, 73..$

Die Verneinungen von AO und BO beziehen ſich nur

darauf, daß z aus einer Gleichung gefunden iſt, die eigentlich für den poſitiven Werth von z gilt. Die Lage des Punctes O durch die verneinten Werthe wird eben ſo gefunden, als wenn ſie poſitiv genommen werden. Setzt man $\alpha = 14$; $\beta = 10$; $\gamma = 6$, ſo iſt $x + \alpha = 19, 17$; und $x = 5, 17$, der geſuchte Halbmeſſer des Kreiſes für die äußern Berührungen; und $x = 25, 73$ für die innern Berührungen.

103. Die Aufſöſung in (98.) iſt von Euler in der (80.) angezeigten Abhandlung entlehnt. Die algebraiſchen Erläuterungen habe ich beygefügt, da ſie mir beſonders in Abſicht der Bedeutung poſitiver und negativer Wurzeln nützlich ſchienen. Euler macht zwar wegen der negativen Wurzeln auch die Bemerkung, daß ſie nicht eigentlich den vorgelegten Fall angehen, ſondern denjenigen, da die Halbmeſſer der gegebenen Kreiſe, α, β, γ, entgegengeſetzte Vorzeichen bekommen, wodurch die Gleichung nur in dem Vorzeichen des zweyten Gliedes eine Veränderung erleidet; und die poſitive Wurzel derſelben die negative der zuerſt gefundenen Gleichung iſt. Er will alſo die negative Form hier vermeiden, welches nicht nöthig ſeyn möchte; auch ſcheint er es als möglich anzuſehen, daß die Gleichung für z zwey poſitive Wurzeln habe.

104. Wenn man die Aufgabe in (97.) ohne Rückſicht auf die Berührungen an drey Kreiſen behandelt, ſo hat ſie nur zwey Hauptfälle, deren jeder zwen beſondere zuläßt. Denn man kann erſtlich AO — CO ſowohl + f als — f ſetzen, und dabey BO — CO bey jener Annahme = + g, bey dieſer = — g annehmen, allein auch umgekehrt bey der erſtern Annahme jenes Unterſchiedes den andern = — g, und bey der zweyten = + g ſetzen. Der geometriſche Ort des Punctes, an welchem die nach zwey gegebenen Puncten gezogenen geraden einen gegebenen Unterſchied haben, iſt eine Hyperbel, deren Brennpuncte dieſe beiden Puncte ſind. Es liegen alſo die Puncte O, für welche der Unterſchied, ſowohl von AO und CO als

von BO und CO, eine gegebene Größe hat, auf den Durchſchnittspuncten dieſer beiden Hyperbeln, deren vier oder zwey ſeyn können. Die Zeichnung einer Hyperbel iſt durch die Aſymptoten leicht, und iſt auch als eine theoretiſche gar nicht verwerflich, wenn gleich die Aufgabe durch zwey verſchiedene quadratiſche Gleichungen, nicht durch eine biquadratiſche, aufgelöſet wird. Sie vereinigt beide Auflöſungen durch zwey gleichartige Conſtructionen, die man vollkommen leicht überſieht.

Die Aufgabe von den drey Kreiſen, welche von einem vierten berührt werden, kann nicht durch die Interſectionen zweyer Hyperbeln aufgelöſet werden, weil hier nicht der Fall iſt, daß, wenn $AO - CO = \pm f$, und $BO - CO = \pm g$ iſt, däneben noch ſey $BO - CO = \mp g$, oder wenn dieſes letztere bey der Annahme, $AO - CO = \pm f$, Statt hat, dann auch ſey $BO - CO = \pm g$.

105. Die Lage der geraden Linie zu finden, welche zwey gegebene Kreiſe berührt, iſt eine Aufgabe, welche in der Optik und Aſtronomie nützlich iſt. Die Mittelpuncte der beiden Kreiſe ſeyn A, B, (Fig. 37.) und der um B der kleinere. Die berührende kann entweder ſo liegen, daß ſie die gerade AB jenſeits B in E ſchneide, wobey die Berührungspuncte, C, D, beide auf dieſelbe Seite von AB fallen, oder ſie ſchneidet die AB zwiſchen den Puncten A, B, und die Berührungspuncte F, H, liegen auf verſchiedenen Seiten der AB.

Mit der berührenden CDE ſey BK parallel, welche AC in K ſchneidet. Da der W. ACE ein rechter iſt, ſo iſt der W. AKB auch ein rechter, und K liegt auf dem Umfange eines Halbkreiſes, deſſen Durchmeſſer AB iſt. Da auch BDE ein rechter iſt, ſo iſt $CK = BD$, und AK der Unterſchied von AC und BD. Man trage demnach in den über AB beſchriebenen Halbkreis die Chorde $AK = AC - BD$, ſo ſchneidet dieſe verlängert den Kreis um A in C, und die mit KB parallele CDE iſt die geſuchte berührende.

Zweytens ſey FH die in den ungleichnamig liegenden Puncten F, H berührende, und AL ihr parallel, welche von BH, der verlängerten, in L geſchnitten werde. Da der W. ALB ein rechter iſt, gleich den rechten bey F und H, ſo liegt L auf dem Umfange des über AB beſchriebenen Halbkreiſes, und es iſt BL = AF + BH. Man trage alſo in dieſen Halbkreis die Chorde BL = AF + BH, welche den Kreis um B in H ſchneide, ſo iſt H der Berührungspunct, und die mit AL parallele HF berührt den Kreis um A in F.

106. Zur arithmetiſchen Auflöſung hat man die Linie AE zu ſuchen. Wegen der ähnlichen Dreyecke ACE, BDE iſt AC : BD = AE : BE, und durch Zerlegung, AC — BD : AC = AB : AE, oder AC — BD : BD = AB : BE. Das Verhältniß von AE : AC giebt den Sinus des Winkels E. — Auf ähnliche Art iſt AF : BH = AC : BG, und daraus durch Zuſammennehmen, AF + BH : AF = AB : AG, oder auch AF + BH : BH = AB : BG. Das Verhältniß von AF : AG giebt den Sinus des Winkels G.

107. Eine Aufgabe am Kreiſe, die in der Katoptrik vorkommt, aber eigentlich eine rein geometriſche iſt, iſt dieſe: an einem Kreisumfange diejenigen Puncte zu finden, an welchen die dahin von zwey, in der Ebene des Kreiſes gegebenen, Puncten gezogenen geraden Linien, gleiche Winkel mit dem Halbmeſſer machen. Sie iſt durch die gemeine Geometrie nicht auflösbar.

Es ſind A, B (Fig. 38.) die gegebenen Puncte, C iſt der Mittelpunct des gegebenen Kreiſes, P ein Punct, an welchem die Winkel APC und BPC gleich groß ſind. Man ſetze AC = a; BC = b; PC = c, und den W. ACB = 2α. Dieſen Winkel halbire man durch die gerade CD, und verlängere PC nach CM. Der Winkel DCM ſey = φ. In dem Falle der Figur iſt AC > BC, und daher liegt CM von CD ab nach AC hin, ſo

daß ACM $= \alpha - \varphi$; BCM $= \alpha + \varphi$ iſt*). In den beiden Dreyecken APC und BPC iſt (Trigonometriſche Formeln)

$$\text{tang APM} = \frac{a \sin(\alpha - \varphi)}{c + a\cos(\alpha - \varphi)},$$

$$\text{tang BPM} = \frac{b \sin(\alpha + \varphi)}{c + b\cos(\alpha + \varphi)}.$$

Da die beiden Winkel gleich groß ſind, ſo ſind dieſe Brüche ſich gleich, und man erhält daraus die Gleichung,

$$a \sin(\alpha - \varphi)(c + b\cos(\alpha + \varphi)) =$$
$$b \sin(\alpha + \varphi)(c + a\cos(\alpha - \varphi)).$$

Durch Entwicklung dieſer Gleichung, und durch Aufföſung der Sinus und Coſinus der zuſammengeſetzten Winkel in diejenigen der einfachen, verwandelt ſie ſich in dieſe,

$$(ac - bc)\sin\alpha . \cos\varphi - (ac + bc)\cos\alpha \sin\varphi$$
$$= 2ab \sin\varphi . \cos\varphi.$$

In dieſer muß entweder $\sin\varphi$ durch $\cos\varphi$, oder $\cos\varphi$ durch $\sin\varphi$ ausgedruckt werden. Oder man führe ſtatt beider die $\text{tang}\,\varphi = x$ ein, ſo iſt $\sin\varphi = \frac{x}{\sqrt{(1 + xx)}}$; $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1 + xx)}}$ (Goniometrie, 14.). Auch ſetze

*) Der Kreis, der durch die Puncte A, C, P beſchrieben wird, iſt größer als der durch B, C, P gezogene, weil die Segmente über AC und BC, welche die gleichen Winkel bey P faſſen, ähnlich ſind (3.), und AC größer als BC genommen iſt. Wird nun der W. CPB auf CPA gelegt, ſo fällt B innerhalb des durch A, C, P gelegten Kreiſes, und es iſt der W. PAC kleiner als PBC, daher iſt der W. ACM kleiner als BCM, folglich W. ACM kleiner als ACD.

man zur Abkürzung $(ac + bc)\cos\alpha = A$; $(ac - bc)\sin\alpha = B$; $2ab = C$, ſo entſteht die Gleichung

$$(B - Ax)\sqrt{(1 + xx)} = Cx.$$

Um dieſe rational zu machen, muß ſie quadrirt werden, wodurch die geordnete Gleichung hervorgeht,

$$A^2x^4 - 2ABx^3 - (C^2 - A^2 - B^2)x^2$$
$$- 2ABx + B^2 = 0.$$

Es iſt $A^2 + B^2 = (a + b)^2 c^2 - 4abc^2 \sin\alpha^2$. In dem Falle der Figur iſt b kleiner als a, und größer als c, daher iſt C^2, welches $4a^2b^2$ iſt, größer als $A^2 + B^2$. Deswegen iſt der Coefficient von x^2 durch $-(C^2 - A^2 - B^2)$ ausgedruckt, nicht durch $+(A^2 + B^2 - C^2)$.

108. Da die Gleichung für tang φ oder x auf den vierten Grad ſteigt, ſo läßt die Aufgabe vier Auflöſungen zu. Wenn alle vier möglich ſind, ſo hat die Gleichung zwey poſitive und zwey negative Wurzeln (Gleichung, 88.), daher vier Puncte am Kreiſe der Aufgabe gemäß Statt finden. Die gegebene Auflöſung iſt auf den Fall eingerichtet, da die gleichen Winkel auf verſchiedenen Seiten des Halbmeſſers CP liegen, und da der Punct P jenſeits des Mittelpunctes ſich befindet. Liegt er dieſſeits des Mittelpunctes, wie der Punct p, ſo iſt erſtlich der Winkel Apm größer als Bpm, wenn Cpm die verlängerte Cp iſt *). Es ſey nun DCm $= \varphi$, ſo iſt ACm $= \alpha + \varphi$, und BCm $= \alpha - \varphi$.

Ferner iſt $\tan Apm = \dfrac{a\sin(\alpha + \varphi)}{a\cos(\alpha + \varphi) - c}$, und

*) Es wird hier eben ſo wie vorher erwieſen, daß der Winkel pAC kleiner als pBC iſt. Da die Winkel ACp, BCp die Unterſchiede jener Winkel von den gleichen äußern bey p ſind, ſo iſt ACp oder ACm größer als BCm.

$\tang \mathrm{Bpm} = \frac{\mathrm{b} \sin(\alpha - \varphi)}{\mathrm{b} \cos(\alpha - \varphi) - \mathrm{c}}$. Daraus wird auf gleiche Art wie vorher,

$$(\mathrm{ac} - \mathrm{bc}) \sin \alpha . \cos \varphi + (\mathrm{ac} + \mathrm{bc}) \cos \alpha . \sin \varphi = 2\mathrm{ab} \sin \varphi . \cos \varphi,$$

oder

$$(\mathrm{B} + \mathrm{Ax}) \sqrt{(1 + \mathrm{xx})} = \mathrm{Cx}.$$

Hieraus entſteht die rationale Gleichung

$$\mathrm{A}^2 \mathrm{x}^4 + 2 \mathrm{AB} \mathrm{x}^3 - (\mathrm{C}^2 - \mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2) \mathrm{x}^2 + 2 \mathrm{ABx} + \mathrm{B}^2 = 0.$$

Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind der Größe nach dieſelben mit denen der erſten Gleichung, nur entgegengeſetzt. Die eine der negativen Wurzeln jener gehört alſo für dieſen zweyten Fall. In der Gleichung für denſelben iſt ſie poſitiv, weil der W. DCm darin poſitiv genommen wird, der in Beziehung auf DCM negativ iſt.

109. Die beiden gleichen Winkel an dem Halbmeſſer des Kreiſes können auch auf derſelben Seite liegen, wie in Fig. 39. Hier iſt $\mathrm{ACM} = \varphi - \alpha$; $\mathrm{BCM} = \varphi + \alpha$, und $\tang \mathrm{APM} = \frac{\mathrm{a} \sin(\varphi - \alpha)}{\mathrm{a} \cos(\varphi - \alpha) - \mathrm{c}}$;

$\tang \mathrm{BPC} = \frac{\mathrm{b} \sin(\varphi + \alpha)}{\mathrm{c} - \mathrm{b} \cos(\varphi + \alpha)}$. Wenn $\varphi + \alpha$ ſtumpf iſt, iſt der zweyte Theil des Nenners von tang BPC additiv. Daraus wird durch dieſelbe Rechnung wie die zuerſt geführte,

$$(\mathrm{ac} + \mathrm{bc}) \cos \alpha . \sin \varphi - (\mathrm{ac} - \mathrm{bc}) \sin \alpha . \cos \varphi = 2 \mathrm{ab} \sin \varphi . \cos \varphi,$$

oder

$$(\mathrm{Ax} - \mathrm{B}) \sqrt{(1 + \mathrm{xx})} = \mathrm{Cx}.$$

Durch die Quadrirung der Theile dieſer Gleichung erhält man völlig dieſelbe biquadratiſche Gleichung wie für den erſten Fall. Die zwente poſitive Wurzel derſelben gilt alſo für dieſen dritten Fall. Der Winkel DCM oder φ hat in beiden Fällen dieſelbe Lage.

110. Auf der andern Seite des Kreiſes (Fig. 39.) ſey in p der W. ApC = Bpm, und Cpm eine gerade. Setzt man DCm = φ, ſo iſt ACp = $\alpha + \varphi$; BCp oder BCm = $\varphi - \alpha$, und es iſt

$$\tan ApC = \frac{a \sin(\alpha + \varphi)}{c - a \cos(\alpha + \varphi)};$$

$$\tan Bpm = \frac{b \sin(\varphi - \alpha)}{b \cos(\varphi - \alpha) - c}.$$ Hieraus ergiebt ſich die Gleichung,

$$(ac - bc) \sin\alpha . \cos\varphi + (ac + bc) \cos\alpha . \sin\varphi = 2ab \sin\varphi . \cos\varphi,$$

dieſelbe wie für den zwenten Fall. Die zwente poſitive Wurzel der biquadratiſchen Gleichung für dieſen Fall gehört alſo für den vierten, oder die beiden negativen Wurzeln der für den erſten Fall gefundenen biquadratiſchen Gleichung geben den Punct p in Fig. 38. und 39.

111. Es iſt auf jeden der vier Fälle die Rechnung unmittelbar eingerichtet worden, um zu zeigen, wie das Reſultat daſſelbe iſt, ſo daß, bey dem Gebrauche entgegengeſetzter Werthe von tang φ, ſie alle unter derſelben Gleichung begriffen ſind. Dieſes iſt ein gutes Beyſpiel zu der Bemerkung über die Anwendung des Entgegengeſetzten in Th. II. S. 110. Die Formeln für die gleichen Tangenten werden aber auch aus den für den erſten Fall gefundenen durch die Anwendung des Entgegengeſetzten unmittelbar hergeleitet. In dem zwenten iſt der W. DCm oder φ negativ; und die geraden Cm, Cp liegen nach derſelben Richtung, da ſie in dem erſten Falle entge-

gengeſetzte halten. Daher iſt C p oder c negativ zu ſetzen. In dem dritten Falle bleibt φ poſitiv, aber c iſt negativ, der Winkel A P M iſt negativ, und B P M ſtumpf, daher die Tangenten beider Winkel negativ ſind, auch iſt $\varphi > \alpha$. In dem vierten Falle ſind φ und c negativ, der W. B p m iſt negativ, und A p m iſt ſtumpf; daher ſind die Tangenten beider Winkel negativ; auch iſt $\varphi > \alpha$.

112. Die numeriſche Auflöſung der biquadratiſchen Gleichung wird nach einer der Methoden in dem Artikel, Gleichung, 96 — 111, bewerkſtelligt. Sie kann mühſam ſeyn. Die irrationale Gleichung läßt ſich leichter als die rationale auflöſen, und zwar durch Annäherung. Es iſt für den erſten Fall, $A \tang \varphi + C \sin \varphi = B$; für den dritten, $A \tang \varphi - C \sin \varphi = B$; für den zweyten und vierten, $C \sin \varphi - A \tang \varphi = B$. Man hat alſo vier Winkel zu ſuchen, die dieſen Bedingungen Genüge leiſten. Für die dritte ſind zwey Winkel möglich, ein größerer und ein kleinerer.

113. Die Aufgabe hat zuerſt ein arabiſcher Mathematiker, Alhazen, vorgetragen. Seine Auflöſung in dem optiſchen Werke deſſelben, welches Risner mit der Optik des Vitellio im J. 1572 herausgegeben hat, iſt ſehr weitläuftig und verworren. Ob er ſie ſelbſt erfunden oder von andern genommen habe, kann man nicht wiſſen. Barrow findet die Aufgabe ſehr ſchwer, und weiß in ſeinen Lection. Opticis, IX. nichts beſſers zu geben, als nur die Alhazeniſche etwas erleichterte Auflöſung. Huygens zeigte, wie die geſuchten Puncte durch die Durchſchnitte einer Hyperbel mit dem gegebenen Kreiſe gefunden werden, nach drey verſchiedenen Conſtructionen. Er fügt auch eine algebraiſche Auflöſung hinzu, die aber zu unbequem iſt, wiewohl ſie daſſelbe Reſultat, was hier für den zweyten Fall durch $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ gefunden iſt, liefert. — Käſtner hat in den Novis Comment. Soc. Goetting. T. VII. a. a. 1776 eine ausführliche Abhandlung über dieſe Aufgabe geliefert, worin die verſchiedenen Fälle derſelben beſonders erörtert werden. Auch wird

darin das angezeigte Verfahren, die irrationale Gleichung ſtatt der rationalen biquadratiſchen aufzulöſen, an Exempeln gezeigt. Die hier vorgetragene Auflöſung iſt kein Auszug aus jener Abhandlung. Die Aufgabe gehört jetzt zu den leichten, obgleich noch Montücla in der zweyten Ausgabe ſeiner Geſchichte der Mathematik ſagt, daß ſie eine weitläuftige und tief geſchöpfte Analyſis erfordere.

114. Man bemerke noch, daß die Puncte P und p (Fig. 38.) diejenigen ſind, worin zwey Ellipſen zu dem Brennpuncte A und B, den gegebenen Kreis berühren. Denn die in P ſich berührenden beiden Curven haben daſelbſt eine gemeinſchaftliche berührende gerade, mit welcher die von den beiden Brennpuncten A, B gezogenen geraden gleich große Winkel machen (Ellipſe, 43.), daher die Winkel mit der Normale PC ſich gleich ſind. Eben ſo an dem Puncte p. In Fig. 39. ſind P und p die Puncte, in welchen zwey Ellipſen, deren Brennpuncte A, B ſind, den gegebenen Kreis ſenkrecht ſchneiden. Es ſind nämlich CM, Cm berührende an den Ellipſen.

Auf ähnliche Art ſind in Fig. 38. P. und p. die Puncte, worin zwey Hyperbeln, deren Brennpuncte A, B ſind, den Kreis unter einem rechten Winkel ſchneiden, ſo wie in Fig. 39. P und p. die Puncte ſind, an welchen zwey Hyperbeln zu den Brennpuncten A, B den Kreis berühren. (Hyperbel, 76.).

115. Es ſind noch viele Sätze und Aufgaben über die in einem Kreiſe oder an denſelben, oder an mehrere Kreiſe gezogenen geraden Linien übrig: es wird aber an den bisher vorgetragenen Sätzen genügen, welche die wichtigſten Eigenſchaften des Kreiſes enthalten. Nur eine Aufgabe verdient wegen ihrer Schwierigkeit angeführt zu werden. Sie iſt, in einem Kreiſe ein Dreyeck zu zeichnen, deſſen Seiten jede durch einen gegebenen Punct gehen. Zwey beſondere Fälle dieſer Aufgabe ſind in dem Artikel, Analyſis als Methode, aufgelöſet. Daſelbſt (5. Aufg. Fig. 6. Tab. I.) gehen zwey Seiten des Dreyecks PMN nach den gegebenen Puncten A, B, und die dritte MN

iſt der A B parallel. Eben daſelbſt (6. Aufg. Fig. 7.) gehen zwey Seiten des Dreyecks P M N nach den gegebenen Puncten A, B, und die dritte M N iſt nach einem gegebenen Puncte C gerichtet, der aber auf der geraden A B liegt. Caſtillon hat von jener Aufgabe eine geometriſche Auflöſung in den Nouveaux Mém. de l'Académie de Berlin, a. 1776. geliefert. Sie war ihm ehedem von Cramer aufgegeben, dem ſie ſelbſt von einem ungenannten Geometer vorgelegt worden war. Die Conſtruction, ſo wie der ganze Weg dazu iſt ſehr verwickelt. La Grange ward dadurch veranlaßt, eine algebraiſch-trigonometriſche Auflöſung mitzutheilen. Eb. daſ. S. 284. ff. Sie iſt nicht ſchwer, allein das Reſultat, die quadratiſche Gleichung für einen zur Auflöſung geſuchten Winkel hat äußerſt zuſammengeſetzte Coefficienten. Bald nachher haben Euler und Fuß ebenfalls Conſtructionen dieſer Aufgabe mitgetheilt, in den Actis Acad. Petrop. T. IV. a. a. 1780. Parte I. pag. 95. et 99. Lexell ſtellte darüber, nach dem Muſter der von la Grange gebrauchten Methode, eine lange analytiſche Rechnung an, und leitete daraus eine Conſtruction her, woran Euler gezweifelt hatte, daß es möglich wäre. Auch gab er einen analytiſchen Commentar zu der von Caſtillon gewieſenen Conſtruction, in den Actis Acad. Petrop. T. IV. p. II. p. 70 — 90. Alle dieſe Auflöſungen ſind ſehr ſchwierig. Ein junger Neapolitaner, Giordano di Ottajano fand in ſeinem 17ten Jahre eine ſo einfache Conſtruction, daß ſie in Anfangsgründen Platz finden könnte, und zwar auf einem ſehr natürlichen und kurzem Wege. Ja er erweiterte ſo gar die Aufgabe dahin, daß er auf rein geometriſche Weiſe zeigte, wie in einem gegebenen Kreiſe ein Vieleck von irgend einer Anzahl Seiten eingeſchrieben werden kann, deſſen Seiten verlängert durch eben ſo viele gegebene Puncte gehen. Sein Aufſatz ſteht in den Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana. T. IV. Verona 1788. p. 4 — 17. Malfatti, Profeſſor der Mathematik zu Ferrara, welcher von dieſen Auflöſungen eines Jünglings gehört hatte, beeiferte ſich, auch ſolche rein

geometriſche Auflöſungen zu finden, welches ihm auch gelang. Seine Auflöſungen ſind in demſelben Bande jener Sammlung enthalten. S. 201 — 205. Beide Auflöſungen zeigen, daß die Geometrie, wo es auf Lagen der Linien ankommt, durch ihre ſehr einfachen Mittel viel mehr vermag, als die Analyſis durch ihre weitgreifenden Methoden, weil dieſe die Winkel nur mittelbar durch die Sinus und Tangenten in Rechnung bringt. Sie dienen auch als Beyſpiele, zu zeigen, wie ſehr die reine Geometrie zur Übung des mathematiſchen Geiſtes beförderlich iſt.

116. Ottajano gründet ſeine Methode auf diejenige, die ſchon von den Alten bey der Auflöſung einer ähnlichen eingeſchränktern Aufgabe gebraucht iſt; derjenigen, die in dem Artikel, Analyſis als Methode, 6. Aufg. (Th. I. S. 96.) vorgetragen worden. Die Einfachheit der Auflöſung macht ſie werth, hier mitgetheilt zu werden. Sie giebt ein ſchönes Beiſpiel der geometriſchen Analyſis.

117. Es ſind A, B, C (Fig. 40.) die gegebenen Puncte, DEFG iſt der gegebene Kreis; es ſoll in demſelben das Dreyeck DEF gezeichnet werden, deſſen Seiten verlängert durch die gegebenen Puncte gehen. Es ſey geſchehen, was verlangt wird. Zuerſt ziehe man EG parallel mit AB, dann die GF, welche verlängert die AB in H ſchneide. Dieſer Punct iſt für jede Lage der Puncte E, F derſelbe. Denn es iſt der W. BHF = FGE = FDE. Daher ſind die Dreyecke FBH, ABD ſich ähnlich, und es iſt AB: BD = BF:BH, alſo AB × BH = DB × BF. Das Rechteck DB × BF iſt unveränderlich (35.), und ſo groß als das Quadrat der berührenden, die von B an den Kreis gezogen iſt (36.). Dadurch iſt das Rechteck AB × BH gegeben, folglich auch BH und der Punct H.

Zweytens verbinde man den gefundenen Punct H mit dem gegebenen dritten Puncte C, ziehe EI paral-

lel mit HC, und die gerade IG, welche HC (die verlängerte) in K ſchneide. Es iſt der W. HCF = FEI = FGK (22.) Daher ſind die Dreyecke CHF und GHK ſich ähnlich, und es iſt HC:HF = HG:HK, alſo FH × HG = CH × HK. Da FH × HG ein gegebenes Rechteck iſt, ſo iſt CH × HK gegeben, alſo auch der Punct K.

Da EG und EI jene mit AB, dieſe HC parallel ſind, ſo iſt der W. IEG = CHB ein gegebener. Man ziehe aus dem Mittelpuncte L des Kreiſes die Halbmeſſer LG, LI, ſo iſt der W. ILG gegeben, alſo auch LGI und der W. LGK. Beſchreibt man über der gegebenen LK einen Kreisabſchnitt, der den W. LGK faßt (32.), ſo wird der Punct G gegeben. Durch die gerade HG wird der eine Punct F des geſuchten Dreyecks, durch die gerade BFD der zweyte Punct D, durch die gerade CFE der dritte Punct E gegeben, in welchem auch die gerade AD den Kreis ſchneidet. — Der Beweis der Conſtruction aus den gemachten Annahmen muß zeigen, erſtlich, daß EI parallel mit HC iſt, dann (wegen IEG = CHB), daß EG parallel mit AB iſt, ferner, daß der W. ADB = BHF, und daß auch der W. EDF = BHF, alſo AD und ED in eine gerade fallen.

Man bemerke noch, daß das Rechteck IK × KG gegeben wird, und daß IG die Chorde eines gegebenen Winkels am Umfange iſt. Daher kann man auch die Länge von KI oder KG durch Conſtruction ſuchen, wie in der 2. Aufgabe des Artikels, Anwendung der Geometrie auf die Algebra, oder nach Euklids Elementen VI. 29.

Das über LK beſchriebene Kreisſegment ſchneidet den gegebenen Kreis in zwey Puncten, ſo wie auch der mit dem Halbmeſſer KI oder KG beſchriebene Kreis. Da EG mit AB und EI mit HK parallel ſeyn muß,

ſo ergiebt ſich daher, welcher Durchſchnitt der brauchbare iſt.

118. Um die Methode, deren ſich Ottajano für irgend ein in den Kreis beſchriebenes Vieleck bedient, begreiflich zu machen, wende ich ſie auf das Dreyeck und Viereck an, welches der Erfinder nicht gethan hat. Für das Viereck gebraucht er ein anderes Verfahren, welches dem für das Dreyeck angewandten ähnlich iſt.

119. Es iſt MNO (Fig. 41.) der gegebene Kreis; A, B, C ſind drey gegebene Puncte, durch welche die drey Seiten des Dreyecks MNO gehen. Man ziehe MT parallel mit AB, dann TO, welche AB in G ſchneide; ferner GC, und mit dieſer die parallele TV; endlich VM, welche verlängert die gleichfalls verlängerte CG in H treffe. Es iſt der W. $BAN = NMT = NOT = BOG$, alſo ſind die Dreyecke ABN und OBG ſich ähnlich. Gleichfalls ſind die Dreyecke GCO und MCH ſich ähnlich, da der W. $HGO = GTV = OMV$, alſo der W. $CGO = CMH$ iſt. Oder: der W. $COG = MOT = MVT = MHC$.

Da alſo $AB \times BG = NB \times BO$, ſo wie $GC \times CH = MC \times CO$ iſt, ſo ſind die Puncte G und H gegeben. Auch iſt der Winkel $VTM = AGH$, wegen der mit AG und GH parallelen TM und TV. Es ſey L der Mittelpunct des Kreiſes, ſo iſt der W. $MLV = 2\,MTt$, dem Nebenwinkel von MTV. Es iſt nämlich MTt einem Winkel an dem Umfange gleich, der auf dem Bogen MTV ſteht. Daher iſt der Winkel LMV oder LVM gegeben, und dadurch der Punct M, wie in der erſten Auflöſung. — Den Punct M kann man auch dadurch finden, daß das Rechteck $VH \times HM$, und die Linie VM gegeben werden.

120. Es ſey nun in einem gegebenen Kreiſe ein Viereck zu zeichnen, deſſen Seiten durch vier gegebene

Puncte gehen. Der Kreis ſey MNOP (Fig. 42.), die gegebenen Puncte A, B, C, D. Es ſey MNOPM das geſuchte Viereck, ſo wie die Figur es zeigt. Durch den Punct M ziehe man MT parallel mit AB; ferner durch T und den dritten Punct des Vierecks O die TO, welche verlängert AB in G ſchneide. Hierauf verbinde man GC, ziehe damit parallel die TV, dann durch V und den vierten Punct P des Vierecks die VP; welche die GC in H treffe. Noch verbinde man HD, ziehe mit HD die parallele VU, und dann durch U und den auf P folgenden Punct des Vierecks M, das iſt, den erſten, die UM, welche DH in K treffe. Es iſt nun, wie bey dem Dreyeck (119), $AB \times BG = NB \times BO$; $GC \times CH = OC \times CP$; $HD \times DK = PD \times DM$. Alſo ſind die Puncte G, H, K gegeben. Die Chorde MU wird hier nicht gegeben, wie es mit MV in der Aufgabe von dem einzuzeichnenden Dreyeck der Fall war, weil der Bogen MT unbekannt bleibt. Aber der Bogen TU, welcher den Winkel TVU = GHK faßt, iſt gegeben, und es iſt alſo der W. TMU bekannt, welcher dem Nebenwinkel von UVT gleich iſt. Man verlängere die gerade KMU bis am AB, in a, ſo iſt der W. KaA gegeben, und es iſt alſo nur nöthig an irgend einen Punct der AB einen Winkel zu legen, der dem W. KaA gleich iſt. Eine parallele mit dem andern Schenkel dieſes Winkels durch K giebt die Linie Ka. Dadurch wird der Punct M auf dem Umfange des Kreiſes beſtimmt, und durch dieſes das geſuchte Viereck.

Verlängert man KD bis an AB in b, ſo iſt das Dreyeck GbH ähnlich dem Dreyeck KBA. Denn es iſt der W. GHb der Nebenwinkel von GHK, der dem TVU gleich iſt. Daher iſt $Kb \times bH = ab \times bG$.

121. Durch das für das Dreyeck und Viereck gezeigte Verfahren kann man die Aufgabe für irgend ein Vieleck auflöſen. Das Vieleck werde als gezeichnet an-

genommen. Nachdem auf der geraden zwiſchen zwey der gegebenen Puncte ein ſolcher Theilungspunct, wie dort G und H ſind, beſtimmt worden, verbindet man dieſen mit dem nächſtfolgenden der gegebenen Puncte, zieht mit der verbindenden an dem Umfange des Kreiſes eine parallele durch den zweyten Endpunct der vorhergehenden Parallele, dann durch den Endpunct jener und den nächſtfolgenden Winkelpunct des Vielecks eine gerade, welche jene verbindende in einem Puncte trifft. Von dieſem nimmt man aufs neue dieſelbe Conſtruction vor, bis man auf den Anfangspunct kommt. Die gerade durch dieſen Anfangspunct und den zuletzt beſtimmten Theilungspunct ſchneidet bey einer ungeraden Anzahl Seiten des Vielecks einen gegebenen Bogen des Kreiſes ab, und macht daher mit dem Halbmeſſer einen gegebenen Winkel; bey einer geraden Anzahl Seiten macht ſie einen gegebenen Winkel mit der geraden durch die beiden unter den gegebenen Puncten, mit welchen der Anfang der Conſtruction gemacht war. Vermittelſt dieſes gegebenen Winkels wird der Punct M des Vielecks, und daraus das Vieleck ſelbſt beſtimmt.

122. Eine nützliche Anwendung der Aufgabe in (32.) iſt folgende: Es ſoll in einem Dreyeck ABC (Fig 43.) der Punct P gefunden werden, an welchem die Winkel der nach den Ecken des Dreyecks gezogenen geraden, APB, APC, BPC, eine gegebene Größe haben. Man lege an AB die gerade AD unter dem gegebenen Winkel DAB = APB, ſetze auf dieſelbe die ſenkrechte AE, welche von der auf AB in B ſenkrechten BE in E geſchnitten werde. Über AE als Durchmeſſer beſchreibe man einen Kreis, ſo iſt in dieſem der Bogen APB der geometriſche Ort für alle Winkel über AB, welche dem gegebenen DAB gleich ſind. Gleichfalls lege man an AC die gerade AF unter dem gegebenen Winkel FAC = APC, ſetze darauf in A die ſenkrechte AG, welche von der auf AC in C ſenkrechten CG in G geſchnitten werde, beſchreibe über AG als Durchmeſſer einen Kreis, ſo iſt in dieſem der Bogen APC der Ort für alle Winkel über

durch ſich ſelbſt erwecken. Als gewöhnliche Erklärungen der krummen Linie führt er an: daß ſie eine Linie ſey, deren Puncte in verſchiedenen Richtungen ſind; oder eine verſchiedentliche Lage, die einen in Beziehung auf die andern haben. Bey jener Erklärung miſcht ſich der Begriff von Richtung und Bewegung ein; bey dieſer iſt zu erinnern, daß zwiſchen zwey Puncten kein Unterſchied der Lage weiter als in Betracht ihrer Entfernungen von einander Statt findet.

Die Unterſuchung der krummen Linien und krummen Flächen macht den Gegenſtand der höhern Geometrie aus. Die krummen Linien werden entweder für ſich ſchlechtweg; oder als begränzende in einer Fläche betrachtet. So werden auch krumme Flächen entweder für ſich allein oder als Begränzungen gedacht. Wenn ſie für ſich allein genommen werden, ſo wird die Natur durch eine Gleichung zwiſchen ihren Coordinaten dargeſtellt; daraus werden ihre Eigenſchaften entwickelt; die Krümmung an irgend einer Stelle wird daraus hergeleitet; die Rectification oder Complanation wird geſucht, wenn dazu Veranlaſſung iſt. Wird eine krumme Linie als begränzende an einer Fläche gedacht; ſo ſucht man die Eigenſchaften einer ſolchen Figur auf. Sie kann einen oder mehrere merkwürdige Puncte enthalten; gerade Linien, die in derſelben gezogen werden, können auszeichnende Verhältniſſe haben; der Inhalt der Figur mag auf eine nette Art dargeſtellt werden können. Auf ähnliche Art verhält es ſich mit Körpern, die von krummen Flächen begränzt werden.

Krumme Fläche, ſ. nach den Artikeln von krummen Linien.

Krumme Linie iſt das der Länge nach allein Ausgedehnte, wovon die Theile ihre Lage gegen einander ſtetiger Weiſe ändern. S. den vorhergehenden Artikel.

1. Eine krumme Linie liegt entweder ganz in einer und derſelben Ebene, oder kein Theil derſelben, ſo klein

er auch genommen wird, liegt ganz in derſelben Ebene. Jene heißen **krumme Linien von einfacher Krümmung**, dieſe von **gedoppelter Krümmung**.

2. Die reine Geometrie betrachtet keine andere krumme Linien als ſolche, deren Natur durch eine Gleichung zwiſchen ihren Coordinaten, unmittelbar oder mittelbar, dargeſtellt werden kann. Bey der Anwendung auf wirkliche Gegenſtände ereignet es ſich leicht, daß eine Curve ein ſo verwickeltes Geſetz ihrer Bildung hat, daß es ſo gut iſt, als wenn ſie gar keines hätte, oder ſie mag auch wirklich kein Geſetz haben, wie eine Curve, die man aus freyer Hand auf Papier zeichnete. In dieſem Falle kann man ſie nur theilweiſe durch eine aus einigen Coordinaten gezogene empiriſche Gleichung darſtellen.

3. Bey krummen Linien in derſelben Ebene wird die Gleichung auf zweyerley Art eingerichtet. Erſtlich, man zieht in der Ebene derſelben zwey gerade Linien unter einem beliebigen Winkel, gewöhnlich unter einem rechten; ſie heißen die **Axen der Coordinaten**, von welchen die Abſciſſen auf der einen dieſer Linien von ihrem Durchſchnittspuncte (dem Anfange der Abſciſſen) angenommen, die Ordinaten der andern jener beiden Linien parallel gezogen werden, ſ. **Coordinaten**. Zweytens zieht man in der Ebene der krummen Linie eine beliebige gerade, und aus einem Puncte derſelben gerade Linien an die krumme. Der Winkel einer ſolchen veränderlichen Linie mit der gegebenen und jene Linie ſind hier die Coordinaten; der Winkel oder ein Kreisbogen mit der Einheit als Halbmeſſer beſchrieben, iſt hier, was nach dem erſtern Verfahren die Abſciſſe iſt. Statt der Winkel ſelbſt werden oft ihre trigonometriſchen Functionen genommen. Die Gleichung zwiſchen den Coordinaten (es mögen beide gerade Linien, oder eine derſelben ein Winkel ſeyn) iſt die Gleichung für die Curve, eine Definition derſelben, woraus alle ihre Eigenſchaften hergeleitet werden.

4. Da die Axen der geraden Coordinaten, wie bey der zweyten Weiſe der Winkelpunct und die Anfangslinie

willkürlich genommen werden können, ſo läßt ſich für dieſelbe krumme Linie die Gleichung auf unendlich viele Arten abändern. Man kann ſie dadurch einfacher machen, um gewiſſe beſondere Eigenſchaften in Abſicht gewiſſer an ſie gezogenen Linien zu finden, aber auch weitläufiger, um allgemeinere Relationen daran zu entdecken. Doch geht keine Gleichung durch die Verwandlungen der Coordinaten über ihren Grad hinaus. S. Coordinaten.

5. Die krummen Linien werden eingetheilt in algebraiſche und transſcendente. Die Benennungen hat Leibnitz zuerſt gebraucht (Acta Erud. 1684, pag. 234.). Die algebraiſchen Linien ſind ſolche, für welche die Gleichung eine algebraiſche iſt, worin die Relation der Coordinaten vollſtändig dargeſtellt wird, allgemein durch ein Aggregat von Potenzen derſelben, von Producten dieſer Potenzen, jene wie dieſe mit gegebenen Coefficienten begleitet, wozu noch eine abſolute (unveränderliche) Größe als Glied der Gleichung kommen kann. Dergleichen Curven ſind die Kegelſchnitte, die cubiſche Parabel, die Ciſſoide, die Curve, welche Folium genannt wird, die Conchoide, die Cardioide, u. v. m.

6. Die transſcendenten Curven ſind ſolche, für welche die Gleichungen transſcendent ſind, weil ſie aus einer unendlichen Anzahl von Gliedern (terminis) beſtehen, daher die Relation der Coordinaten nicht vollſtändig dargeſtellt werden kann, oder nur in ſo fern als vollſtändig betrachtet wird, als man das Geſetz der ins Unendliche fortgehenden Glieder erkennt. Auf dergleichen Curven kommt man, wenn die Differentialgleichung ſich nicht algebraiſch integriren läßt, ſondern auf ein vom Kreiſe, von den Logarithmen, oder von beiden zugleich abhangendes Integral führt, oder wenn das Integral nur ſchlechthin durch eine Reihe gefunden werden kann. Auch ohne von Differentialgleichungen auszugehen, kann man auf transſcendente Curven kommen, nämlich, wenn man die Werthe der Coordinaten vom Kreisbogen oder von Lo-

garithmen abhangen läßt. Ein Beyſpiel giebt die Cykloide. Für dieſe iſt, (Cykloide, Th. I. S. 601.), $x = a\,(\varphi - \sin\varphi)$, und $y = a\,(1 - \cos\varphi)$, wo x und y die Coordinaten, und φ ein ihnen zugehöriger, veränderlicher Winkel iſt. Hier kann φ durch $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ nicht anders als in Geſtalt einer unendlichen Reihe ausgedruckt werden, ſo wie $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ auch nicht anders als in dieſer Geſtalt durch φ. Die Differentialgleichung zwiſchen ∂x und ∂y iſt vollſtändig. Denn es ergiebt ſich aus den Werthen von x und y der Differentialquotient $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a \sin\varphi}{a - a\cos\varphi}$, worin der Winkel φ ſelbſt nicht vorhanden iſt. Da $a - a\cos\varphi = y$ iſt, ſo iſt $a\sin\varphi = \sqrt{(2ay - y^2)}$, und es iſt $\partial x = \frac{y\,\partial y}{\sqrt{(2ay - y^2)}}$. Ein ähnliches Beyſpiel giebt die Kettenlinie.

Die archimedeiſche Spirale, deren Gleichung iſt $y = \frac{a\varphi}{2\pi}$; die Quadratrix, für welche iſt $y = (a - x) \times \operatorname{tang} \frac{\pi x}{2a}$; die logarithmiſche Spirale, deren Gleichung iſt $\varphi = m \log. \frac{y}{a}$, ſind transſcendente Curven. Die Epicykloiden gehören auch zu dieſer Abtheilung. Denn wenn die Halbmeſſer oder die Umfänge des ruhenden und des ſich wälzenden Kreiſes ein irrationales Verhältniß haben, ſo tritt der beſchreibende Punct nie wieder in daſſelbe Gleis, und der Radius Vector hat für jedes ω (den Winkel mit der Anfangslinie) unendlich viele Werthe. Damit ſtimmt, daß die Differentialformel (Epicykloide, 7.) nicht integrirbar iſt. Wäre ſie integrirbar, ſo gehörten zu einem beſtimmten Winkel ω eine beſtimmte Anzahl von Werthen des Radius Vector z, und umgekehrt. In dem Falle, daß das gedachte Verhältniß rational iſt, fängt der be-

ſchreibende Punct zwar nach einer gewiſſen Anzahl von Umläufen des ſich wälzenden Kreiſes denſelben Weg wieder an, und für jedes ω gehört nur eine gewiſſe Anzahl Werthe von z; allein dieſer Umſtand macht die Differentialformel nicht integrirbar, da die Verhältniſſe der unveränderlichen Größen gegen einander auf die Integrirbarkeit keinen Einfluß haben. Jede algebraiſche Linie wird von einer geraden höchſtens nur in einer gewiſſen Anzahl Puncte geſchnitten, aber man darf dieſes nicht umkehren. Die Wurfslinie in einem widerſtehenden Mittel, wie die Luft, wird von einer geraden Linie in nicht mehrern Puncten geſchnitten als eine Parabel, und iſt doch keine algebraiſche. So verhält es ſich auch mit manchen evolvirenden Linien, deren Evoluten nicht rectificabel ſind, ſ. Evolution, 5.

7. Descartes wollte nur die algebraiſchen Curven als geometriſche gelten laſſen, und nannte die andern mechaniſche, weil diejenigen, die zu ſeiner Zeit bekannt waren, als die archimedeiſche Spirale und die Quadratrix, durch abgeſonderte Bewegungen beſchrieben werden, die kein genau meßbares Verhältniß gegen einander haben. Die Linien, welche zu Conſtructionen gebraucht werden dürfen, müſſen, ihm zufolge, durch ſolche Bewegungen beſchrieben werden können, daß nicht bloß einzelne Puncte, ſondern irgend welche ſich geometriſch finden laſſen. (Geometria, L. II.). Newton hingegen und Leibnitz machten in dieſer Rückſicht keinen Unterſchied zwiſchen den Curven, ſondern ſahen bloß auf die Leichtigkeit der Conſtruction. (Newtoni Arithm. univ. p. 212. Leibnitius in A. Erud. 1684. p. 234.). Da gegenwärtig Kreisbogen und Logarithmen als völlig beſtimmbar durch ihre zugehörigen Größen anzuſehen ſind, ſo mögen alle krummen Linien, die von ihnen abhangen, den algebraiſchen gleich zu ſchätzen ſeyn.

8. Es ſind zweyerley Fragen, welche Curven zur Aufläſung geometriſcher Aufgaben angewandt werden dürfen, und welche als geometriſche anzuerkennen ſind. In-

Betreff jener möchte Descartes, wenigſtens für den Zuſtand der Wiſſenſchaft zu ſeiner Zeit, der Strenge nach Recht haben; wenn aber von der Würdigung der Curven die Frage iſt, ſo ſind alle für echt geometriſche zu erklären, deren Puncte nach einem gemeinſchaftlichen Geſetze beſtimmt werden, es ſey, daß dieſes Geſetz für die endlichen Coordinaten ſelbſt, oder nur für ihre Differentialverhältniſſe gegeben werde, da die letztern immer charakteriſtiſch für die Curven ſind. Mit der Erweiterung der Kenntniſſe erweitert ſich auch der Umfang der Begriffe. Die alten griechiſchen Geometer ſcheinen ſelbſt die Kegelſchnitte nicht für geometriſche anerkannt zu haben, da Pappus (L. III. ad prop. 5.) anführt, daß ſie die Aufgabe von der Erfindung zweyer geometriſch mittlern Linien nicht auf geometriſche Weiſe hätten conſtruiren können, weil die Zeichnung der Kegelſchnitte in einer Ebene nicht leicht ſey. Als die Rechnung des Unendlichen auf die Geometrie angewandt ward, nannte man mechaniſche Curven diejenigen, für welche eine Gleichung nur zwiſchen den Differentialen der Coordinaten gefunden werden kann. (Histoire de l'Acad. des Sc. 1704 p. 142.) Dieſe Benennung möchte gegenwärtig nur von ſolchen transſcendenten Linien zu gebrauchen ſeyn, die urſprünglich durch Bewegungen beſchrieben werden, als durch Wälzung einer Curve auf einer geraden oder krummen Linie, oder durch Abwickelung.

9. Eine Exponentialcurve iſt eine ſolche, deren Gleichung eine exponentielle iſt (ſ. dieſes Wort, Th. II. S. 176.). Leibnitz hat dieſe Curven in die Geometrie eingeführt. A. Erud. 1684. p. 234 Johann Bernoulli, der zu gleicher Zeit mit Leibnitz auf dieſe Form von Größen gerieth, hat die Exponentialcurven mehrmahls angewandt. Man ſehe die Sammlung ſeiner Werke. Von den Curvis interscendentibus, die Leibnitz unterſchieden hat, ſ. den Artikel, Interscendens.

10. Die algebraiſchen krummen Linien werden nach dem Grade der für ſie gehörigen Gleichungen ein-

getheilt. Der Grad einer Gleichung zwiſchen x und y wird durch die höchſte Anzahl der Factoren x und y ihrer Glieder, es ſey in den Potenzen derſelben oder in ihren Producten beſtimmt. Eine Gleichung vom erſten Grade zwiſchen zwey veränderlichen Größen, $ay + bx + c = 0$, gehört für die gerade Linie, ſ. dieſe. Die Gleichungen vom zweyten Grade beſtimmen die nach der geraden einfachſten Linien; welche die zweyte Ordnung der Linien überhaupt, oder die erſte Claſſe der krummen ausmachen. Der allgemeine Ausdruck für dieſe Gleichungen iſt

$$\left.\begin{array}{l} ayy + bxy + cx^2 \\ + dy + ex + f \end{array}\right\} = 0.$$

Die Coefficienten können negativ, zum Theil auch Null ſeyn. Nur muß der erſte oder höchſte Theil, der zwey Dimenſionen in Abſicht auf x und y enthält, nicht ganz fehlen. Dieſe Claſſe begreift die Kegelſchnitte.

11. Nach dieſen folgen die krummen Linien der zweyten Claſſe, oder Linien der dritten Ordnung, für welche die allgemeine Gleichung iſt,

$$\left.\begin{array}{l} ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 \\ + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k \end{array}\right\} = 0,$$

worin der erſte Theil von drey Dimenſionen in Abſicht auf x und y nicht ganz fehlen darf. Dieſe Claſſe iſt an Arten ſehr zahlreich.

12. Noch weit mehr iſt es die dritte Claſſe, für welche die Dimenſionen der Glieder in Abſicht auf x und y bis auf die Anzahl vier ſteigen, ſo daß das höchſte Glied im Allgemeinen iſt,

$$ay^4 + bxy^3 + cx^2y^2 + dx^3y + ex^4,$$

wozu eben ſolche Glieder kommen, wie in der Gleichung vom dritten Grade enthalten ſind.

13. Hieraus erſieht man, wie die Gleichungen für die krummen Linien der folgenden Claſſen beſchaffen ſind. Der höchſte Theil in jeder ſteigt auf ſo viele Dimenſionen nach x und y als die um Eins vermehrte Ordnungszahl der Claſſe Einheiten enthält. Die Anzahl der Glieder in der allgemeinen vollſtändigen Gleichung vom nten Grade iſt $= \frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}$. Sie iſt nämlich für eine Gleichung vom erſten Grade $= 1 + 2$; für eine vom zweyten $= 1 + 2 + 3$; für eine vom dritten $= 1 + 2 + 3 + 4$; für eine vom vierten $= 1 + 2 + 3 + 4 + 5$; für eine vom nten Grade $= 1 + 2 + 3 \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}$.

14. Was man unter Familie krummer Linien verſteht, iſt in Th. II. S. 206. ſchon angeführt. Die Form der Gleichung iſt für die Linien von derſelben Familie dieſelbe, aber der Grad iſt verſchieden. Die Benennung, genus, iſt ſchicklicher für die Hauptabtheilungen einer Claſſe von Curven zu gebrauchen.

15. Der Ordinatenwinkel iſt willkürlich. Wiewohl der Grad der Gleichung bey jedem Winkel der Coordinaten derſelbe bleibt, und ſelbſt die Gattung, wozu die Curve gehört, nicht von dieſem Winkel abhängt, ſo kann es doch auf die Beſtimmung der Art einen Einfluß haben, ob der Ordinatenwinkel ein rechter oder ein ſchiefer iſt. Die Gleichung, $yy = aa - xx$, giebt einen Kreis, wenn der Winkel der Coordinaten ein rechter iſt, und eine Ellipſe bey einem ſchiefen. Doch gilt die Gleichung $yy = xx - aa$ für eine gleichſeitige Hyperbel, der Ordinatenwinkel mag ſchief oder ein rechter ſeyn. (Hyperbel, 30.)

16. Wenn eine Gleichung ſich in rationale Factoren auflöſen läßt, ſo gilt ſie nicht für eine einzige Linie,

ſondern für zwey oder mehrere, mittelſt einer gemeinſchaftlich en Abſciſſenlinie mit demſelben Anfangspuncte verbundenen Linien. Die zu jeder Abſciſſe gehörigen Ordinaten endigen ſich theils an der einen, theils an der andern Linie. Z. B. die Gleichung, $y - x + a = 0$, gehört für eine gerade Linie, die Gleichung, $yy + xx - 2ax = 0$, für einen Kreis, deſſen Halbmeſſer a iſt. Der Anfang der Abſciſſen auf einem Durchmeſſer iſt in dem einen Endpuncte deſſelben, und der Ordinatenwinkel ein rechter. Da an der geraden Linie $y = 0$ iſt, wenn $x = a$ genommen wird, ſo geht ſie durch den Mittelpunct des Kreiſes; und da $y = x - a$ iſt, ſo ſchneidet ſie die Abſciſſenlinie unter einem halben rechten Winkel. Die Gleichung vom dritten Grade, welche durch die Multiplication beider Gleichungen entſteht, ſtellt beide Linien, die gerade und den Kreis zugleich dar. Für jedes x, das nicht größer als der Durchmeſſer iſt, ſind zwey gleiche entgegengeſetzte Ordinaten an dem Kreiſe, und eine an der geraden Linie. Die letztere iſt negativ für ſolche x, die kleiner als a, poſitiv für ſolche x, die größer als a ſind. Zu negativen x und zu ſolchen x, die größer als der Durchmeſſer ſind, gehört nur eine mögliche Ordinate an die gerade Linie. Nämlich jede cubiſche Gleichung, dergleichen hier für y durch jeden beliebigen Werth von x gegeben wird, hat entweder drey mögliche Wurzeln oder nur eine einzige. (Gleichung, 64.)

17. Eine Gleichung vom dritten Grade, die in drey einfache rationale zerlegbar iſt, gehört für ein Syſtem von drey geraden Linien. — Eine Gleichung vom vierten Grade, die ſich in rationale Factoren zerlegen läßt, zeigt an entweder ein Syſtem von einer krummen Linie des dritten Grades und einer geraden, oder von zwey Linien der zweyten Ordnung (der erſten Claſſe), oder von einer der zweyten Ordnung und zwey geraden, oder endlich von vier geraden, nach Beſchaffenheit der Factoren. — Auf ähnliche Art verhält es ſich bey Gleichungen von höhern Graden.

18. Die unbeſtimmte Gleichung zwiſchen den Coordinaten x und y wird für jeden beſtimmten Werth von x eine beſtimmte für y. Da jede beſtimmte Gleichung ſo viele mögliche Wurzeln haben kann, als der Exponent der höchſten Potenz der unbekannten Größe Einheiten enthält (Gleichung, 151.), ſo kann die Ordinate die Curve in ſo vielen Puncten ſchneiden, als der Exponent der höchſten Potenz von y anzeigt, aber auch in wenigern oder gar nicht. Die Mehrheit der Ordinaten entſteht aus der Natur der Frage, durch welche man auf die krumme Linie geführt wird, oder aus der für ſie unmittelbar angenommenen Gleichung. Verſchiedene Größen können aus gewiſſen gegebenen Größen auf einerley Art beſtimmt werden, wie dies in den Aufgaben (Gleichung, 33, 54, 83, 144,) der Fall iſt. Dabey begreift die Algebra die Fälle, worin die Werthe der unbekannten Größe negativ ſind, mit denen, worin ſie poſitiv genommen werden, in einer und derſelben Formel (Gleichung, 13.). Daher gehört der Endpunct jeder Ordinate, welche die Gleichung für eine Abſciſſe liefert, der negativen wie der poſitiven, zu der Curve. Nur werden die entgegengeſetzten Ordinaten nach entgegengeſetzten Richtungen auf der mit der Axe der Ordinaten parallelen genommen. Verwandelt man in der Gleichung die Vorzeichen der ungeraden Potenzen von y in die entgegengeſetzten, ſo ſind die poſitiven Wurzeln der zweyten Gleichung ſo groß als die negativen der erſtern (Gleichung, 13.), und dieſe poſitiven Wurzeln ſind die Werthe der Ordinaten auf der andern Seite der Abſciſſenlinie, der entgegengeſetzten von derjenigen, auf welcher die poſitiven Ordinaten genommen wurden. So wie beiderley Gleichungen nur eine einzige ausmachen, ſo gehören auch die dadurch beſtimmten Ordinaten alle zu derſelben Curve. Betrachtet man die auf der einen Seite der Abſciſſenlinie als poſitiv, ſo ſind ſie auf der andern negativ. Die folgenden Bemerkungen werden noch insbeſondere zeigen, daß die arithmetiſche Entgegenſetzung mit der geometriſchen zuſammenſtimmt.

19. Jede krumme Linie iſt eine ſtetige Länge. Indem die Abſciſſe x ſich ſtetig verändert, entſteht eine ſtetige Folge von Ordinaten, es ſey eine für noch ſo große x ununterbrochen fortgehende, oder eine irgendwo aufhörende. In dem letztern Falle erfordert das Geſetz der Stetigkeit, daß hier eine andere Folge ſich durch eine gemeinſchaftliche Ordinate anſchließe. Davon weiter unten.

20. Die poſitiven Ordinaten werden nach einer oder der andern Richtung auf die mit der Axe der Ordinaten parallele getragen. Wenn ſie in der ſtetigen Folge durch o vom Poſitiven zum Negativen übergehen, ſo zeigt dieſes eine ſtetige Verminderung an; wobey nothwendig eine Entgegenſetzung der Lage entſteht. Bleibt eine Folge von Ordinaten durchgehends negativ, ſo müſſen dieſe zur Übereinſtimmung mit jenem Falle auf diejenige Seite getragen werden, welche der für die poſitiven Ordinaten gewählten Seite entgegengeſetzt iſt.

21. Die Bezeichnung der geometriſch entgegengeſetzten Ordinaten durch die arithmetiſch entgegengeſetzten wird noch durch folgende Bemerkung erläutert und beſtätigt. Man ziehe auf der Seite der Abſciſſenlinie, welche der für die poſitiven Ordinaten entgegengeſetzt iſt, eine parallele in dem Abſtande f, und nehme dieſe zur Abſciſſenlinie. Die auf dieſe ſich beziehenden Ordinaten, bey derſelben Axe der Ordinaten, nenne man z, ſo iſt $z = f + y$. Die Ordinaten auf der Seite der poſitiven ſind alle größer geworden, wie es auch der Ausdruck, $f + y$, ergiebt. Die Ordinaten aber, die nach der entgegengeſetzten Seite liegen, ſind kleiner geworden. Dieſes ſtimmt ebenfalls mit dem Ausdruck, $f + y$, wenn hier y negativ iſt, überein. Iſt nämlich y, abſolut genommen, kleiner als f, ſo bleibt z poſitiv, und dieſe neue Ordinate liegt auch, zufolge der Zeichnung, nach der Richtung der poſitiven. Iſt aber y größer als f, ſo iſt z negativ, und z liegt nach der entgegengeſetzten Richtung.

22. Auf gleiche Weiſe ſchneidet die Abſciſſenlinie die Curve höchſtens in ſo vielen Puncten, als die höchſte Potenz der Abſciſſe x Einheiten enthält. Denn man kann ſie als eine Ordinate betrachten, wenn die Axe der Ordinaten zur Abciſſenlinie genommen wird.

In den Puncten der Curve, worin die Abſciſſenlinie ſie ſchneidet (oder berührt), iſt die Ordinate Null, und die Gleichung für die Curve wird hier eine beſtimmte für x, die ſo viele mögliche Wurzeln haben kann, als der Exponent der höchſten Potenz von x anzeigt. Die ungleichnamigen Wurzeln werden nach entgegengeſetzten Seiten von dem Anfangspuncte der Abſciſſen genommen.

23. Es iſt ſchon vorläufig bemerkt, daß da, wo eine Folge von Ordinaten abbricht, eine andere ſich daran ſchließen müſſe: Man nehme z. B. eine Ellipſe, ziehe die Coordinaten mit den beiden Axen parallel, ſo erhält man zwey Folgen von Ordinaten, die ſich an den Scheitelpuncten begegnen. Sind die Ordinaten nicht ſenkrecht auf die Abſciſſenlinie; ſo kommen die beiden Folgen in den berührenden Ordinaten zuſammen. An der Hyperbel finden vier Folgen von Ordinaten Statt, wovon ſich zwey und zwey an einander ſchließen.

24. Die krummen Linien der zweyten Claſſe enthalten häufig drey Folgen von Ordinaten. In Fig. 44. iſt eine dieſer Claſſe abgebildet. Die Abſciſſenlinie iſt AX auf der Seite der poſitiven, AX′ auf der Seite der negativen. Die Axe der Ordinaten iſt AY für die poſitiven, AY′ für die negativen. Die Ordinate BC in B berührt die Curve in C. Dieſe erſtreckt ſich von C durch M nach X ins Unendliche längs der Aſymptote AX. Eine zweyte berührende Ordinate iſt DE in E, von wo die Curve durch N nach X′ längs der Aſymptote AX′ ins Unendliche fortgeht. Zwiſchen den Puncten C, E, iſt noch ein Theil CFE der Curve enthalten, der jene beiden Theile mit einander verbindet. Zu dieſem gehört eine Folge von Ordinaten, zwiſchen den äußerſten BC, DE,

deren jene mit zu der Folge von B nach X, dieſe zu der Folge von D nach X' gehört.

25. Die Conchoide, Th. I. S. 530., welche daſelbſt Tab. V. Fig. 79. abgebildet iſt, hat vier Folgen von Ordinaten. Die erſte oberhalb der Abſciſſenlinie XX, die auf beiden Seiten ſich ins Unendliche erſtreckt, oder vom Unendlichen her nut Null anfängt, und ins Unendliche ſich wieder verliert; die zweyte geht von GL an rechter Hand ohne Ende fort; die dritte von HK eben ſo linker Hand; die vierte von GL bis HK an dem Bogen HDG.

26. Ein Zweig einer Curve iſt ein ſolcher Theil, zu welchem eine vollſtändige Reihe ſtetiger Ordinaten gehört, wie in Fig. 44. die Theile CMX infin.; CNX' infin. und CFE. Die Ordinaten mögen auch aus einem gemeinſchaftlichen Puncte gezogen werden. Läßt man den Bogen durch einen Punct beſchreiben, der auf der Ordinate fortgeht, indem dieſe ſich nach einer gegebenen Richtung parallel, oder um einen freyen Punct bewegt, ſo gehört der ganze Theil an einer Curve, welcher von jenem Puncte beſchrieben werden kann, während daß die Ordinate nach derſelben Gegend ſich bewegt, zu einem und demſelben Zweige.

27. Eine Linie der mten Ordnung und eine Linie der nten können ſich höchſtens in mn Puncten ſchneiden, z. B. zwey Kegelſchnitte, als Linien der zweyten Ordnung, höchſtens in vier Puncten, aber auch in wenigern, oder gar nicht. Ein Kegelſchnitt und eine Linie der dritten Ordnung (d. i. eine der zweyten Claſſe der krummen Linien) können ſich in ſechs Puncten ſchneiden. Man gebe beiden Curven gemeinſchaftliche Axen der Coordinaten, ſo ſind in den Durchſchnittspuncten beider die Ordinaten y dieſelben. Man ſchaffe nun aus den Gleichungen für die beiden Curven die veränderliche y heraus, ſo wird eine beſtimmte Gleichung für x erhalten, deren Wurzeln diejenigen Werthe der Abſciſſen ſind, welche zu den Durchſchnittspuncten gehören. In dem Artikel, Elimination,

Th. II. S. 69. iſt ein Beyſpiel der dazu erforderlichen Rechnung gegeben. Die Gleichungen

I. $P + Qy + Ry^2 = o$;

II. $p + qy + ry^2 + sy^3 = o$;

ſeyn jene vom zweyten, dieſe vom dritten Grade; P, Q, p, q, r, s, ſeyn Functionen von x; R und s aber bloße gegebene Größen. Die Functionen Q und r können nur vom erſten Grade; P und q vom zweyten; p vom dritten ſeyn, wegen des angenommenen Grades der Gleichungen. Die durch die Elimination erhaltene Gleichung für x kann bis auf den ſechſten Grad, aber nicht höher ſteigen. Wäre die Gleichung I. vom dritten Grade, nämlich wenn R eine Function von x des erſten Grades, Q des zweyten, und P des dritten, oder auch nur eine dieſer Beſchaffenheiten da iſt, ſo kann die Gleichung für x auf den neunten Grad ſteigen. Die Nachweiſungen über dieſe Anwendung der Algebra auf die höhere Geometrie ſind in dem gedachten Artikel zu finden. Dazu ſetze man noch Euleri Introd. in Anal. infin. T. II. cap. 19.

28. Die krummen Linien der erſten Claſſe werden vielfältig benutzt, ſowohl zu geometriſchen Beweiſen und Auflöſungen, als auch zu Anwendungen auf phyſiſche und techniſche Untersuchungen. Von den Linien höherer Ordnungen wird wenig Gebrauch gemacht. Dennoch ſind ſie ein wichtiges Hauptſtück der Geometrie, woraus die Alten nur ein paar Linien kannten. Die Mannigfaltigkeit der Formen iſt ſchon in der zweyten Claſſe ſehr groß, und dennoch laſſen ſie ſich unter einer Formel begreifen. Man möchte ſie mit den Werken der Natur vergleichen, worin auch eine ſehr große Verſchiedenheit der Bildungen auf einfache und gemeinſchaftliche Anlagen gegründet iſt. Wenn Schönheit in der Vereinigung des Mannigfaltigen zur Einheit beſteht, ſo kann man beſonders den algebraiſchen Curven eine intellectuelle Schönheit beylegen, die dem Geometer oft ein eigenthümliches Vergnügen verſchafft. Die Algebra iſt zur Entdeckung ihrer Eigenſchaf-

ten ein Hülfsmittel, welches die Alten entbehrten. Dagegen gewährt die Geometrie wiederum durch die Formen ihrer Linien dem Verſtande eine faßliche Anſicht der Verhältniſſe der veränderlichen Größen und der Beſchaffenheit ihrer ſtetigen Folgen. Die ſymboliſche Darſtellung giebt nur einzelne Glieder; die geometriſche liefert der Einbildungskraft durch einzelne Puncte den ganzen Zug, ſelbſt ins Unendliche fortlaufend. Die Mannichfaltigkeit der Fälle in einer Gleichung iſt nicht leicht zu überſehen, beſonders wo drey, vier und mehr Reihen möglicher Werthe der einen veränderlichen Größe neben einander beſtehen. Die Zeichnung macht es viel leichter als die analytiſchen Reihenausdrücke.

29. Alle algebraiſchen Curven haben gewiſſe Eigenſchaften gemein, die aus den Relationen der Coefficienten einer algebraiſchen Gleichung zu den Wurzeln derſelben folgen. Es ſey die Gleichung für zwey veränderliche Größen, (A),

$$y^m + Py^{m-1} + Qy^{m-2} + \ldots + Ty + V = 0,$$

wo P, Q, ... T, V Functionen von x allein ſind. Die Function $+P$ iſt das Aggregat der den Wurzeln dieſer Gleichung, nämlich den Werthen von y, für irgend ein gegebenes x, entgegengeſetzten Größen (Gleichung, 151.), mit Einſchluß der unmöglichen. Iſt m dem Grade der Linie gleich, das iſt der höchſten Summe der Dimenſionen nach x und y, ſo iſt P eine Function des erſten Grades von x, nämlich $\alpha x + \beta$, wiewohl auch hier $\alpha = 0$ ſeyn kann. Iſt der Grad der Gleichung $= n$, ſo kann die Function P bis zum Grade $n - m + 1$ ſteigen.

30. Man ſetze $y = u - \frac{1}{m}P$, ſo entſteht durch die Subſtitution dieſes Werthes eine Gleichung von der Form, (B),

$$u^m \; * + Q'u^{m-2} + \ldots + T'u + V' = 0,$$

wo die durch ein Strichelchen unterſchiedenen Coefficienten neue Functionen von x ſind. In dieſer Gleichung iſt die

M

Summe der poſitiven Werthe von u gleich der Summe der negativen. Man ſetze, daß $P = \alpha x + \beta$ iſt, ſo iſt $y = u - \frac{1}{m}(\alpha x + \beta)$. Für die Curve mit der Gleichung (A) ſeyn in (Fig. 45.) die geraden AX, AY die Axen der Coordinaten: Q, R, S, T, etc. Puncte derſelben auf der Ordinatenlinie RPT zu der Abſciſſe AP. Man nehme auf der Axe der Abſciſſen $AB = \frac{\beta}{\alpha}$, und auf der Axe der Ordinaten $AC = -\frac{1}{m}\beta$, und ziehe BCU, welche die Ordinatenlinie RT in M ſchneide. Es ſey $AP = x$, ſo iſt, da $AB : AC = PB : PM$ iſt, $PM = -\frac{1}{m}(\alpha x + \beta)$. Nun iſt $\alpha x + \beta$ oder P gleich dem Aggregate der entgegengeſetzten aller Ordinaten y, alſo iſt das mfache von PM das Aggregat des Ordinaten ſelbſt, oder PM iſt das arithmetiſche Mittel derſelben. Iſt P poſitiv, ſo iſt das Aggregat der Ordinaten negativ, und PM fällt in die Richtung der negativen Ordinaten; iſt P negativ, ſo iſt das Aggregat der Ordinaten poſitiv, und PM hat die in der Figur geſetzte Lage. Iſt β negativ, ſo erhält AC die Richtung der negativen Ordinaten, und (wofern α poſitiv iſt) AB die Richtung der poſitiven Abſciſſen.

Nimmt man BU zur Abſciſſenlinie, ſo iſt die Summe der Ordinaten auf der einen Seite in Beziehung auf dieſelbe ſo groß als auf der andern. Denn die poſitiven Ordinaten, wie MQ, MR, ſind die poſitiven Werthe von u; die negativen Ordinaten, wie MS, MT, ſind die negativen Werthe von u. Die Summe jener iſt aber ſo groß als die Summe dieſer. Eben dieſes folgt auch aus der Natur eines arithmetiſchen Mittels ungleichnamiger Größen.

31. Jede Curve, in deren Gleichung der Coeffici-

ent des zweyten Gliedes die Function $\alpha x + \beta$ iſt, hat für parallele in ihr gezogene Linien einen **Durchmeſſer**, in dem allgemeinen Sinne, daß auf jeder derſelben die Summe der entgegengeſetzten Ordinaten zu dieſem Durchmeſſer gleich groß iſt. Die Lage des Durchmeſſers wird durch die Gleichung, $z = -\frac{1}{m}(\alpha x + \beta)$, beſtimmt. Die Ordinaten z ſind jenen Ordinaten parallel. Iſt $\alpha = 0$, alſo $P = \beta$, ſo iſt der Durchmeſſer der anfangs genommenen Abſciſſenlinie parallel.

Da eine gerade Linie durch zwey Puncte beſtimmt wird, ſo wird der Durchmeſſer auch gefunden, wenn zwey Ordinatenlinien ſo getheilt werden, daß die Summe der Ordinaten auf beiden Seiten des Theilungspunctes gleich groß iſt.

32. Iſt P eine Function $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, oder eine noch höhere, ſo hat die Curve, bey der für ſie angenommenen Lage der Coordinaten, keinen geradlinichten **Durchmeſſer**, ſondern einen krummlinigten, der durch die Gleichung, $PM = \frac{1}{m}(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$, oder eine ähnliche beſtimmt wird. Dieſer **Durchmeſſer** iſt eine **paraboliſche Linie**. Es läßt ſich aber durch Veränderung der Coordinaten die Gleichung immer ſo einrichten, daß die höchſte Potenz der Ordinate dem Grade der Gleichung gleich ſey. Cramer, Analyse des lignes courbes, Ch. VI. §. 68. Der paraboliſchen Durchmeſſer erwähnt dieſer Geometer nicht.

33. Das letzte Glied $+ V$ der Gleichung (A) in (29.) iſt gleich dem Producte aller den Wurzeln der Gleichung entgegengeſetzten Größen. Sind alſo in (Fig. 45.) Q, R, S, etc. Puncte der Curve auf der Ordinatenlinie durch den Punct P der Abſciſſenlinie, ſo iſt das Product $(-PQ)\,(-PR)\,(+PS)\,(+PT)$, etc. $= \mp V$,

einer Function der Abſciſſe AP. Z. B. in der Gleichung vom zweyten Grade (10.) iſt das Product der beiden Ordinaten, mit entgegengeſetzten Vorzeichen genommen, $= \frac{cx^2 + ex + f}{a}$. In der Gleichung vom dritten Grade (11.) iſt das Product der drey, entgegengeſetzt genommenen, Ordinaten $= \frac{dx^3 + gx^2 + ix + k}{a}$.

34. Die Wurzeln der Gleichung (A) in (29.) unterſcheide man durch die Bezeichnungen y, y′, y″, etc. ſo iſt der Coefficient + T die Summe der Producte von je m — 1 derſelben mit entgegengeſetzten Vorzeichen. Setzt man zu jedem dieſer Producte den zu dem Producte aller, nämlich V, noch fehlenden Factor, und dividirt zugleich durch denſelben, ſo iſt

$$V\left(\frac{1}{-y} + \frac{1}{-y'} + \frac{1}{-y''} + \text{etc.}\right) = T,$$

oder

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y'} + \frac{1}{y''} + \text{etc.} = -\frac{T}{V}.$$

(ſ. noch Gleichung, 211. u. 212.). Die Werthe der veränderlichen Größen werden hier als Zahlen in Beziehung auf eine angenommene Einheit angeſehen.

35 Es ſey MN (Fig. 46.) eine gerade, welche die Abſciſſenlinie AX in B ſchneidet. Der Anfang der Abſciſſen iſt in A; die Ordinate daſelbſt AC; eine unbeſtimmte Abſciſſe iſt AP, die Ordinate zu derſelben iſt PQ parallel mit AC. Man ſetze AB = a; AC = b; den W. BAC = α; AP = x; PQ = y, ſo iſt $y = \frac{b}{a} \times (a - x)$. Man ziehe AQ, und ſetze AQ = z, den W. BAQ = φ, ſo iſt $y = \frac{z \sin \varphi}{\sin \alpha}$; $x = \frac{z \sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}$. Daher iſt

$(a \sin \varphi + b \sin (\alpha - \varphi))\, z = ab \sin \alpha$, die Gleichung zwiſchen den beiden veränderlichen Größen z und φ. Es iſt

$$\frac{1}{z} = \frac{\sin \varphi}{b \sin \alpha} + \frac{\sin (\alpha - \varphi)}{a \sin \alpha}.$$

36. Es ſey MN (Fig 47.) ein Bogen einer krummen Linie, Q ein Punct auf demſelben, und die zu demſelben gehörigen Coordinaten AP, PQ. Man ziehe AQ, ſetze $AQ = u$, $PAQ = \varphi$; den Ordinatenwinkel $QPX = \alpha$; $AP = x$; $PQ = y$, ſo iſt $y = \frac{u \sin \varphi}{\sin \alpha}$; $x = \frac{u \sin (\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}$. Setzt man dieſe Werthe in die Gleichung zwiſchen y und x für die Curve, von welcher der Bogen MN ein Theil iſt, ſo geben alle Glieder derſelben, außer dem gegebenen Gliede, und den beiden, welche x und y allein enthalten, Potenzen von u. Die beiden niedrigſten Glieder der transformirten Gleichung in Beziehung auf u entſtehen alſo aus jenen dreyen. Dieſe ſeyn $Cy + Bx - A$, ſo entſtehen daraus die Glieder,

$$\frac{C \sin \varphi}{\sin \alpha}\, u + \frac{B \sin (\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}\, u - A.$$

Die Summe der reciproken Werthe von u iſt, wie in (34.),

$$= + \frac{C \sin \varphi}{A \sin \alpha} + \frac{B \sin (\alpha - \varphi)}{A \sin \alpha}.$$

Der Factor zu der höchſten Potenz von u hat auf dieſen Quotienten keinen Einfluß, weil, wenn dieſe Potenz von demſelben durch die Diviſion befreyt wird, ſowohl der Coefficient von u als das unveränderliche Glied A dadurch zugleich dividirt werden.

Man nehme nun auf der Abſciſſenlinie von A aus die Länge $AB = \frac{A}{B}$, ziehe AC parallel mit den Ordi-

naten, und nehne $AC = \frac{A}{C}$, ziehe durch B, C die gerade mn, welche von AQ in q geſchnitten werde, ſo iſt

$$\frac{1}{Aq} = \frac{C \sin \varphi}{A \sin \alpha} + \frac{B \sin (\alpha - \varphi)}{A \sin \alpha}.$$

Folglich iſt $\frac{1}{Aq}$ gleich der Summe aller reciproken Werthe der die Curve in der Richtung Aq und qA ſchneidenden geraden, deren eine durch AQ dargeſtellt iſt.

37. Den letzten Satz hat Maclaurin in einer Abhandlung über die allgemeinen Eigenſchaften geometriſcher Linien, die ſeiner Algebra angehängt iſt. Er druckt ihn aber folgendergeſtalt aus. Wenn eine gerade Linie, die ſich um einen fixen Punct A dreht, einer geometriſchen (algebraiſchen) Linie in ſo vielen Puncten begegnet, als ſie (in dem höchſten Gliede ihrer Gleichung) Dimenſionen enthält, und wenn auf derſelben Aq immer ſo genommen wird, daß $\frac{1}{Aq}$ gleich iſt der Summe aller reciproken oder an die Curven ſich endigenden Abſchnitte, mit Beobachtung entgegengeſetzter Vorzeichen für entgegengeſetzte Lagen, ſo iſt der Ort des Punctes q eine gerade Linie. Er ſchreibt den Satz dem Cotes zu, aus deſſen Nachlaſſe er denſelben von Smith ohne Beweis mitgetheilt erhalten hatte. Er giebt zwey Beweiſe, von welchen der eine, der auf Eigenſchaften der harmoniſchen Theilung beruht, ziemlich zuſammengeſetzt iſt, der andere mit dem hier gegebenen zwar auf gleichem Grunde beruht, aber doch viel umſtändlicher und ganz anders ausgeführt worden. Die Einſchränkung, daß die Linie AQ die Curve in ſo vielen Puncten ſchneiden ſolle, als die höchſte Anzahl der Dimenſionen der ſie bezeichnenden u Einheiten enthält, iſt nicht nöthig. Giebt es unmögliche u, ſo wird doch die Summe von je zwey unmöglichen zuſammengehörigen reciproken Werthen möglich.

38. Eine Linie wird durch ſo viele Puncte beſtimmt, als die allgemeine Gleichung für dieſelbe Glieder, weniger eines, enthält. Demnach wird eine Linie der erſten Ordnung, oder die gerade, durch zwey Puncte, wie bekannt, beſtimmt; eine Linie der zweyten Ordnung durch fünf Puncte; eine Linie der dritten Ordnung durch neun; überhaupt eine Linie der nten Ordnung durch $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ Puncte, das iſt durch $\frac{n(n+3)}{2}$.

Soll eine krumme Linie zu einer gewiſſen Gattung ihrer Claſſe gehören, ſo wird dazu eine gewiſſe Relation der Coefficienten in ihrer Gleichung erfordert weswegen weniger Puncte als im Allgemeinen für dieſe Claſſe beſtimmbar ſind, gegeben werden dürfen, indem jede gegebene Relation zwiſchen den Coefficienten die Stelle eines gegebenen Punctes vertritt.

39. Daß die Anzahl der Glieder in der allgemeinen Gleichung für eine Linie um Eins vermindert wird, um die Anzahl der erforderlichen Puncte für ſie zu erhalten, beruht darauf, daß die Einheit für die als numeriſche Größen betrachteten Coefficienten unbeſtimmt bleibt. Die Coefficienten können durch die Multiplication oder Diviſion aller mit einer und derſelben Zahl verändert werden, ohne daß die Gleichung verändert wird. Es kommt bey derſelben nur auf das Verhältniß der Coefficienten an.

Die allgemeine Gleichung für die gerade Linie, z. B. iſt $ay + bx + c = 0$. Hier iſt $-\frac{c}{a}$ die Ordinate in dem Anfangspuncte der Abſciſſen, und $-\frac{c}{b}$ der Abſtand des Durchſchnitts der geraden mit der Abſciſſenlinie. Dieſe beiden Langen beſtimmen die gerade Linie. Dabey

bleibt die abſolute Größe von a, b, c willkürlich, nur die Verhältniſſe a:c und b:c ſind beſtimmt, und dadurch auch das a:b.

40. Die gegebenen Puncte beſtimmen eben ſo viele Ordinaten mit den zugehörigen Abſciſſen, wenn die Lage der Abſciſſenlinie, der Anfangspunct und der Ordinatenwinkel gegeben ſind oder angenommen werden. Für eine Linie der zweyten Ordnung ſeyn die zugehörigen gegebenen Werthe von x und y, wie folget,

$$\begin{array}{c|ccccc} x & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \epsilon, \\ y & A, & B, & C, & D, & E. \end{array}$$

In der allgemeinen Gleichung,

$$ayy + bxy + cx^2 + dy + ex + f = o,$$

ſetze man nach der Reihe die zuſammengehörigen Werthe von x und y, ſo erhält man fünf Gleichungen, wie dieſe erſte,

$aA^2 + b\alpha A + c\alpha^2 + dA + e\alpha + f = o$, woraus fünf der ſechs Coefficienten a, b, c, d, e, f, beſtimmt werden, und einer derſelben willkürlich genommen werden kann. Dieſer dient zur Einheit für die übrigen.

Legt man die Abſciſſenlinie durch zwey der gegebenen Puncte, und nimmt den einen Punct zum Anfangspuncte der Abſciſſen, ſo wird die Beſtimmung der Curve ſo viel leichter.

41. Wenn von den gegebenen Puncten mehrere in einer geraden Linie liegen, als die Anzahl der Puncte iſt, in welchen die krumme Linie von einer geraden geſchnitten werden kann, ſo gehört die Gleichung, welche durch alle gegebenen Puncte beſtimmt wird, nicht für eine einzige Linie, ſondern für ein Syſtem mehrerer, worunter eine oder mehrere gerade ſind. Z. B. wenn eine Gleichung vom zweyten Grade gefunden werden ſoll, und es lägen drey gegebene Puncte in einer geraden Linie, ſo gehörte die

Gleichung für ein Syſtem zweyer geraden, da eine Linie vom zweyten Grade von einer geraden nur in zwey Puncten geſchnitten werden kann.

Krumme Linien der erſten Claſſe ſind diejenigen, für welche die Gleichung auf den zweyten Grad ſteigt. Die allgemeine Gleichung für dieſelben iſt

$$ayy + bxy + cxx + dy + ex + f = o.$$

Dieſe Claſſe begreift die Kegelſchnitte. Da für die Ellipſe und Hyperbel die beſondern Eigenſchaften ſchon entwickelt worden, aus den Gleichungen, worin die Axen der Coordinaten zwey Durchmeſſer ſind, und auf ähnliche Art es auch für die Parabel geſchehen wird, ſo werden hier nur die allgemeinen Eigenſchaften aus der allgemeinen Gleichung hergeleitet werden.

1. Zuerſt iſt die Frage, wie ſich die Gattungen der unter der allgemeinen Form begriffenen Linien von einander unterſcheiden. Der Charakter derſelben wird am füglichſten von dem Verhältniſſe der Coordinaten für unendlich große Abſciſſen hergenommen.

2. Man ſetze $\frac{y}{x} = q$, ſo iſt

$$aqq + bq + c + \frac{dq}{x} + \frac{e}{x} + \frac{f}{xx} = o.$$

Dieſe Gleichung nähert ſich, je größer x iſt, deſto mehr der Gleichung,

$$aqq + bq + c = o.$$

Setzt man x unendlich groß, ſo verwandelt ſich jene völlig in dieſe. Denn wenn es nicht geſchähe, ſo wäre x noch endlich.

3. Die Gleichung für q giebt

$q = \frac{-b \pm \sqrt{(bb - 4ac)}}{2a}$. Hier ſind drey verſchie-

dene Fälle möglich. Erſtlich ſey bb kleiner als 4ac, ſo iſt q unmöglich, oder die krumme Linie hat für unendliche x keine mögliche Ordinaten. Zweytens ſey bb größer als 4ac, ſo giebt es für unendliche x zwey mögliche verſchiedene Ordinaten, die ebenfalls unendlich groß ſind. Auch ihr Unterſchied iſt mit x vergleichbar. Denn wenn man den einen Werth von q oder von $\frac{y}{x}$ durch ein geſtricheltes y (y′) unterſcheidet, ſo iſt $\frac{y-y'}{x} = \frac{\sqrt{(bb-4ac)}}{a}$, eine endliche Größe. Drittens ſey $bb = 4ac$, ſo iſt q oder $\frac{y}{x} = -\frac{b}{2a}$; daher ſind für unendlich große x zwey mögliche und unendlich große Ordinaten, aber ihr Unterſchied iſt mit x nicht vergleichbar, ſondern verſchwindet gegen ein unendliches x, ob er gleich gegen eine endliche Größe unendlich groß iſt. Wenn man aus der allgemeinen Gleichung den Werth von y nimmt, und in dieſem die Glieder wegläßt, welche kein x enthalten, ſo iſt in dieſem dritten Falle

$$y = -\frac{bx}{2a} \pm \frac{\sqrt{(2bd-4ae)x}}{2a}.$$

Die Wurzelgröße iſt zwar unendlich, aber gegen bx unvergleichbar klein.

Dieſe drey Fälle ſind bey der Ellipſe, der Hyperbel und der Parabel vorhanden.

Iſt $a=0$, ſo iſt für jedes x nur ein Werth von y vorhanden. Dieſes iſt der beſondere Fall, wenn die Ordinaten an einer Hyperbel der einen Aſymptote parallel ſind.

4. Man ordne die Gleichung nach den Potenzen

von y, um die algebraiſchen Eigenſchaften derſelben auf die Geometrie anzuwenden, ſo iſt

$$yy + \frac{bx + d}{a} y + \frac{cx^2 + ex + f}{a} = o.$$

Hier iſt $\frac{bx + d}{a}$ die Summe der den Werthen von y entgegengeſetzten Größen, wie ſchon in dem vorherg. Art. 29. bemerkt worden. Es ſey LMNO (Fig. 48) eine Curve der erſten Claſſe, AX die Abſciſſenlinie, AP eine Abſciſſe, PM, PN die beiden zugehörigen Ordinaten oder Wurzeln der Gleichung für die beſtimmte x, ſo iſt $PM + PN = - \frac{bx + d}{a}$. In dem Falle der Figur, da nebſt der Abſciſſe beide Ordinaten poſitiv genommen werden, iſt b, oder d, oder beides negativ, wenn a als Einheit poſitiv bleibt. Als abſolute Größen betrachtet, bekommen ſie dann durch die Negation das Vorzeichen —. Fällt der Punct N auf die andere Seite der Abſciſſe, ſo iſt PN negativ, und der Coefficient abſolut genommen giebt den Unterſchied der Ordinaten an.

5. Für die Abſciſſe $Ap = x'$ ſeyn die Ordinaten pm, pn, ſo iſt ebenfalls $pm + pn = - \frac{bx' + d}{a}$. Zieht man von der Summe dieſer Ordinaten die Summe PM + PN ab, ſo wird erhalten, $pm + pn - PM - PN = \frac{b}{a} \times pP$. Man ziehe durch m und n mit AX die parallelen mH, nk, welche die PNM in F und G ſchneiden, ſo iſt

$$GN - FM = \frac{b}{a} \times pP.$$

Daher auch

$$FN - GM = \frac{b}{a} \times pP.$$

6. Es ſey die mit den Ordinaten parallele BC eine berührende in C, und durch C werde mit der Abſciſſenlinie parallel die CD gezogen, welche MN in E ſchneide, ſo iſt

$$EN - EM = \frac{b}{a} \times pP.$$

7. Wenn in der Gleichung zwiſchen x und y iſt $b = o$, und $d = o$, ſo ſind die Werthe der Ordinaten durchgehends gleich und entgegengeſetzt, oder beide unmöglich.

8. Wenn für zwey verſchiedene Abſciſſen die Werthe der zugehörigen Ordinaten gleich und entgegengeſetzt ſind, ſo ſind die Coefficienten b und $d = o$. Denn der Factor von y, nämlich $\frac{bx + d}{a}$, kann nur für einen einzigen Werth von x null werden, nämlich für $x = -\frac{d}{b}$, wenn nicht beide, b und d, null ſind. Iſt d allein null, ſo iſt der Factor bloß null, wenn $x = o$ iſt; und wenn b allein null iſt, ſo iſt der Factor unveränderlich, und $= \frac{d}{a}$. Die Werthe der Ordinaten ſind für jedes x alsdann ungleich.

9. Eine gerade Linie, die zwey parallele Chorden halbirt, halbirt jede mit dieſen parallele, und iſt daher ein Durchmeſſer im eigentlichen Verſtande. Sie wird durch die Gleichung, $z = -\frac{bx + d}{2a}$, beſtimmt (krumme Linie, 31.). Dieſe Ordinate z an eine gerade iſt das arithmetiſche Mittel zwiſchen den beiden Ordinaten an die krumme Linie; daher die Unterſchiede jener z und dieſer gleich groß ſind.

10. Eine krumme Linie der erſten Claſſe (Fig. 49.) werde von der Abſciſſenlinie in B und C geſchnitten. Die Ordinatenlinie ſchneide ſie in M und N. Das Product

der den Wurzeln der allgemeinen Gleichung entgegengeſetzten Größen iſt $= \frac{cx^2+ex+f}{a}$ (Gleichung, 40.). Da in dem Falle der Figur die Werthe von y ſich entgegengeſetzt ſind, ſo iſt hier $PM \times PN = -\frac{cx^2+ex+f}{a}$, wie in Gleichung, 34. Weil die Abſciſſenlinie zweymahl die Curve treffen ſoll, ſo wird die Function $cxx+ex+f$ zweymahl Null, und die Wurzeln der Gleichung; $cxx+ex+f=0$ ſind AB, AC, wenn nämlich A der Anfang der Abſciſſen iſt. Daher iſt, (Gleichung, 43.), die Function $xx+\frac{ex}{c}+\frac{f}{c}=(x-AB)(x-AC)$ $=(AP-AB)(AP-AC)$ oder $PB \times PC$ $=-(xx+\frac{ex}{c}+\frac{f}{c})$. Der Werth dieſes Products mit dem von $PM \times PY$ verglichen, giebt $PM \times PN : PB \times PC = c:a$, oder das Verhältniß der Rechtecke von den Segmenten der einander und die Curve unter demſelben Winkel ſchneidenden geraden iſt ein unveränderliches. Am Kreiſe iſt das Verhältniß das der Gleichheit.

11. Es ſey DE eine mit MN parallele, welche die BC in F ſchneide; ſo iſt $FD \times FE : FB \times FC = c:a$, alſo iſt

$$PM \times PN : FD \times FE = PB \times PC : FB \times FC.$$

12. Man ziehe noch GH parallel mit BC, welche die beiden ED und NM in K, L ſchneide. Da $PB \times PC : LG \times LH = PM \times PN : LM \times LN$, und

$$LG \times LH : KG \times KH = LM \times LN : KD \times KE$$

iſt, ſo entſteht hieraus die Proportion,

$$PB \times PC : KG \times KH = PM \times PN : KD \times KE.$$

Ein rein geometriſcher Beweis dieſer Sätze macht mehr

Mühe. Man ſehe Milnes sect. conic. elementa, Prop. 17. 18. De la Hire Sect. Con. L. V. prop. 4. 5.

13. Die Abſciſſenlinie berühre die krumme Linie in B (Fig. 50.), ſo fallen zwey Durchſchnittspuncte in einen einzigen B (C) zuſammen, und die Function, $xx + \frac{ex}{c} + \frac{f}{c}$ iſt ein Quadrat. Zieht man die parallelen PNM, FED an die Curve, ſo iſt

$$PM \times PN : FD \times FE = PB^2 : FB^2.$$

14. Wenn die Abſciſſenlinie die krumme Linie nicht ſchneidet, ſo hat die Function von x, welche dem Producte der den Ordinaten entgegengeſetzten Größen gleich iſt, nämlich $\frac{1}{a}(cxx + ex + f)$, keine mögliche Factoren, da y für keinen Werth von x Null wird. Daher iſt $4cf > e^2$. Man gebe der Function von x dieſe Form, $\frac{1}{ac}((cx + \frac{1}{2}e)^2 + cf - \frac{1}{4}e^2)$, ſo verhält ſich das Product der entgegengeſetzt genommenen Ordinaten, wie das Quadrat der Hypotenuſe eines rechtwinklichten Dreyecks, deſſen Katheten ſind $cx + \frac{1}{2}e$ und $\sqrt{(cf - \frac{1}{4}ee)}$. Die krumme Linie ſey EFMN (Fig. 51.), die Abſciſſenlinie AX, welche die Curve nicht ſchneidet, eine Abſciſſe AP, die Ordinaten PM, PN. Man ſetze in A auf die Abſciſſenlinie die ſenkrechte $AB = \frac{1}{c}\sqrt{(cf - \frac{1}{4}ee)}$, ziehe durch B mit AX die parallele BB, nehme $AC = \frac{e}{2c}$, errichte in P die ſenkrechte PQ bis an BB, und ziehe CQ, ſo iſt $CQ^2 = (x + \frac{e}{2c})^2 + \frac{1}{cc}(cf - \frac{1}{4}ee)$ oder $CQ^2 = \frac{1}{cc}((cx + \frac{1}{2}e)^2 + cf - \frac{1}{4}ee)$. Das Product der

Ordinaten $PM \times PN$, welches mit dem ihrer entgegengeſetzten gleichnamig iſt, iſt alſo $= \frac{c}{a} \cdot CQ^2$. Eine andere Ordinatenlinie ſey DEF. Durch den Punct D ſetze man ſenkrecht auf AX die DG, welche AB in G treffe, ſo iſt das Product $DE \times DF = \frac{c}{a} CG^2$. Folglich iſt

$$PM \times PN : DF \times DE = CQ^2 : CG^2.$$

15. Es ſey $BMCN$ (Fig. 52.) eine Curve der erſten Claſſe, an welche von irgend einem Puncte A eine gerade AMN willkürlich gezogen iſt. Der Ort für die Summe der reciproken $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}$, iſt eine gerade RR, und zwar diejenige, welche durch die Gleichung $dy + ex + f = 0$ beſtimmt wird, wenn A der Anfang der Abſciſſen auf irgend einer Axe derſelben iſt (krumme Linie, 36.). Demnach iſt, wenn AMN die RR in P ſchneidet, $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{1}{AP}$.

Daraus iſt $AM + AN : AM = AN : AP$;
auch $AN - AP : AP = AN : AM$;
oder $AM - AP : AP = AM : AN$.

16. Es ſeyn AB und AC (Fig. 52.) berührende in B und C, welche die RR jene in D, dieſe in E ſchneiden. Hier iſt $\frac{1}{AB} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{AD}$, alſo $AB = 2AD$; und eben ſo $AC = 2AE$. Man ziehe BC, ſo iſt, wegen der gleichen Verhältniſſe, $AB : AD$ und $AC : AE$, die gerade BC parallel mit DE oder RR.

17. Die gerade AMN ſchneide BC in L, ſo iſt $AL = 2AP$, weil $AL : AP = AB : AD$ iſt. Es iſt

daher $\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = \frac{2}{AL}$. Hieraus iſt $AL \times AN + AL \times AM = 2\,AM \times AN$, oder $(AM + ML)AN + AL \times AM = AM \times AN + AM\,(AL + LN)$, das iſt

$$AN \times ML = AM \times LN,$$
$$\text{und } AN : AM = LN : ML.$$

Die Linie AN wird alſo von der Curve, und der die Berührungspuncte verbindenden BC harmoniſch getheilt, ſ. harmon. Theilung.

18. Durch M und N ziehe man mit BC die parallelen FH, GI, welche die berührenden jene in F, H, dieſe in G, I, und die Curve in S und T ſchneiden. Es iſt $BF : BG = LM : LN = AM : AN = FM : GN$. Aus (14.) iſt $FM \times FS : GN \times GT = BF^2 : BG^2$. In dem erſtern zuſammengeſetzten Verhältniſſe ſetze man für das $FM : GN$ das ihm gleiche $BF : BG$, ſo wird es $BF \times FS : BG \times GT$. Durch Aufhebung der gleichen componirenden Verhältniſſe in der Proportion, verwandelt ſie ſich in dieſe, $FS : GT = BF : BG$. Es iſt $BF : BG = ML : LN = AM : AN = AF : AG$, alſo $FS : GT = AF : AG$. Die gerade GI wird von der geraden AS in einem Puncte T′ ſo geſchnitten daß $FS : GT' = AF : AG$ iſt. Daher fallen die Durchſchnittspuncte, T mit der Curve, und T′ mit der geraden AS, in einen zuſammen, oder die gerade ST geht durch A.

19. Durch die Mitte O von MS ziehe man AOQ bis an NT. Dieſe NT wird auch von AQ halbirt. Da die gerade, welche zwey Chorden halbirt, auch alle dieſe parallelen halbirt (9.), ſo iſt der Punct K, worin AQ die BC trifft, die Mitte von BC. Folglich halbirt die AO auch die mit BC parallele FH. Dadurch iſt $FM = HS$. Oder, die Abſchnitte einer geraden Linie zwiſchen der Curve und zwey berührenden geraden, wenn jene

mit der die Berührungspuncte verbindenden parallel iſt, ſind ſich gleich.

20. In dem Artikel, Hyperbel, 35. iſt gefunden, daß die Segmente einer geraden Linie zwiſchen der Curve und den Aſymptoten gleich groß ſind. Dieſes iſt ein beſonderer Fall des jetzt gefundenen allgemeinen. Die Aſymptoten ſind als berührende in unendlich entfernten Puncten anzuſehen; die verbindende der Berührungspuncte hat keine beſtimmte Lage.

21. Der Satz (15.) dient, zu fünf gegebenen Puncten eines Kegelſchnitts ſo viele einzelne zu finden als man will. Man ziehe durch zwey Paare derſelben, als M und N, S und T (Fig. 52.) gerade Linien, welche ſich in A ſchneiden, und nehme AP und AU ſo wie es in (15) angegeben iſt. Dadurch wird die Lage der geraden RR beſtimmt. Nun ziehe man von A nach dem fünften Puncte eine gerade, welche RR in einem gewiſſen Puncte ſchneide. Durch die Abſtände beider Puncte von A findet man den ſechſten auf dem Kegelſchnitte. Darauf nehme man von den ſechs Puncten zwey andere Paare als vorher, und beſtimme dadurch eine andere gerade RR, verfahre darauf, wie eben gezeigt worden, und ſetze dieſes fort, bis eine für die Ausübung hinlängliche Anzahl Puncte beſtimmt worden iſt.

22. Zu der Zeichnung eines Kegelſchnittes mittelſt einzelner Puncte kann man die Lehrſätze in dem Artikel, Kreis, 72. 76. benutzen. Es ſeyn von einem Kegelſchnitte fünf Puncte gegeben; dieſe betrachte man als Projectionen der fünf Puncte eines Kreiſes, A, B, C, D, E (Fig. 30.). In dem Kreiſe verlängere man die geraden AB, ED bis zu ihrem Durchſchnitte G, ziehe willkürlich die gerade GHI, verlängere die gerade BC bis an dieſelbe in H, und die CD eben dahin in I, verbinde HE, AI, ſo liegt der Durchſchnitt F der verlängerten HE und der AI auf dem Kreisumfange. Nimmt man eben dieſe Zeichnung in der Projection vor, ſo iſt F auch ein Punct des

Kegelſchnittes, zu welchem die Puncte A, B, C, D, E gehören. Denn die Durchſchnittspuncte G, H, I, welche in der Zeichnung für den Kreis in eine gerade Linie fallen, (72) liegen in der Projection ebenfalls in einer geraden Linie.

Auf ähnliche Art wird zufolge (76.) aus fünf Puncten eines Kreiſes ein ſechſter beſtimmt. Die gegebenen Puncte ſeyn A B C. D, E. (Fig. 32.) Man verlängere die geraden A B D C bis zu ihrem Durchſchnitte G, ziehe B E, nehme auf derſelben einen Punct H, ziehe G H, welche verlängert die gleichfalls verlängerte C E in I treffe, ſo iſt der Durchſchnitt F der verlängerten D H mit der A I ein Punct des Kreiſes. Durch dieſelbe Zeichnung wird F ein Punct des Kegelſchnittes, zu welchem die Puncte A, B, C, D, E gehören.

Es iſt hier, wie bey der vorhergehenden Zeichnung, gleichgültig, welche zwey von den drey Puncten G, H, I man wähle, um den dritten zu beſtimmen.

Lambert hat in ſeiner freyen Perſpectiv, Th. II. S. 165 gezeigt, wie durch Hülfe der Perſpectiv die Aufgabe, durch fünf Puncte eine Linie der zweyten Ordnung zu ziehen, aufgelöſet werden mag. Doch iſt bey den gegebenen Puncten noch eine gewiſſe einſchränkende Bedingung, wenn die Horizontallinie gegeben wird.

23. Aus der allgemeinen Gleichung wird die Lage des Durchmeſſers für den gegebenen Ordinatenwinkel folgendergeſtalt gefunden.

Es ſey G M I N (Fig. 53.) eine Curve der erſten Claſſe. A X die Abſciſſenlinie. A P eine Abſciſſe, P M und P N die dazu gehörigen Ordinaten. Die allgemeine Gleichung iſt

$$ayy - bxy + cx^2 - dy + ex + f = 0.$$

Der Factor von y hat das Vorzeichen — bekommen, damit die Wurzeln der Gleichung als poſitiv erſcheinen, wie

die Ordinaten PM, PN in der Figur. Übrigens können b und d beide oder einzeln negativ ſeyn, wodurch die Glieder additiv werden, ſo fern x und y poſitiv ſind. Man ſetze $y = \frac{bx+d}{2a} + u$, ſo verwandelt ſich die Gleichung in dieſe,

$$auu - \frac{(bx+d)^2}{4a} + cx^2 + ex + f = o.$$

Man nehme auf der Abſciſſenlinie, $AB = \frac{d}{b}$, den poſitiven Abſciſſen entgegengeſetzt, lege $AE = \frac{d}{2a}$ den Ordinaten parallel, ziehe die gerade BED, welche die Ordinatenlinie PNM in Q ſchneide, ſo iſt $PQ = \frac{bx+d}{2a}$, da BA : AE = BP : PQ iſt. Der Punct Q theilt MN in zwey gleiche Theile. Denn es iſt $PM + PN = \frac{bx+d}{a}$, dem Factor oder Coefficienten von y, in der durch a dividirten Gleichung. Alſo iſt PM + PN = 2PQ, und daher PQ das arithmetiſche Mittel von PM und PN, das iſt MQ = NQ. Oder durch Zerlegung: PQ + QM + PN = PQ + PN + NQ, das iſt QM = QN.

24. Es ſoll nun die Lage des Mittelpuncts C auf dem Durchmeſſer GI in Beziehung auf die Abſciſſenlinie beſtimmt werden.

Durch die Endpuncte G, I des Durchmeſſers ziehe man parallel mit den Ordinaten die geraden GF, IH bis an die Abſciſſenlinie in F und H. Da hier die gleichen Ordinaten auf BD null ſind, oder u = o iſt, ſo iſt

$$\frac{(bx+d)^2}{4a} = cx^2 + ex + f,$$

oder

$$(bb - 4ac)x^2 - (4ae - 2bd)x + dd - 4af = 0.$$

Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind AF und AH. Man halbire FH in K, ſo iſt $AK = \frac{1}{2}(AF + AH)$, das iſt

$$AK = \frac{2ae - bd}{bb - 4ac}.$$

Man ziehe KC, ſo iſt dieſe mit FG parallel, da GC = CI, ſo wie FK = KH iſt. Nun iſt BA : AE = BK : KC. Hier iſt $BK = BA + AK = \frac{2a(be - 2cd)}{b(bb - 4ac)}$. Da BA : AE = 2a : b, und BA : AE = BK : KC iſt, ſo iſt

$$CK = \frac{be - 2cd}{bb - 4ac}.$$

25. Alle Durchmeſſer einer Curve der erſten Claſſe haben einen gemeinſchaftlichen Mittelpunct.

An derſelben krummen Linie (Fig. 53.), für welche die Gleichung zwiſchen x und y, oder zwiſchen AP und PM (auch PN), geſetzt iſt, nehme man den Ordinatenwinkel ARM ſtatt des APM, ſo treten für die Coordinaten AP, PM die AR, RM an demſelben Puncte M in die Stelle. Die Verhältniſſe von PM, RM, PR ſind gegeben. Man ſetze AR = t; RM = z, RP = mz; PM = nz, ſo iſt x = t + mz; y = nz. Dieſe Werthe von x und y ſubſtituire man in der gegebenen Gleichung, um eine zwiſchen t und z zu erhalten. Aus dieſer findet man die Lage des Mittelpuncts des Durchmeſſers gi für die Ordinaten RM, durch zwey ähnliche Formeln als vorher für den Durchmeſſer GI zu den Ordinaten PM. Es bedeute nun C den Mittelpunct des Durchmeſſers gi für die Ordinaten wie RM. Durch C ſey CL parallel mit den Ordinaten RM gezogen, welche die Abſciſſenlinie in L treffe. Die Gleichung zwiſchen z und t ſey dieſe,

$$Azz - Btz + Ct^2 - Dz + Et + F = 0,$$

ſo iſt

$$A = n^2 a - mnb + m^2 c;$$
$$B = nb - 2mc; \quad C = c;$$
$$D = nd - me; \quad E = e; \; F = f.$$

Es iſt nun wie in (24.)

$$AL = \frac{2A.E - B.D}{B.B - 4A.C};$$

$$LC = \frac{B.E - 2C.D}{B.B - 4A.C}.$$

Nun iſt

$$2A.E = 2e(n^2 a - mnb + m^2 c),$$
$$B.D = n^2 b^2 d - 2mncd - mnbe + 2m^2 ce.$$

alſo

$$2A.E - B.D = n^2(2ae - bd) - mn(be - 2cd).$$

ferner $B.B = n^2 bb - 4mnbc + 4m^2 cc;$

$$4A.C = 4n^2 ac - 4mnbc + 4m^2 cc.$$

alſo

$$B.B - 4A.C = n^2(bb - 4ac).$$

Noch iſt

$$B.E - 2C.D = n(be - 2cd).$$

Daraus iſt

$$AK - AL = KL = \frac{m(be - 2cd)}{n(bb - 4ac)},$$

und $LC = \dfrac{be - 2cd}{n(bb - 4ac)}.$

Man ziehe von C als Mittelpunct auf dem Durchmeſſer gi nach K die gerade CK, ſo iſt das Dreyeck CLK dem MRP ähnlich. Denn es iſt $CL : LK = 1 : m = MR : RP$, und die Winkel L und R ſind gleich. Es iſt alſo $RP : MP = LK : CK$, das iſt $m : n = LK : CK$, alſo $CK = \dfrac{be - 2cd}{bb - 4ac}$; zugleich iſt CK parallel mit

MP. Dieſes iſt aber auch der Werth der von K nach dem Mittelpuncte auf GI gezogenen, und mit PM parallelen geraden Linie. Folglich fallen beide Mittelpuncte, der von GI und gi in eins, welche Lage auch gi haben mag.

In Eulers Introd. in Anal. Inf. T. II. §. 101—108 iſt der Beweis auf eine ganz andere Art geführt.

26. Wenn bb = 4ac, ſo ſind AK und KC unendlich groß. Dieſes iſt der Fall bey der dritten Gattung in (3.), der Parabel. In dieſer ſind alſo wegen des unendlich entfernten Mittelpunctes die Durchmeſſer alle ſich parallel.

27. Durch den Unterſchied der Abſciſſen AF, AH, nämlich FH, wird die Größe des Durchmeſſers GI bekannt. Denn es iſt AB:BE = FH:GI. Die Linie BE wird in dem Dreyecke BAE durch die Seiten AB, AE mit dem eingeſchloſſenen Winkel gegeben. Dadurch iſt auch der Winkel GQN der Coordinaten gegeben, der dem W. AEB gleich iſt, das iſt der Winkel des zu GI conjugirten Durchmeſſers mn mit demſelben. Dieſer Durchmeſſer iſt der Unterſchied der beiden Ordinaten in K. Aus den conjugirten Durchmeſſern und ihrem Winkel werden die beiden Axen und ihr Winkel mit jenen bekannt, weil dadurch das Product der beiden Axen und die Summe ihrer Quadrate gegeben werden, (Ellipſe, 23. 24. Hyperbel, 27, 28. Vergl. Gleichung, 49.) Wie eine Parabel beſtimmt werden könne, wird ſich aus dem Artikel, Parabel, ergeben.

28. Es werde nun aus der einfachſten Gleichung für einen Kegelſchnitt, bey einem gegebenen Winkel der Coordinaten die allgemeinſte Gleichung für eine krumme Linie der erſten Claſſe geſucht, um daraus einzuſehen, wie die Coefficienten der letztern aus den gegebenen Größen an dem Kegelſchnitte und der Lage der Abſciſſenlinie mit jenem Winkel beſtimmt werden. Daraus wird zugleich erhellen,

daß alle krummen Linien der erſten Claſſe Kegelſchnitte ſind. Die einfachſte Gleichung für jeden Kegelſchnitt wird erhalten, wenn die Abſciſſen auf einem Durchmeſſer von dem Scheitel (an der Ellipſe und Hyperbel von dem einen oder dem andern) genommen werden, und die Ordinaten auf beiden Seiten der Abſciſſenlinie ſich gleich ſind. Da in der Parabel der Mittelpunct unendlich weit entfernt iſt, ſo iſt daran der Anfang der Abſciſſen in ihrem Scheitel zu nehmen, und deshalb auch in den beiden andern Kegelſchnitten.

29. Es ſey DE (Fig. 54.) ein Durchmeſſer einer Ellipſe, FG der conjugirte, welche ſich in dem Mittelpuncte O ſchneiden. Mit FG ſey parallel die Chorde MN, welche DE in Q treffe, ſo iſt QM = QN (Ellipſe, 16.). Es iſt (daſ. 18.)

$$\frac{2FO^2}{DO}.DQ - \frac{FO^2}{DO^2}DQ^2 = QM^2.$$

Nun ſey AX irgend eine zur Abſciſſenlinie genommene gerade, welche die verlängerte DE in B ſchneide. Auf derſelben ſey A der Anfangspunct, AP irgend eine Abſciſſe, PNM eine Ordinatenlinie parallel mit FG. Durch A ziehe man parallel mit PM die AC bis an BD in C, auch AR parallel mit DE an MN. Es iſt nun DQ = AR — CD, und AR die vierte proportionale zu AB, BC und AP. Ferner iſt QM = PM — QR — PR, wo PR die vierte proportionale zu AB, AC und AP iſt. So iſt auch die entgegengeſetzte QN = QR + PR — PN. Man ſetze AP = x; PM = y, AB = a; AC = b; BC = c; CD = d; DO = f; FO = mf, ſo iſt

$$2m^2f\left(\frac{cx}{a} - d\right) - m^2\left(\frac{cx}{a} - d\right)^2$$
$$= \left(y - b - \frac{bx}{a}\right)^2.$$

Daraus iſt die geordnete Gleichung,

$$y^2 - \frac{2b}{a}xy + \left(\frac{bb}{aa} + \frac{m^2cc}{aa}\right)x^2 - 2by$$
$$+ \left(\frac{2bb}{a} - \frac{2m^2cd}{a} - \frac{2m^2cf}{a}\right)x$$
$$+ bb + m^2dd + 2m^2df = 0.$$

Vergleicht man dieſe Gleichung mit der allgemeinen,
$Ay^2 - Bxy + Cx^2 - Dy + Ex + F = 0$, ſo geben die fünf Coefficienten, $-\frac{B}{A}$; $+\frac{C}{A}$, u. ſ. f. fünf Gleichungen zur Beſtimmung von fünf Größen unter den ſechs, a, b, c, d, f, m. Es iſt für die allgemeine Gleichung der Coordinatenwinkel willkürlich. Nimmt man dieſen an, ſo iſt c durch a und b beſtimmt, und es bleiben fünf noch zu finden. Erſt ich iſt $b = \frac{1}{2}D$; ferner $\frac{2b}{a} = B$, alſo $a = \frac{D}{B}$. Dann iſt $\frac{1}{4}B^2 \times \left(1 + \frac{4m^2c^2}{D^2}\right) = C$, woraus m gefunden wird. Die beiden übrigen Größen d und f werden aus der Verbindung der beiden Werthe von E und F gefunden. Für d finden zwey Werthe Statt, deren einer der Abſtand des Punctes C von dem andern Scheitel iſt.

30. In der gefundenen Gleichung iſt $\frac{1}{4}B^2 < AC$, weswegen für unendliche x keine y möglich ſind (3.). Die Ellipſe iſt eine Curve in einem beſchränkten Raume.

31. Aus der einfachſten Gleichung für die Hyperbel, die Abſciſſen auf einem Durchmeſſer, und der Anfang im Scheitel genommen, die Ordinaten parallel mit dem conjugirten gezogen, (Hyperbel, 22.) leite man eben ſo eine allgemeine Gleichung her. Dieſe iſt, da bloß das Quadrat der Abſciſſe DQ das Vorzeichen ändert,

$$y^2 - \frac{2b}{a}xy + \left(\frac{bb}{aa} - \frac{m^2cc}{aa}\right)x^2 - 2by$$
$$+ \left(\frac{2bb}{a} + \frac{2m^2cd}{a} - \frac{2m^2cf}{a}\right)x$$
$$+ bb - m^2dd + 2m^2df = 0.$$

Hier iſt $\frac{1}{4}B^2 > AC$, und die Gleichung hat für ein unendliches x zwey unendliche Ordinaten. Die Hyperbel hat vier unendliche Zweige.

32. Das Aggregat der drey erſten Glieder der Gleichung, oder der höchſte Theil iſt das Product aus den Factoren, $y - \left(\frac{b}{a} + \frac{mc}{a}\right)x$, und $y - \left(\frac{b}{a} - \frac{mc}{a}\right)x$. Für unendlich große Coordinaten iſt alſo die Gränze des Quotienten $\frac{y}{x}$, oder von q in (2.), $= \frac{b}{a} \pm \frac{mc}{a}$, wobey x ſowohl poſitiv als negativ genommen werden kann. Die Hyperbel nähert ſich immer mehr und mehr zwey geraden Linien, deren Gleichungen ſind, $y - \left(\frac{b}{a} \pm \frac{mc}{a}\right)x + k = 0$, wo k für jede eine beſondere unveränderliche, poſitive oder negative Größe, oder auch 0 iſt; denn zu einer völlig beſtimmten Gleichung für eine gerade Linie gehört auch eine ſolche gegebene Größe. Für unendliche x und y wird das Verhältniß der Coordinaten an der Hyperbel und an den beiden geraden Linien daſſelbe. Die Werthe von k werden aus den vollſtändigen Werthen von y, welche die Auflöſung der Gleichung zwiſchen x und y liefert, gefunden. Sie ſind der gegebene Theil in dieſen Werthen. Die Gleichungen für die Aſymptoten ſeyn nun $z - \alpha x + \beta = 0$, und $z - \gamma x + \delta = 0$, wo z die Ordinaten an dieſen ge-

raden Linien bedeuten, welchen die Ordinaten y an der Hyperbel zuletzt gleich werden. Setzt man im Unendlichen $y = z$, und nimmt den Werth von z an der erſtern Aſymptote, $z = \alpha x$, ſo verwandelt ſich der höchſte Theil der Gleichung für y in $\beta (y - \gamma x + \delta)$. Dieſes iſt ein Unendliches vom erſten Grade, welches ſich mit dem zweyten Theile der Gleichung, der x und y enthält, ſo weit heben muß, daß nur ein endlicher Unterſchied bleibt, der mit dem gegebenen Theile der Gleichung zuſammen genommen $= 0$ wird. Eben ſo verhält es ſich, wenn $y = \gamma x$ geſetzt wird.

33. Wenn das Glied xx fehlt, oder wenn $b = \pm mc$ iſt, ſo iſt einer der Coefficienten von x in den Gleichungen für die Aſymptoten $= 0$. Es ſey $\alpha = 0$, ſo iſt die Gleichung für die eine derſelben, $z + \beta = 0$, welches anzeigt, daß die eine der Aſymptoten der Abſciſſenlinie in dem Abſtande $-\beta$ nach der Richtung der Ordinaten parallel iſt. Sie fällt in dieſe ſelbſt, wenn $\beta = 0$ iſt. In jenem Falle iſt die Gränze der einen Reihe der Ordinaten y der Abſtand $-\beta$ von der Abſciſſenlinie. Fehlt yy und iſt xx vorhanden, ſo iſt die Axe der Ordinaten y der einen Aſymptote parallel, oder fällt in dieſe ſelbſt. Fehlen xx und yy beide, ſo ſind beide Axen der Coordinaten, jede einer derſelben, parallel, oder liegen in ihnen ſelbſt.

34. Die Gleichung für die Parabel, wenn die Abſciſſen auf einem Durchmeſſer von dem Scheitel an, und die Ordinaten gleich und entgegengeſetzt genommen werden, iſt $h . DQ = QM^2$, wo h der Parameter zu dem Durchmeſſer iſt. Es wird nämlich in der Gleichung für die Ellipſe $m = 0$, das iſt, der conjugirte Durchmeſſer wird zwar unendlich groß, wie der Durchmeſſer $2f$, aber gegen dieſen unendlich klein, ſo doch daß der Parameter $2m^2f$ endlich iſt. Dieſer werde durch h bezeichnet. Die allgemeine Gleichung für die Parabel iſt daher,

$$yy - \frac{2b}{a}xy + \frac{bb}{aa}x^2 - 2by$$
$$+\left(\frac{2bb}{a} - \frac{ch}{a}\right)x + bb + dh = 0.$$

Hier iſt $B^2 = 4AC$. Auch erhält d nur einen einfachen Werth.

35. Die Linie, welcher ſich die Parabel immer mehr nähert, iſt eine andere Parabel, deren Gleichung iſt $z^2 - \frac{2b}{a}xz + \frac{bb}{aa}x^2 - \frac{ch}{a}x = 0$. Für dieſe iſt $z = \frac{bx}{a} \pm \sqrt{\frac{ch}{a}x}$. Eben dieſes iſt der Werth von y, wenn in dem Werthe dieſer Größen die endlichen Größen gegen die unendlich großen weggelaſſen werden. Zu vergleichen die Bemerkung in (3.). Ohne das Glied, $\sqrt{\frac{ch}{a}x}$, unterſchiede ſich die Ordinate zu der Aſymptote der Parabel nicht von der für eine Hyperbel.

36. Für die alten Geometer war es eine wichtige Aufgabe, den geometriſchen Ort zu drey oder vier geraden Linien zu finden. Pappus giebt in der Vorrede zu dem ſiebenten Buche ſeiner mathematiſchen Sammlung folgende Nachricht derſelben. Es ſind drey gerade Linien der Lage nach gegeben, an welche von einem (noch unbeſtimmten) Puncte drey gerade unter gegebenen Winkeln gezogen werden; das Verhältniß des Rechtecks zweyer dieſer letztern zu dem Quadrate der dritten unter ihnen iſt gegeben: ſo liegt der gedachte Punct auf einem der drey Kegelſchnitte. Wenn aber vier gerade Linien der Lage nach gegeben ſind, und an dieſelben von einem Puncte gerade Linien unter gegebenen Winkeln gezogen werden, ſo daß das Verhältniß des Rechtecks von zweyen derſelben zu dem Rechteck von den beiden andern ein gegebenes ſey, dann liegt gleichfalls der Punct auf einem Kegelſchnitte.

Euklides hat ſich ſchon mit dieſer Aufgabe beſchäftigt. Nun ſagt zwar Apollonius in der Vorrede zu ſeinem großen Werke über die Kegelſchnitte, daß Euklides ſie weder vollſtändig noch glücklich aufgelöſet habe, weil dieſes ohne die von ihm ſelbſt erfundenen Sätze nicht möglich geweſen ſey. Allein Pappus tadelt ihn wegen dieſer Herabſetzung eines ſo würdigen Geometers, als Euklides war, den er als einen ſehr ſanften, nicht ruhmredigen, ſondern jedes auch geringe Verdienſt um die Mathematik gütig ſchätzenden Mann ſchildert. Pappus führt ferner an, daß für mehr als vier gegebene gerade Linien der Ort des Punctes nicht bekannt, ſondern nur eine ſo genannte Linie (d. i. eine Curve, die kein Kegelſchnitt iſt) ſey. Bey fünf oder ſechs geraden Linien iſt das Verhältniß der Parallelepipeden gegeben, welche von den veränderlichen, aus jedem Puncte der Curve unter gegebenen Winkeln an die geraden Linien gezogenen, geraden gebildet werden. Bey mehr als ſechs erinnert er, daß man ſtatt der geometriſchen Größen, der Rechtecke und Parallelepipeden zuſammengeſetzte Verhältniſſe gebrauchen müſſe, da es keine Größen von vier Dimenſionen gebe.

Descartes fängt ſeine Geometrie mit dieſer Aufgabe, allgemein genommen, an, um von da auszugehen, wo die Alten ſtehen geblieben waren. Wir wollen hier nur die Aufgabe, für vier gegebene gerade Linien auflöſen, woraus es genugſam erhellen wird, wie ſie für mehrere behandelt werden könne.

37. Es ſind AA, BB, CC, DD (Fig. 55.) vier der Lage nach gegebene gerade Linien, an welche von einem Puncte P die geraden PQ, PR, PS, PT unter gegebenen Winkeln, PQA, PRB, PSC, PTD, gezogen werden ſollen. Man verlängere jede der drey letztern bis zu ihrem Durchſchnitte mit der erſten AA, mit welcher hier keine der andern parallel ſeyn ſoll. Die Durchſchnitte nach der Folge der geraden Linien ſeyn H, I, K. Die gerade AA nehme man zur Abſciſſenlinie für

die Curve, welche der Ort des Punctes P iſt, ſetze den Anfang der Abſciſſen in H (oder wo man ſonſt will), und betrachte HQ und QP als Coordinaten an der geſuchten krummen Linie unter dem gegebenen Winkel PQA. Die Ordinate PQ verlängere man bis an die drey andern geraden in b, c, d. Es ſind nun in den Dreyecken QbH, QcI, QdK alle Winkel gegeben, daher die Verhältniſſe ihrer Seiten. Eben ſo in den Dreyecken PbR, PcS, PdT. Man ſetze $HI = a$; $HK = b$; $HQ = x$; $QP = y$; $HQ : Qb = 1 : m$; $IQ : Qc = 1 : n$; $KQ : Qd = 1 : p$, ſo iſt $Qb = mx$; $Qc = n(a + x)$; $Qd = p(b - x)$. Ferner ſey $Pb : PR = 1 : \alpha$; $Pc : PS = 1 : \beta$; $Pd : PT = 1 : \gamma$, ſo iſt

$$PR = \alpha(y + mx).$$
$$PS = \beta(y + nx + na).$$
$$PT = \gamma(y - px + pb).$$

Multiplicirt man eine dieſer Linien in y, die andern beiden auch in einander, und ſetzt das Verhältniß beider Producte einem gegebenen gleich, ſo entſteht eine Gleichung vom zweyten Grade zwiſchen x und y. Der Ort des Punctes P iſt alſo ein Kegelſchnitt. Dieſe Eigenſchaft der Kegelſchnitte iſt in der That merkwürdig. — Sind nur drey gerade Linien gegeben, ſo wird die eine der an ſie gezogenen Linien mit einer gegebenen multiplicirt.

Die hier gegebene Auflöſung iſt die von Descartes, allein die Anordnung und die Bezeichnung, ſowohl die für die Größen und Verhältniſſe als der Linien in der Figur iſt deutlicher.

38. Wenn mehr als vier gerade Linien gegeben ſind, ſo erhalten alle die an ſie unter beſtimmten Winkeln von einem Puncte, wie P, gezogenen gerade, eben die Form. Daher ſteigt das Product von dreyen auf den dritten Grad, und der Ort des Punctes iſt eine Linie vom dritten Grade, wenn fünf oder ſechs gerade Linien gegeben ſind.

Wenn nur zwey gerade Linien gegeben werden, ſo iſt der Ort eine gerade Linie.

Krumme Linien der zweyten Claſſe,

oder Linien der dritten Ordnung, ſind diejenigen, für welche die Gleichung auf den dritten Grad ſteigt. Die allgemeine Gleichung iſt

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = 0.$$

Der Winkel der Coordinaten iſt willkürlich.

1. Ehe man ſich auf die Unterſuchung der Geſtalt dieſer Linien in endlichen Entfernungen von dem Anfange der Abſciſſen einläßt, iſt es nöthig, die verſchiedene Geſtalt ihrer ins Unendliche fortgeſetzten Zweige zu beſtimmen, bey welcher wenigere Abänderungen Statt haben. Die Verſchiedenheiten derſelben werden den Eintheilungsgrund für dieſe Linien an die Hand geben.

2. Man ſetze $\frac{y}{x} = q$, ſo iſt

$$aq^3 + bq^2 + cq + d + \frac{eq^2 + fq + g}{x} + \frac{hq + i}{x^2} + \frac{k}{x^3} = 0.$$

Für ein unendlich großes x verſchwinden alle Glieder, die x im Diviſor enthalten, gegen diejenigen, welche davon frey ſind, oder gegen den höchſten Theil der Gleichung. Es wird bey dieſer Annahme

$$aq^3 + bq^2 + cq + d = 0.$$

Dieſe Gleichung hat entweder nur eine mögliche Wurzel, oder drey mögliche. Wenn alle drey Wurzeln möglich ſind, ſo ſind ſie alle entweder ungleich, oder zwey derſelben ſind ſich gleich, oder ſie ſind alle drey einander gleich.

Daher enthält die zweyte Claſſe der krummen Linien vier Gattungen, zufolge der Beſchaffenheit der Wurzeln, welche die Gleichung für q hat.

Bey der Unterſuchung über die Formen der Gleichungen für dieſe vier Gattungen wird angenommen, daß das Glied ay^3 in der allgemeinen Gleichung nicht fehle, oder daß a nicht Null ſey. Wenn in einer Gleichung für eine Linie dieſer Claſſe y^3 nicht vorhanden wäre, ſo darf man nur ſetzen, $x = t + \alpha u$ und $y = \beta u$, um eine Gleichung zu erhalten, worin u^3 ſich findet. Dieſes iſt nur den Coordinatenwinkel ändern.

3. Die Gleichung für q habe die Wurzeln, m, n, p, ſo iſt $aq^3 + bq^2 + cq + d = a(q-m)(q-n) \times (q-p)$, nach Gleichung, 61. Es behält nämlich jene Gleichung dieſelben Wurzeln, wenn alle Glieder durch a dividirt werden. Setzt man für q ſeinen Werth zurück, ſo iſt

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 = a(y-nx)(y-mx)(y-px).$$

4. Es iſt ſchon bey den krummen Linien der erſten Claſſe (32.35.) bemerkt, daß, wenn gleich für unendlich große x und y ein Gränzwerth von $\frac{y}{x} = m$ iſt, doch nicht ſchlechthin $y - mx = o$ wird. Denn eine geradlinichte Aſymptote wird nur durch eine vollſtändige Gleichung vom erſten Grade, $z = mx + \alpha$, beſtimmt, wo nur in beſondern Fällen $\alpha = o$ iſt. Bey einer Aſymptote vom zweyten Grade muß in dem Werthe ihrer Ordinate noch zu dem Gliede, welches x enthält, das Glied $\sqrt{x}$ hinzukommen.

5. Man theile die ganze Gleichung in vier Theile, nach der Anzahl der Dimenſionen von den veränderlichen Größen, nämlich $P + Q + R + k = o$, wo P, Q, R nach der Reihe Functionen von drey, zwey, einer Dimenſionen ſind, und k das unveränderliche Glied iſt. Man ſetze $P = (y - mx)M$. Es iſt alſo

$y - mx + \frac{Q}{M} + \frac{R}{M} + \frac{k}{M} = o$, wo Q und M Functionen von gleich vielen Dimenſionen ſind. Daher iſt der Bruch $\frac{Q}{M}$ eine endliche Größe, wenn für unendlich große x und y die ihnen proportionalen 1 und m geſetzt werden, es müßte denn Q den Factor $y - mx$ enthalten. Die andern beiden Brüche verſchwinden aber dadurch, daß der Nenner gegen den Zähler unendlich groß iſt. Der Gränzwerth des Bruches $\frac{Q}{M}$ ſey α, ſo iſt die Gränzgleichung $z - mx + \alpha = o$, und der Gränzwerth von P iſt $-\alpha M$, wo M eine Function zweyer Dimenſionen von x und y iſt. Dieſer Gränzwerth kann ſich mit dem zweyten Gliede Q heben, weil ſie beide gleich viele Dimenſionen enthalten. Da dieſes bey dem Verhältniſſe $1 : m$ für $x : y$ geſchieht, ſo hat die Function $-\alpha M + Q$ den Factor $y - mx$. Es ſey alſo $-\alpha M + Q = (y - mx) N$, ſo iſt im Unendlichen $(y - mx) N + R = o$, oder $y - mx + \frac{R}{N} = o$. Setzt man in N für x und y die proportionalen $1 : m$, ſo wird der Bruch $\frac{R}{N}$ eine endliche Größe β. Es iſt alſo die Gränzgleichung, $z - mx + \beta = o$, und die Gränze von $-\alpha M + Q$ iſt $-\beta N$. Auf gleiche Weiſe iſt im Unendlichen $-\beta N + R + k = o$. Da die beiden erſten Glieder ſich mit k, einer unveränderlichen Größe, heben müſſen, ſo hat $-\beta N + R$ den Factor $y - mx$. Es ſey $-\beta N + R = (y - mx) h$, wo h eine unveränderliche Größe iſt. Es iſt nun die Gränzgleichung,

$$(z - mx) h + k = o, \text{ oder } z - mx + \frac{k}{h} = o.$$

Setzt man, zur Gleichförmigkeit mit dem vorhergehenden, $\frac{k}{h} = \gamma$, ſo iſt die Gränzgleichung, $z - mx + \gamma = o$.

6. Da dieſe neue Darſtellung der Beſchaffenheit einer Gleichung vom dritten Grade zwiſchen zwey veränderlichen Größen, wenn ſie unendlich groß werden, eines Exempels bedürfen möchte, ſo folgt hier ein ſolches, worin die Zahlen ganz willkürlich genommen ſind.

Es ſey $P = (y - 4x)(y - 2x)(y - 3x)$; $Q = 5y^2 - 6xy + 4x^2$; $R = 8y + 2x$; $k = 10$. Ferner ſey $y - mx = y - 4x$, und $M = (y - 2x) \times (y - 3x) = y^2 - 5xy + 6x^2$. Im Unendlichen iſt $x : y = 1 : 4$. Der Gränzwerth von $\frac{Q}{M}$ iſt daher $= + 30 = \alpha$. Es iſt alſo bey jenem Verhältniſſe, $y - mx + 30 = 0$, und P verwandelt ſich in $- 30M$, oder in $-30(yy - 5xy + 6xx)$, das iſt, es wird nicht abſolut Null, ſondern um eine Dimenſion herabgeſetzt. Ferner iſt nun $- 30M + Q = - 25yy + 144xy - 176xx = -(y - 4x)(25y - 44x)$, und daher $N = -(25y - 44x)$. Im Unendlichen iſt

$$-(y-4x)(25y-44x) + 8y + 2x = 0,$$

oder $$y - 4x - \frac{8y + 2x}{25y - 44x} = 0,$$

das iſt $y - 4x - \frac{17}{28} = 0$, und $\beta = - \frac{17}{28}$. Daher iſt die Gränze von $- 30M + Q =$ $- \frac{17}{28}(25y - 44x)$. Auch hier wird die Function, $- 30M + Q$, nicht abſolut Null, ſondern auf eine Function von einer Dimenſion herabgeſetzt. Ferner iſt $- 30M + Q + R$ oder $- \beta N + R = - \frac{17}{28} \times (25y - 44x) + 8y + 2x = \frac{-201y + 804x}{28} = - \frac{201}{28}(y - 4x)$. Dazu das beſtändige Glied, $+ 10$,

genommen, wird $- \frac{201}{28}(y-4x)+10=0$, oder $y-4x-\frac{280}{201}=0$, und $y=\frac{280}{201}$. So iſt im Unendlichen $-\beta N+R=-10$, und der Reſt bey den Herabſetzungen jedes Theils wird zuletzt mit dem gegebenen Gliede zuſammen genommen $=0$.

7. Es heben ſich auch im Unendlichen alle Theile der Gleichung, P, Q, R, k, gegen einander auf. Denn ſonſt müßten die Coefficienten in jedem Theile eine beſondere Relation gegen einander haben, wenn jeder Theil für ſich Null werden ſollte.

8. Die Gleichung für q, bey einer unendlichen Abſciſſe x, habe nur eine mögliche Wurzel, m, ſo haben die beiden unmöglichen die Form, $A \pm B\sqrt{-1}$, nach Gleichung, 66, und es iſt der höchſte Theil der Gleichung $=a(y-mx)(yy-2Axy+(A^2+B^2)xx)$. Hier iſt alſo $M=a(yy-2Axy+(A^2+B^2)xx)$, und $Q=eyy+fxy+gxx$. Daher iſt im Unendlichen $\frac{Q}{M}=\frac{em^2+fm+g}{a(m^2-2Am+A^2+B^2)}$, und die Gränzgleichung iſt $z-mx+\frac{Q}{M}=0$. Die gerade Linie, welche durch dieſe Gleichung beſtimmt wird, iſt die Aſymptote der Curve.

9. Die Gleichung für q habe drey mögliche Wurzeln, m, n, p. Man ſetze $a(y-nx)(y-px)=M$, und $eyy+fxy+gxx=Q$, ſo iſt, wie vorher, im Unendlichen, $\frac{Q}{M}=\frac{em^2+fm+g}{a(m-n)(m-p)}$, und die Gränzgleichung iſt $z-mx+\frac{Q}{M}=0$. Dieſe gehört für eine Aſymptote der Curve. Die Gleichungen

für die beiden andern Aſymptoten findet man auf gleiche Art, wenn man den Factor y — mx mit y — nx oder mit y — px vertauſcht. Es iſt nämlich zweytens,
$$\frac{Q}{M} = \frac{en^2 + fn + g}{a(n-m)(n-p)}, \text{ und } z - nx + \frac{Q}{M} = o;$$
drittens, $\frac{Q}{M} = \frac{ep^2 + fp + g}{a(p-n)(p-m)}$, und $z - px + \frac{Q}{M} = o$.

10. Die Gleichung für ein Syſtem dreyer geraden Linien, deren Gleichungen ſind, I. $z - mx + \alpha = o$; II. $z - nx + \beta = o$; III. $z - px + \gamma = o$; worin die z drey veränderliche Größen bedeuten, iſt das Product dieſer drey Gleichungen. In dieſem iſt der Theil, welcher die Glieder von drey Dimenſionen enthält, dem gleichnamigen in der Gleichung für den Fall in (9.) völlig gleich, wenn daſelbſt $a = 1$ geſetzt, und z mit y vertauſcht wird. Man nenne dieſen Theil P, und das Product zweyer Factoren, als $(z - nx)(z - px) = M$, ſo daß $P = (z - mx) M$ iſt. Ferner ſey der zweyte Theil von zwey Dimenſionen $= Q$, ſo iſt $\frac{Q}{M} = \alpha$, wenn in den Functionen Q und M ſtatt z geſetzt wird mx; und eben ſo entweder β oder γ, wenn m mit n oder mit p vertauſcht wird. Es ſeyn jene drey gerade Linien die Aſymptoten der Curve in (9.), ſo ſind die drey durch die Subſtitution von mx ſtatt y oder z erhaltenen Werthe von $\frac{Q}{M}$, für das Syſtem von den drey geraden und für die Curve dieſelben. Da zugleich die Werthe von M dieſelben ſind, ſo ſind es auch die von Q, und daher auch die von Q ſelbſt als einer Function von y und x. Daher kommt die Gleichung für das Syſtem der drey geraden mit der für die Curve in den erſten beiden Theilen von drey und zwey Dimenſionen überein. Die Zweige der Curve nä-

hern ſich daher den Aſymptoten ſehr bald und ſtark, da der Theil von einer Dimenſion und das unveränderliche Glied im Allgemeinen gegen die beiden erſten höhern Theile bald ſehr klein werden.

11. Der höchſte Theil der Gleichung zwiſchen x und y habe zwey gleiche und einfache Factoren, oder er ſey $= a(y - mx)^2 (y - nx)$, ſo nähert ſich die Curve je weiter je mehr einem Syſtem einer geraden Linie und einer Parabel. Denn die allgemeine Gleichung für eine Parabel iſt (Krumme Linien der zweyten Claſſe, 32.)

$$zz - 2mzx + m^2xx - Az + Bx + C = 0.$$

Die Gleichung für eine gerade Linie iſt $z - nx + \alpha = 0$. Die Gleichung für das Syſtem beider Linien iſt das Product beider Gleichungen. Die Coefficienten der höchſten Glieder ſind darin dieſelben wie in der Gleichung für die Curve, wenn man den Coefficienten a zur Einheit nimmt, oder die durch a dividirten Coefficienten mit denſelben Symbolen wie vorher bezeichnet. Die Größen m und n ſind durch die Factoren des höchſten Theils in der Gleichung für die Curve gegeben. Die übrigen Größen, α, A, B, C, werden durch die Vergleichung der Coefficienten in den Gleichungen für y und z beſtimmt. Die Coefficienten von yy, xy und xx ſind, e, f, g; die von zz, xz, xx, ſind nach der Ordnung,

I. $\alpha - A$; II. $nA + B - 2m\alpha$; III. $m^2\alpha - nB$; welche nach der Folge den Coefficienten e, f, g gleich zu ſetzen ſind. Es folgt hieraus

$$\alpha = \frac{n^2e + nf + g}{(n - m)^2}.$$

Dieſes iſt derſelbe Werth, welcher nach dem Verfahren in (9.) erhalten wird, wenn man in dem dritten Werthe von $\frac{Q}{M}$ daſelbſt, $n = m$ ſetzt, und dann p mit n vertauſcht. Die Coefficienten A, B ergeben ſich nun aus zweyen der angenommenen Gleichungen leicht. Für den Coefficienten

C ſind zwey Beſtimmungen möglich. So fern die Parabel als Aſymptote betrachtet wird, iſt das unveränderliche Glied in ihrer Gleichung gleichgültig. Setzt man $C = \frac{B\alpha}{n}$, ſo hat das Glied, worin x iſt, in beiden Gleichungen denſelben Coefficienten; nimmt man $C = A\alpha$, ſo geſchieht dieſes bey dem Gliede mit z oder y.

12. Iſt $m = o$, ſo kann die Gleichung ſich auch der für ein Syſtem von drey geraden Linien nähern, deren zwey der Axe parallel ſind. Dieſe Gleichung iſt $(z - nx + \alpha)(z - b)(z - c) = o$, wovon die höchſten Glieder ſind $z^3 - nxz^2$.

13. Wenn die Gleichung $q^3 + bq^2 + cq + d = o$, zwey gleiche Wurzeln hat, ſo iſt eine gewiſſe Relation zwiſchen den Coefficienten, b, c, d, vorhanden, welche in dem Art. Gleichung, 190. angegeben iſt.

14. Hat die Gleichung, $aq^3 + bq^2 + cq + d = o$, zwey gleiche Wurzeln, m m, ſo iſt m auch eine Wurzel der Gleichung, $3aq^2 + 2bq + c = o$, (Gleichung, 182.). Nämlich, was von der durch a dividirten Gleichung gilt, gilt auch von jener ſelbſt. Es iſt alſo

$$\text{I. } am^3 + bm^2 + cm + d = o.$$
$$\text{II. } 3am^2 + 2bm + c = o.$$

In der letztern Gleichung gehört nur ein Werth von m der Curve zu.

15. Iſt der höchſte Theil der Gleichung ein Product von drey gleichen Factoren, ſo iſt die Aſymptote weder eine gerade Linie, noch ein Kegelſchnitt, ſondern eine einfachere Linie vom dritten Grade. In einem beſondern Falle iſt ſie eine Parabel.

In dieſem Falle iſt $b = -3am$; $c = 3am^2$; $d = -am^3$. Daher iſt

$$\text{I. } am^3 + bm^2 + cm + d = o.$$
$$\text{II. } 3am^2 + 2bm + c = o.$$
$$\text{III. } 2.3am + 2b = o.$$

Die Gleichung III. folgt zugleich daher, daß II. zwey gleiche Wurzeln hat.

Vereinfachung der Gleichungen für die zweyte Claſſe.

16. Nun iſt zu ſuchen, wie den Gleichungen für jede Gattung die einfachſte Form mit Erhaltung der Allgemeinheit gegeben werden möge. Zuerſt verlege man die Abſciſſenlinie auf die gerade Linie, deren Gleichung iſt $z = mx$, wenn m die Gränze des Quotienten $\frac{y}{x}$ iſt. Die Axe der Ordinaten, nebſt dem Anfangspuncte der Abſciſſen werde beybehalten. Es bleibt alſo alles in der Gleichung unbeſtimmt bis auf die Lage der Abſciſſenlinie, die durch den Factor $y - mx$ in dem höchſten Theile beſtimmt wird. Es ſey in Fig. 56. AX die Abſciſſenlinie, A der Anfangspunct, $AP = x$ auf der Axe der Abſciſſen AX, $PM = y$ die Ordinate an den Punct M der Curve. Auf dieſer nehme man $PN = mx$, ziehe die gerade ANT, und nehme dieſe zur Abſciſſenlinie. Die neuen Coordinaten ſeyn $AN = t$; $NM = u$. Auch ſey $AN = \mu x$. Nun iſt $x = \frac{1}{\mu} t$, und $y = u + \frac{m}{\mu} t$. Dieſe Werthe ſind in die Gleichung zwiſchen x und y zu ſetzen.

17. Es iſt $\frac{y}{x} = m + \frac{\mu u}{t}$. Wird hier unter m der einzige Gränzquotient, welcher dem $\frac{PN}{AP}$ gleich iſt, verſtanden, ſo verſchwindet gegen unendliche t (oder AN) die zugehörige u (oder NM), das iſt, es iſt ent-

weder u = o, oder eine endliche Größe, oder es iſt zwar u unendlich groß, aber gegen t unvergleichbar klein. In dem erſten Falle iſt AT die Aſymptote; in dem andern iſt AT derſelben parallel; in dem dritten Falle hat die Curve keine gerade Aſymptote für den Zweig, an welchem das Gränzverhältniß x:y = 1 : m iſt.

Übrigens kann das Gränzverhältniß von t:u noch zwey endliche Werthe oder einen ſolchen haben, wenn auſſer dem 1 : m für x:y dergleichen Statt finden.

18. Der höchſte Theil der Gleichung zwiſchen x und y habe nur einen möglichen Factor, y — mx. In dieſem Falle hat die Gleichung für die Gränze m des Quotienten q, nämlich $am^3 + bm^2 + cm + d = o$, nur eine mögliche Wurzel, und es iſt auch nur dieſe einzige Relation von m gegen die gegebene Größe vorhanden. Setzt man für x und y ihre Werthe durch t und u, ſo wird der Coefficient von $t^3 = \frac{1}{\mu^3}$ ($am^3 + bm^2 + cm + d$). Es fällt alſo das Glied, welches t^3 enthält, weg, und es iſt für die erſte Gattung die allgemeine Gleichung, wenn die Abſciſſen auf der in (16.) beſtimmten AT genommen werden,

$$Au^3 + Btu^2 + Ct^2u + Du^2 + Etu + Ft^2 + Gu + Ht + K = o.$$

Für ein unendliches t hat der Quotient $\frac{u}{t}$ nur einen Werth, weil die Gränze von $\frac{y}{x}$ nur einen einzigen Werth hat. Jener iſt = o, weil die Gränzgleichung für $\frac{u}{t}$ dieſen Quotienten ſelbſt zum Factor hat. Es iſt alſo u entweder = o, oder eine endliche Größe (4.). Jenes kann nicht Statt finden, weil das Glied Ft^2 ſich gegen keines aufheben könnte. Es iſt alſo u endlich, und der Werth

deſſelben $= -\frac{F}{C}$, aus den beiden Gliedern, $Ct^2u + Ft^2$, welche allein ſich im Unendlichen heben können. Eben dieſes folgt aus der Gränzgleichung $y = mx + \frac{Q}{M}$ in (8.), wenn die gehörigen Vertauſchungen gemacht werden, das iſt, wenn ſtatt x, y, m, g und a $(A^2 + B^2)$ geſetzt werden t, u, o, F, C.

19. Der höchſte Theil der Gleichung zwiſchen x und y habe drey mögliche ungleiche Factoren, ſo wird durch jeden derſelben eben eine ſolche Gleichung zwiſchen t und u wie in (18.) erhalten. Nur hat die Gränze des Quotienten $\frac{u}{t}$ neben dem Werthe o noch zwey endliche, welche von den beiden andern Factoren entſtehen. Der endliche Werth von u für unendliche t iſt ebenfalls $= -\frac{F}{C}$.

20. Der höchſte Theil der Gleichung zwiſchen x und y habe zwey gleiche Factoren, jeden $= y - mx$. Daher ſind hier (14) zwey Gleichungen für den Gränzquotienten m, der zweymahl vorhanden iſt, nämlich

$$\text{I. } am^3 + bm^2 + cm + d = o.$$
$$\text{II } 3am^2 + 2bm + c = o.$$

Man ſetze in die allgemeine Gleichung für x und y ihre Werthe, $\frac{1}{\mu}t$ und $y = u + \frac{m}{\mu}t$. Der Coefficient von t^2u iſt $= \frac{1}{\mu^2}(3am^2 + 2bm + c) = o$. Für die Linien der dritten Gattung iſt alſo die Gleichung,

$$Au^3 + Btu^2 + Cu^2 + Dtu + Et^2$$
$$+ Fu + Gt + H = o.$$

Die eine Gränze des Verhältniſſes $t : u$ iſt $= A : -B$; die andere iſt $t : u^2 = B : -E$, bey welcher u zwar unendlich groß, aber nicht mit t vergleichbar iſt.

21. Der höchſte Theil der Gleichung zwiſchen x und y habe drey gleiche Factoren, jeden $= y - mx$. Hier finden drey Gleichungen für m, oder dreyerley Relationen gegen die gegebenen Coefficienten Statt (15). Dadurch werden die Coefficienten von tu^2, t^2u und t^3 Null, und es iſt für die Linien der vierten Gattung die allgemeine Gleichung, in Beziehung auf die nach (16.) beſtimmte Abſciſſenlinie AT,

$$Au^3 + Bu^2 + Ctu + Dt^2 + Eu + Ft + G = o.$$

Die Aſymptote iſt eine Curve, deren Gleichung iſt $Au^3 + Dt^2 = o$. Iſt $D = o$, ſo iſt die Gränzgleichung $Au^3 + Ctu = o$, oder $Au^2 + Ct = o$. Iſt zugleich $C = o$, ſo bleibt $Au^3 + Ft = o$ zur Gleichung für die Aſymptote.

22. Man ziehe (Fig. 56.) mit der Abſciſſenlinie AT die parallele BV als neue Abſciſſenlinie, worauf der Anfang der Abſciſſen in C ſey. Die Ordinate MN an die erſtere werde (in dem Falle der Figur) bis an BV in Q verlängert. Durch eine ſchickliche Beſtimmung des Abſtandes NQ und der Lage des Punctes C, laſſen ſich die gefundenen Gleichungen noch einfacher machen.

23. Es ſey AB parallel mit der Axe der Ordinaten oder mit QM, und $AB = a$; $BC = b$, wo a und b andere Bedeutungen haben als anfangs. Ferner ſey $CQ = v$, und $QM = w$. Es iſt alſo $u = w - a$; $t = v + b$. Dieſe Werthe ſetze man in die Gleichung für die beiden erſten Gattungen (18, 19.), und beſtimme a nebſt b ſo, daß die Coefficienten von v^2 und vw Null ſeyn. Die Glieder, welche v^2 und vw geben, ſind

$$B(v + b)(w - a)^2 + C(v + b)^2(w - a) + E(v + b)(w - a) + F(v + b)^2.$$

Daraus ſind diejenigen, welche v^2 enthalten, $-Cav^2 + Fv^2$. Damit dieſe wegfallen, muß ſeyn $a = \frac{F}{C}$.
Ferner ſind diejenigen, welche das Product vw enthalten, $-2Bavw + 2Cbvw + Evw$. Damit dieſe ſich aufheben, muß ſeyn $b = \frac{2Ba - E}{2C}$, das iſt,
$b = \frac{BF}{CC} - \frac{E}{2C}$. Nun erhält die Gleichung zwiſchen v und w die Form

$$(w^2 + \alpha vw + \beta v^2)w + \gamma w^2 + \delta w + \varepsilon v + \zeta = 0,$$

wo der dreytheilige Factor des höchſten Gliedes in zwey einfache zerlegbar ſeyn mag oder nicht. Der Gränzwerth von u, es ſey der einzige in (18.), oder der endliche unter drey ſolchen (19.), iſt $= -\frac{F}{C}$. Da $a = \frac{F}{C}$, und $u = w - a$, ſo iſt der Gränzwerth von $w = 0$, das iſt, BV iſt die einzige oder eine von den drey geraden Aſymptoten.

24. In der Gleichung für die dritte Gattung (20.) ſetze man ebenfalls $u = w - a$, und $t = v + b$, ſo läßt ſich das Glied mit v^2 nicht wegſchaffen, aber wohl geht es mit den Gliedern w^2 und vw an. Zu dem Ende muß ſeyn,

$$3Aa - Bb - C = 0; \quad 2Ba - D = 0.$$

Nun erhält die Gleichung die Form

$$(w + \alpha v)w^2 + \beta v^2 + \gamma w + \delta v + \varepsilon = 0.$$

25. Durch eben dieſe Subſtitutionen erhält die Gleichung für die vierte Gattung eine dieſer beiden Formen,

$$w^3 + \alpha v^2 + \beta vw + \gamma w + \delta = 0,$$

oder

$$w^3 + \alpha v^2 + \beta vw + \gamma v + \delta = 0.$$

Iſt hier $\alpha = 0$, ſo findet nur die zweyte Form Statt, weil alsdann nicht zugleich w^2 und v herausgeſchafft werden können.

26. Die Gleichung für die beiden erſten Gattungen läßt ſich noch etwas einfacher ausdrucken, wenn man den Ordinatenwinkel ändert. Man nehme ſtatt der Ordinate QM die RM, wodurch ſtatt der Abſciſſe CQ die CR kommt. Es ſey $CR = x$; $RM = y$; und $w = my$; $v = x - ny$, wo die Bezeichnungen m, n, x, y andere Bedeutungen als oben haben. Nimmt man m ſo, daß $\alpha m = 2\beta n$ iſt, ſo iſt der Coefficient von $xy^2 = 0$, und der Factor von y in dem höchſten Theile der Gleichung wird zweytheilig, in der erſten Gattung von der Form $yy + \alpha^2 xx$, in der andern von der Form $yy - \alpha^2 xx$, von welchen die letztere in zwey einfache Factoren zerlegbar iſt, jene aber nicht.

27. Durch eben dieſe Subſtitutionen läßt ſich auch der binomiſche Factor $(w + \alpha v)$ in (24.) in einen monomiſchen verwandeln; allein es kommen dadurch wieder Glieder mit yy und xy in die Gleichung. Man muß deshalb eine neue Abſciſſenlinie der vorigen parallel legen, und auf dieſer den Anfang der Abſciſſen nebſt dem Ordinatenwinkel ſo nehmen, daß die Gleichung möglichſt einfach werde. Es ſey zu dem Ende (Fig. 57.) die VV die Abſciſſenlinie, auf welcher die Abſciſſe $CQ = v$ iſt, wozu die Ordinate $QM = w$ gehört. Die neue Abſciſſenlinie XX ſey jener parallel; auf dieſer der Anfang der Abſciſſen in D; $DR = x$; $RM = y$. Die Ordinate QM ſchneide XX in E, die mit QM parallele CF dieſelbe in F. Es ſey QE oder $CF = g$; $FD = h$; $EM = my$; $ER = ny$. Folglich iſt $CQ = v = h + x - ny$, und $QM = w = g + my$. Setzt man dieſe Werthe von v und w in die Gleichung (24.), ſo wird eine Gleichung von der Form,

$$xy^2 + ax^2 + by + cx + d = 0,$$

erhalten.

28. Durch daſſelbe Verfahren erhält die eine oder die andere Gleichung in (25.) die Form,

$$y^3 + ax^2 + by + c = 0.$$

Iſt α daſelbſt $= 0$, ſo verwandelt ſich die Gleichung in dieſe:

$$y^3 + bxy + cx + d = 0.$$

29. Es ſind alſo die einfachſten und doch allgemeinen Formen der Gleichungen für die vier Gattungen der Linien der dritten Ordnung folgende:

I. $y(y^2 + \alpha^2 x^2) + ay^2 + by + cx + d = 0.$

II. $y(y^2 - \alpha^2 x^2) + ay^2 + by + cx + d = 0.$

III. $xy^2 + ax^2 + by + cx + d = 0.$

IV. $y^3 + ax^2 + by + c = 0.$

und, wenn das Glied x^2 fehlt,

$$y^3 + axy + bx + c = 0.$$

Nur die Lage der Axen der Coordinaten iſt beſtimmt, welches etwas willkürliches iſt.

Geſtalten der krummen Linien von der zweyten Claſſe.

30. Wenn für eine ſtetige Folge von Abſciſſen x alle drey Werthe der zugehörigen Ordinaten y mögliche ſind, ſo entſtehen dadurch drey Fortſchreitungen der y, alſo drey Zweige einer krummen Linie von der zweyten Claſſe. Gehören zu einem Werthe von $x = h$ zwey gleiche y, ſo ſchneiden ſich zwey Zweige der Curve an dem Endpuncte der gemeinſchaftlichen Ordinaten, oder es ſchließen ſich daſelbſt zwey Bogen der Curve unter einer gemeinſchaftlichen berührenden an einander. In dem erſtern Falle bleiben zwey ſtetige Fortſchreitungen der y, davon die eine zunimmt, da die andere abnimmt; in dem andern Falle hört jede der beiden Fortſchreitungen auf, indem ſie ſich an einander ſchließen. Auf der einen oder auf der andern Seite

der gemeinſchaftlichen Ordinate ſind in dem letztern Falle keine Ordinaten vorhanden, ſolche nämlich, die zu einer der beiden ſtetigen Fortſchreitungen gehörten. Geſchieht das letztere für zwey verſchiedene Werthe von x, ſo entſteht daher ein ganz abgeſonderter Theil der Curve. Alles dieſes und die Beſchaffenheit der unendlich fortlaufenden Zweige werden die folgenden Unterſuchungen deutlich machen.

31. Da die Wurzel einer cubiſchen Gleichung durch die cardaniſche Formel nur auf eine bedingte Art, und nicht bequem dargeſtellt wird, ſo iſt aus der allgemeinen Gleichung zwiſchen x und y die dritte Potenz von x weggeſchafft worden. Dadurch ſind für jedes y nur zwey Werthe von x vorhanden, und es läßt ſich x allgemein und bequem genug durch y darſtellen. Wir wollen nun die durch x bezeichnete veränderliche Größe als Ordinate, und y als Abſciſſe betrachten, zu welcher der zugehörige Werth jener geſucht werde.

Erſte Gattung.

32. Für die erſte Gattung iſt die Gleichung, $y(y^2 + \alpha^2 x^2) + ay^2 + by + cx + d = o$, gefunden. Man dividire die Gleichung durch α^2, um x^2 von dem Coefficienten zu befreyen, ſetze $\frac{1}{\alpha\alpha} = pp$, und gebrauche für die übrigen Coefficienten die Bezeichnungen, $-a$, $-b$, $-2c$, $-d$, da die Zeichen etwas willkürliches ſind. So iſt

$$y(p^2y^2 + x^2) - ay^2 - by - 2cx - d = o.$$

Daraus iſt (Gleichung, 33. 34.)

$$x = \frac{c}{y} \pm \frac{\sqrt{(c^2 + dy + by^2 + ay^3 - p^2y^4)}}{y}.$$

Wenn der Werth der unter dem Wurzelzeichen befindlichen Größe negativ iſt, ſo ſind keine Werthe von x möglich.

33. Die Gleichung,

$$(Y) \quad p^2y^4 - ay^3 - by^2 - dy - c^2 = 0,$$

habe vier mögliche Wurzeln, α, β, γ, δ; die in der Quantität nach der hier angegebenen Ordnung folgen. Da das Product ihrer entgegengeſetzten iſt $= -\frac{cc}{pp}$, ſo iſt eine derſelben, das iſt δ, negativ, oder drey ſind ſo beſchaffen, nämlich β, γ, δ. Die negativen Wurzeln werden als kleiner in Beziehung auf jede poſitive betrachtet, und eine abſolut größere negative als relativ kleiner, ſ. Th. II. S. 113. Wenn y größer als α und kleiner als δ (abſolut größer als δ) iſt, ſo iſt der Werth der Gleichung poſitiv; ſo auch, wenn der Werth von y zwiſchen β und γ genommen wird. Aber der Werth der Gleichung iſt negativ, wenn y zwiſchen α und β, oder zwiſchen γ und δ fällt. Dieſes erhellt ſogleich daraus, daß $\frac{1}{pp}(p^2y^4 - ay^3 - by^2 - dy - c^2) = (y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma) \times (y-\delta)$ iſt (Gleichung 90. und 173.). Die Curve hat alſo nur mögliche Ordinaten x, wenn die Abſciſſe y zwiſchen α und β, oder zwiſchen γ und δ fällt, oder dieſen Wurzeln gleich iſt.

34. Sind die beiden größten Wurzeln, α, β, gleich groß, ſo iſt der Werth der Gleichung negativ für die Werthe der y von γ bis δ. Für dieſe allein hat x mögliche Werthe. Sind die Wurzeln β und γ gleich groß, ſo ſind die Werthe der Gleichung negativ für die y von α bis δ, und die Werthe von x möglich. Sind die Wurzeln γ und δ gleich groß, ſo ſind die Werthe der Gleichung negativ für die y von α bis β, und die Werthe von x möglich. Zwey Paare gleicher Wurzeln können nicht Statt haben, weil dabey alle Werthe der Gleichung poſitiv bleiben, da ſie doch wegen des Gliedes, $-c^2$, negative Werthe erhält. Aber drey gleiche, es ſeyn poſitive oder negative, können Statt finden. Für y, die zwiſchen dieſe

und die vierte fallen, oder ſie ſelbſt ſind, hat x mögliche Werthe. Sind nur zwey Wurzeln, α, β, möglich, ſo iſt nur ein Übergang vom Poſitiven zum Negativen für die Werthe der Gleichung, und der Werth von x iſt nur möglich für y von α bis β.

Wenn y einer der Wurzeln der Gleichung für dieſe Größe gleich iſt, ſo erhält x nur einen einzigen Werth, nämlich $\frac{c}{y}$.

35. Nimmt man $y = o$, ſo hat x zwey Werthe, $\frac{2c}{o}$ und $\frac{o}{o}$. Der erſtere iſt unendlich groß, oder die Abſciſſenlinie iſt die Aſymptote der Curve. Der andere iſt ſeiner Form nach unbeſtimmt. Um den beſtimmten Werth deſſelben zu erhalten, ziehe man aus der Function, $c^2 + dy + by^2 + ay^3 - p^2y^4$, die Quadratwurzel. Dieſe iſt $c + \frac{dy}{2c} + My^2$, wenn My^2 den ganzen übrigen Theil der Wurzel bedeutet. Bey dem Gebrauche des untern Vorzeichens der Wurzel in dem Werthe von x iſt $x = -\frac{d}{2c} - My$. Dieſes wird $-\frac{d}{2c}$ für $y = o$, und iſt der Werth von $\frac{o}{o}$. Daſſelbe findet man durch die Differentiation des Zählers und Nenners in dem Werthe von x, nach Function, 50.

36. Es ſeyn AX, AY (Fig. 58.) die Axen der Coordinaten x und y. Die Gleichung (Y) habe vier mögliche Wurzeln, in dem Falle der Figur drey poſitive und eine negative. Jene trage man nach der Richtung der poſitiven y auf AY in AB, AC, AD, dieſe nach der Richtung der negativen in AE. In den Puncten B, C, D, E ziehe man mit AX die parallelen Bb, Cc, Dd, Ee, und nehme darauf die zugehörigen x, nämlich Bb, Cc,

Dd, Ee. Über B und E hinaus ſind keine mit AX parallele Ordinaten möglich, auch nicht zwiſchen C und D. Daher iſt zwiſchen Bb und Cc eine von der übrigen Curve ganz abgeſonderte Ovale oder rundliche Figur enthalten. In b und c begegnen ſich die beiden Fortſchreitungen der x, da hier der Werth der Function Y Null iſt. In D und E ſind Dd und Ee die äußerſten Ordinaten der ins Unendliche ſich erſtreckenden Curve. Sie ſind zwey Fortſchreitungen gemeinſchaftlich. Die eine derſelben geht von Dd an durch AX, wo die Ordinate unendlich iſt, und von dem Unendlichen auf der entgegengeſetzten Seite (von —X' her) bis an Ee; die andere von Dd durch AF, wo die Ordinate $x = -\frac{d}{2c}$ iſt, bis an dieſelbe Ee. Für den Fall der Figur iſt d oder e negativ.

37. Wenn die beiden größten Wurzeln AB, AC der Gleichung Y ſich gleich ſind, ſo geht die Ovale bc in einen einzelnen, aber zur Curve gehörigen Punct, punctum conjugatum, über.

38. Wenn die beiden mittlern Wurzeln AC, AD (Fig. 59.) ſich gleich ſind, ſo ſchließt ſich die Ovale an die übrige Curve. Es entſteht ein Knoten. Die beiden Zweige bdXX'e und bce ſchneiden ſich in dem Doppelpuncte cd. Es wird hier ſowohl an dem einem Zweige als an dem andern $x = \frac{c}{y}$ oder $\frac{c}{AC}$.

39. Wenn die drey Wurzeln AB, AC, AD alle drey gleich ſind, ſo zieht der Knoten ſich in einen Punct, eine Spitze, zuſammen (Fig. 60.), wo ein Rückkehrpunct iſt. So lange noch ein Knoten, wie in Fig. 59. vorhanden iſt, machen die beiden Zweige eeb, Xdb in ihrem Durchſchnittspuncte einen Winkel, nach der Richtung ihrer berührenden, mit einander. Ver-

ſchwindet der Knoten, ſo können die beiden Zweige ſich nicht unter einem endlichen Winkel ſchneiden, weil dabey die Curve nicht eine ſtetige Linie bliebe, da die Lage der Theile an dem Durchſchnittspuncte ſich plötzlich änderte. Die beiden Zweige müſſen vielmehr hier eine gemeinſchaftliche berührende haben. Auch müſſen ſie einer auf dieſer, der andere auf jener Seite der berührenden liegen. Denn bey einem Knoten (Fig. 59.) iſt der eine Bogen gegen die Axe AY hohl, der andere erhaben. Dieſe Lage bleibt, ſo klein der Knoten auch werden mag, alſo auch indem er in eine Spitze übergeht. In dem Artikel, Rückkehrpunct, wird dieſes genauer gezeigt werden.

Die Spitze iſt hier ein dreyfacher Punct, indem hier die drey Puncte, b, c, d, in (Fig. 58.) ſich in einen einzigen vereinigt haben.

40. Die Gleichung Y habe nur zwey mögliche Wurzeln, α, β, deren eine, wegen des Gliedes $-c^2$, negativ iſt. (Gleichung, 174.) Daher kann weder eine Ovale, noch conjugirter Punct, noch Knoten, noch Spitze Statt haben, ſondern die krumme Linie beſteht bloß aus einem einzigen zuſammenhängenden Zweige in Beziehung auf die Axe AX, oder aus dreyen, aber zuſammenhängenden, wenn der Bogen eFd eine größte und kleinſte Ordinate x zu zwey Abſciſſen y hat.

41. Wenn $c = 0$, oder wenn das Glied mit x fehlt, ſo iſt die Axe der y ein Durchmeſſer, der alle mit der Axe der x parallelen halbirt, indem alsdann für jedes y zwey gleiche und entgegengeſetzte x vorhanden ſind.

42. Die Ciſſoide der Alten iſt eine Linie der dritten Ordnung, oder eine Curve der zweyten Claſſe, die zu der erſten Gattung gehört. Die für ſie in dem Art. Ciſſoide (Th. I. S. 434.) gefundene Gleichung iſt $x^3 = (a-x)y^2$, wo die Ordinaten y mit der Aſymptote parallel laufen, alſo das ſind, was hier die Abſciſſen x. Der Anfang der Abſciſſen iſt dort in der Spitze genommen.

P

Um ihn auf die Aſymptote zu verlegen, ſetze man $x = a - z$, ſo verwandelt ſich jene Gleichung in dieſe, $z(z^2 + y^2) - 3az^2 + 3a^2 z - a^3 = o$, welches eine Gleichung wie I. in (29.) iſt, nur daß z und y mit y und x zu vertauſchen ſind. Das dortige c iſt hier $= o$. Da $y^2 = \frac{(a-z)^3}{z}$ iſt, ſo hat y drey gleiche Werthe o für $z = a$, wie in (39.), und es iſt für dieſen Werth von z eine Spitze an der Curve.

Zweyte Gattung.

43. Die Gleichung für dieſe iſt

$$y(y^2 - \alpha^2 x^2) + ay^2 + by + cx + d = o,$$

oder $y(p^2 y^2 - x^2) + ay^2 + by + 2cx + d = o$, eine Vertauſchung, wie in (32.) Daraus iſt

$$x = \frac{c}{y} \pm \frac{\sqrt{(c^2 + dy + by^2 + ay^3 + p^2 y^4)}}{y}.$$

44. Die Gleichung, (Y),

$$p^2 y^4 + ay^3 + by^2 + dy + c^2 = o,$$

habe vier mögliche Wurzeln, α, β, γ, δ, die in der Quantität nach der hier angegebenen Ordnung auf einander folgen. Wenn y zwiſchen α und β, oder γ und δ fällt, ſo iſt der Werth der Gleichung negativ, und x iſt unmöglich. Für alle Werthe der y, von α bis ins Unendliche, und von δ bis zum negativen Unendlichen, wie auch für die Werthe von β bis γ, gehören zu jedem y zwey mögliche x. Hat die Gleichung (Y) zwey gleiche Wurzeln, ſo giebt es nur eine einzige Reihe von Werthen der y, für welche die Werthe von (Y) negativ ſind, nämlich zwiſchen γ und δ, wenn $\alpha = \beta$ iſt; zwiſchen α und δ, wenn $\beta = \gamma$ iſt; zwiſchen α und β, wenn $\gamma = \delta$ iſt. Sind drey Wurzeln gleich, ſo iſt der Werth der Gleichung negativ, wenn y zwiſchen α und δ genommen wird. Sind zwey Paare gleicher Wurzeln, oder alle vier Wurzeln gleich, ſo iſt die krumme Linie ein Kegelſchnitt.

Die Werthe von x ſind immer möglich, wenn der Werth der Gleichung (Y) poſitiv oder Null iſt.

45. Die Curven, deren Gleichung iſt

$$y(p^2y^2 - x^2) + ay^2 + by + 2cx + d = o,$$

haben drey geradlinichte Aſymptoten, weil der höchſte Theil der Gleichung drey mögliche Factoren, y, $py - x$, $py + x$ enthält, daher der Quotient $\frac{y}{x}$ im Unendlichen drey Werthe hat. Die Gränzgleichungen für y und x beſtimmen die drey Aſymptoten. Die Formeln in (9.) geben dieſe Gleichungen. Man bemerke nur, daß die dortigen

$$a, \quad m, \quad n, \qquad p, \quad e, \quad f, \quad g$$

hier $p^2, \; o, \; + \frac{1}{p}, \; - \frac{1}{p}, \; + a, \; o, \; a$

ſind. Es ſind alſo die drey Werthe von $\frac{Q}{M}$

$$\text{I. } o. \qquad \text{II. } + \frac{a}{2p^2}; \qquad \text{III. } + \frac{a}{2p^2};$$

und die drey Gränzgleichungen ſind

$$\text{I. } z = o. \qquad \text{II. } z - \frac{x}{p} + \frac{a}{2p^2} = o;$$

$$\text{III. } z + \frac{x}{p} + \frac{a}{2p^2} = o.$$

Unabhängig von dieſer Methode findet man die Gränzgleichungen folgendermaßen.

Man multiplicire die Gleichungen,

$$z = o; \quad pz - x + \alpha = o; \quad pz + x + \beta = o;$$

in einander, ſo entſteht das Product,

$$p^2z^3 - x^2z + (\alpha + \beta)pz^2 + (\alpha - \beta)xz + \alpha\beta z = o.$$

Die erſte Gleichung iſt für eine gerade Linie, die in die Abſciſſenlinie ſelbſt fällt, die beiden andern ſind für zwey gerade, deren Coordinaten x und z ſind. Die daraus gebildete Gleichung iſt für das Syſtem aller drey. Soll dieſes Syſtem ſich der Curve immer mehr nähern, je gröſſer die Abſciſſe x genommen wird, und für ein unendliches x mit ihr zuſammentreffen, ſo müſſen nicht allein die Glieder, welche drey Dimenſionen der veränderlichen Gröſſen enthalten, ſondern auch die mit zwey Dimenſionen in den Gleichungen für das Syſtem und für die Curve übereinſtimmen; auch muß zugleich der Ordinatenwinkel derſelbe ſeyn. Es iſt alſo $(\alpha + \beta)\,p = a$, und $\alpha - \beta = o$, oder $\alpha = \beta$. Daher $\alpha = \frac{a}{2p}$, und die Gleichungen für die beiden Aſymptoten außer der Abſciſſenlinie ſind,

$$pz - x + \frac{a}{2p} = o;\quad pz + x + \frac{a}{2p} = o.$$

Die Ordinaten z nähern ſich denen an der Curve mehr und mehr.

46. Man nehme auf der Abſciſſenlinie AX (Fig. 61.) von dem Anfange der Abſciſſen A an, $AB = \frac{a}{2p}$; $AC = -\frac{a}{2p}$; und auf der Axe der Ordinaten AY die $AD = \frac{-a}{2pp}$, wenn a negativ iſt, ſonſt nach entgegengeſetzter Richtung; ziehe BD und CD, ſo ſind deren Verlängerungen MM′, NN′ die beiden andern Aſymptoten der Curve, außer der XX′. An dieſen dreyen können die Zweige der Curve auf mancherley Arten hinlaufen. Sie können innerhalb des Winkels je zweyer liegen, ohne ſie zu ſchneiden, auf gleiche Art wie die Hyperbeln am Kegel, oder ſie können den Winkel ganz in ſich einſchließen, oder ſie können in einer endlichen von dem Scheitel

des Winkels den einen Schenkel, oder auch beide ſchneiden. Der Aſymptotenwinkel, in oder an, oder um welchem ſie liegen, kann der innere Winkel des Dreyecks ſeyn, welches die Aſymptoten bilden, oder deſſen Scheitelwinkel, oder deſſen äußerer Nebenwinkel. Es können auch zwey Schenkel an derſelben Aſymptote nach entgegengeſetzten Enden hinlaufen, indem die andern beiden Paare in den Scheitelwinkeln der beiden andern Aſymptoten liegen. Die beiden Schenkel, die zu derſelben Aſymptote gehören, können ſich ihr an entgegengeſetzten Seiten nähern, oder an derſelben Seite. Die drey Paare der Schenkel der Curve können ganz von einander geſondert ſeyn, oder es kann ſich ein Schenkel des einen Paares mit dem eines der beiden andern ſchneiden. Die drey Aſymptoten können ſich in einem gemeinſchaftlichen Puncte begegnen. Newton hat aus allen dieſen Abänderungen zwey und dreyßig Arten (Species) gemacht, wozu Stirling in ſeinem Commentar noch vier gefügt hat.

47. Nachdem die drey Aſymptoten gezogen ſind, nehme man auf der nach beiden Seiten hin verlängerten **AD** die Wurzeln der Gleichung Y ihren Vorzeichen gemäß. Dieſe Wurzeln ſeyn alle poſitiv und ungleich, nämlich **AE, AF, AG, AH** (Fig. 61.). Durch E, F, G, H ziehe man mit **AX** die parallelen Ee, Ff, Gg, Hh. Auf dieſen nehme man die zu jenen Werthen von y gehörigen Werthe von x aus (43.). Dieſe ſind die einfachen, $\frac{c}{y}$, weil die Größe unter dem Wurzelzeichen Null iſt, da für y eine Wurzel der Gleichung $Y = 0$ geſetzt worden. Die Ee, Ff, Gg, Hh berühren alſo die Curve. Zwiſchen den Ordinaten Ee, Ff, ſo wie zwiſchen Gg und Hh giebt es keine mögliche. Jenſeits Hh, ſo wie dieſſeits Ee ſind für jedes y zwey x vorhanden. In dieſem Falle iſt über dem Theile FG der Abſciſſe y eine Ovale. Übrigens hat die Curve ſechs hyperbelartige Zweige. Der eine PeX liegt, wegen der poſitiven Wurzel **AE** über **AX** nach der Gegend der poſitiven y bis an

die äuſſerſte Ordinate E e. Der andere mit jenem zuſammenhängende Zweig PM′ erſtreckt ſich längs der Aſymptote BM′, die er in der Figur ſchneidet, welches in andern Fällen nicht geſchehen mag. Der zwente hyperbelartige Theil X′QN′ geht nicht über die Abſciſſenlinie nach der Gegend der poſitiven y hinaus, weil für jedes y nur zwey x möglich ſind, und nach der Gegend der poſitiven x ſchon von A bis E zwey Ordinaten x ſich finden. Die Aſymptote CN′ mag von der Curve geſchnitten werden oder nicht. Der dritte hyperbelartige Theil MRN liegt neben den beiden Aſymptoten DM, DN, auf die gezeichnete Art, bey der angenommenen Lage der erſten beiden Paare Zweige. Denn eine Parallele mit der Aſymptote MM′ ſchneidet die Curve nur in zwey Puncten.

48. Wenn die beiden mittlern Wurzeln AF, AG der Gleichung Y = o gleich ſind, ſo fällt die Ovale in einen conjugirten Punct zuſammen. Sind die Wurzeln AE, AF gleich, ſo hängt ſich die Ovale an den hyperbelartigen Theil, der an den Aſymptoren BX, BM′ liegt. Sind die drey Wurzeln AE, AF, AG gleich, ſo entſteht eine Spitze an jenem Theile. Sind zwey Wurzeln unmöglich, und die beyden möglichen, welche wegen des Gliedes + cc in der Gleichung Y = o einerley Vorzeichen haben, ungleich, ſo ſind die drey hyperboliſchen Theile ganz frey, ohne Ovale, Knoten, zugeordneten Punct oder Spitze. Sind zwey Wurzeln, wie AE, AH, möglich, und die beiden andern, auch möglichen, ſich gleich, und jenen entgegengeſetzt, ſo ſchneiden ſich zwey hyperboliſche Schenkel einander in dem zu den beiden gleichen y gehörigen Puncte. Die eine hyperboliſche Linie liegt in dem Winkel BCN′, die andere in dem Winkel CBM′. Sind zwey Wurzeln unmöglich, und zwey mögliche ſich gleich, ſo iſt auch ein ſolcher Durchſchnitt vorhanden.

49. Sind endlich alle vier Wurzeln der Gleichung Y = o unmöglich, oder ſind unter vier möglichen zwey

und zwey ſich entgegengeſetzt, ſo ſind nur zwey hyperbelförmige Theile da, und der übrige Theil der Curve ſchlingt ſich an der einen Aſymptote auf entgegengeſetzten Seiten herum, auf die Art, wie in Fig. 58. der neben der Abſciſſenlinie AX hinlaufende Theil der Curve.

50. In der Gleichung für dieſe zweyte Gattung (43.) ſey $c = o$, ſo ſind für jedes y zwey gleiche x, und die Axe der y iſt ein Durchmeſſer der Curve in eigentlichem Verſtande. Übrigens ſind hier eben ſolche Abänderungen der Figur möglich als vorher angezeigt worden ſind. In dem Falle, daß zwey Schenkel deſſelben hyperboliſchen Theils eine gemeinſchaftliche Aſymptote haben, liegen dieſe auf derſelben Seite, nach Art des einen Theils einer Conchoide, daher Newton dieſe partielle Figur eine Hyperbola conchoidalis nennt, ſo wie diejenige, welche ſich auf beiden Seiten herum wendet, eine Hyperbola anguinea.

51. Wenn in jeder der drey Gleichungen, worin eine der drey Aſymptoten als Axe der Abſciſſen x genommen iſt, das Glied cx fehlt, ſo iſt jede der drey Axen der y ein Durchmeſſer.

52. Da eine Aſymptote eine berührende in einem unendlich entfernten Puncte iſt, und in andern berührenden der Berührungspunct zwey Bogen gemein iſt, ſo kann man die an den entgegengeſetzten Enden der Aſymptoten befindlichen, unendlich entfernten Puncte als einen einzigen betrachten, und ſolchergeſtalt alle ſechs Schenkel der Curven der zweyten Gattung als zuſammenhangend anſehen. Vergl. Hyperbel, 42.

Dritte Gattung.

53. Die Gleichung für die dritte Gattung iſt

$$xy^2 - ax^2 - 2by - cx - d = o,$$

wenn in (29, III.) die Vorzeichen geändert und 2b ſtatt

b geſchrieben wird. Hier ſind für jedes x zwey y mög-lich oder gar keines; ſo wie auch jedem y zwey x oder gar keines zugehören. Es iſt

$$y = \frac{b \pm \sqrt{(b^2 + dx + cx^2 + ax^3)}}{x}.$$

Für $x = 0$ iſt ein Werth von y unendlich groß, ein Werth $= -\frac{d}{2b}$ wie in (35.) Die Axe der y iſt die Aſymptote der Curve, an welcher ſich auf entgegengeſetzten Seiten zwey hyperboliſche Schenkel erſtrecken. Für unendliche x wird $y = \pm \sqrt{ax}$, wo bey einem negativen a die x auch negativ zu nehmen ſind. Die Curve hat alſo nach der einen Gegend auf der Axe der x zwey paraboliſche Zweige. Übrigens hängt ihre Figur von der Beſchaffenheit der Größe unter dem Wurzelzeichen ab, wie ſie ſich in Factoren auflöſen läßt. Es ſey

$$ax^3 + cx^2 + dx + b^2 = X,$$

ſo hat die Gleichung, $X = 0$, entweder drey mögliche Wurzeln oder nur eine. In jenem Falle können zwey einander gleich ſeyn; auch kommt es noch auf die Beſchaffenheit der Wurzeln in Rückſicht ihrer Vorzeichen an.

54. Es ſey in Fig. 62. AX die Axe der Abſciſſen, AY der Ordinaten. An der letztern laufen zwey hyperboliſche Zweige PM, QN′ hin, und nach der Gegend der Abſciſſen auf der einen oder der andern Seite die paraboliſchen Zweige PR, QS. Der eine hyperboliſche Zweig ſchneidet die Axe AY′ in dem Abſtande $AB = -\frac{d}{2b}$.

Die Gleichung $X = 0$ habe drey ungleiche gleichnamige Wurzeln. Man trage dieſe, wenn ſie negativ ſind, auf AX′ nach AC, AD, AE, und errichte hier unter dem beſtimmten Ordinatenwinkel die zugehörigen y als Ordinaten, nämlich Cc, Dd, Ee. Die Cc iſt eine Gränzordinate an dem Zweige BN′; die andern beiden ſchließen eine Ovale ein. Die paraboliſchen Schenkel liegen nach

der entgegengeſetzten Seite, als jener, wohin die drey Wurzeln fallen. Wie in den beyden erſten Gattungen kann ſich hier die Ovale in einen abgeſonderten Punct verwandeln, oder ſich an den hyperboliſchen Zweig durch einen Knoten ſchließen, oder an demſelben in eine Spitze übergehen. Auch kann die Curve ganz frey von allen dieſen Beyfügungen ſeyn. Dieſes iſt der Fall, wenn die Gleichung, $X = 0$, nur eine mögliche Wurzel hat.

55. Wenn zwey Wurzeln dieſer Gleichung ſich gleich, und der dritten entgegengeſetzt ſind, ſo ſchneiden ſich die beiden paraboliſchen Zweige kreuzweiſe. Der Durchſchnitt gehört zu derjenigen Abſciſſe x, welche zweymal die Wurzel der Gleichung, $X = 0$, iſt. Sind nur zwey Wurzeln gleichnamig, da die dritte entgegengeſetzt iſt, ſo ſchließen ſich die beiden hyperboliſchen Zweige an einander, und die paraboliſchen auch, ſo daß ſie durch einen Raum abgeſondert ſind, in welchem keine Ordinaten Statt haben.

56. Wenn in der Gleichung (53.) das Glied $2by$ fehlt, ſo ſind für jedes x zwey gleiche entgegengeſetzte y vorhanden. Die Gleichung iſt

$$y = \pm \frac{\sqrt{x(ax^2 + cx + d)}}{x}.$$

Hat die Gleichung, $ax^2 + cx + d = 0$, keine mögliche Wurzeln, ſo ſchließen ſich die hyperboliſchen Zweige jeder an den benachbarten paraboliſchen, ſo daß der Anfang der Curve den Umriß einer zierlichen Vaſe mit ihrem Fuße bildet. Sind zwey Wurzeln möglich und gleich, ſo verbindet ſich jeder hyperboliſche Zweig mit dem entgegengeſetzten paraboliſchen, ſo daß hier ein Durchſchnitt entſteht. Sind die Wurzeln ungleich, ſo verbindet ſich jede Art von Zweigen unter ſich allein, und ſind ganz getrennt.

57. Es fehle in (53.) das Glied ax^2, daher die Gleichung iſt

$$xy^2 - 2by - cx - d = 0,$$

und $y = \frac{b \pm \sqrt{(cx^2 + dx + b^2)}}{x}$.

Iſt hier c negativ, ſo iſt die Wurzelgröße bloß möglich für die Werthe von —x, welche zwiſchen die beiden Wurzeln der Gleichung, $cx^2 + dx + b^2 = o$, fallen, oder ſie ſelbſt ſind. Die Curve beſteht bloß aus zwey hyperboliſchen zuſammenhangenden Zweigen, die an der einzigen Aſymptote, welche die Axe der y iſt, hinlaufen.

58. Iſt c poſitiv, ſo hat die Curve ſechs hyperboliſche Zweige an drey Aſymptoten, von welchen zwey der Axe der Abſciſſen x parallel ſind, die dritte die Axe der Ordinaten y iſt. Denn für $x = o$ iſt ein Werth von y unendlich groß. Der andere iſt $= -\frac{d}{2b}$. Setzt man x unendlich, ſo iſt $y = \pm \sqrt{c}$. Daher ſind auf jeder Seite der Abſciſſenlinie zwey Aſymptoten, in dem Abſtande $\pm \sqrt{c}$ ihr parallel. Für jedes y iſt nur ein Werth von x. Hat die Gleichung, $cx^2 + dx + b^2 = o$, zwey mögliche Wurzeln, ſo iſt die Wurzelgröße unmöglich, wenn x zwiſchen dieſen Wurzeln liegt. Die Curve hat alsdann eine Geſtalt, wie in Fig. 63. Es ſind AX und AY die Axen der Coordinaten; BM und CN ſind der erſtern parallel; AD, AE ſind die beiden Wurzeln jener Gleichung; Dd, Ee die zugehörigen Werthe von y. Zwey hyperboliſche Zweige erſtrecken ſich von der Ordinate Ee an nach M und N hin; zwey andere an den Aſymptoten BM′ und BY; noch zwey an CN′ und CY′.

Sind aber die Wurzeln jener Gleichung ſich gleich oder unmöglich, ſo erſtrecken ſich zwey zuſammenhangende Zweige in dem ganzen Raume zwiſchen den beiden Aſymptoten, und die beiden andern liegen in dem Winkel MBY, N′CY′.

59. Fehlt mit ax^2 auch $2by$, ſo iſt

$y = \pm \frac{\sqrt{(cx^2 + dx)}}{x}$, und es liegt zwiſchen den bei-

den Aſymptoten MM′ und NN′ wieder ein gedoppelter Zweig, wie in Fig. 63, nur daß dieſer von der Abſciſſenlinie in zwey gleiche und ähnliche Theile getheilt wird. Die andern beiden Paare von Zweigen liegen in den Winkeln M′BY und N′CY′.

60. In der Gleichung (53.) ſeyn a und c jedes $= 0$, ſo daß $xy^2 - 2by - d = 0$ iſt. Es iſt nun

$$y = \frac{b \pm \sqrt{(dx + b^2)}}{x}.$$

Hier iſt ſtatt der zwey mit der Abſciſſenlinie parallelen Aſymptoten nur jene allein eine ſolche, daher der zwiſchen jenen in Fig. 63. enthaltene Doppelzweig wegfällt.

Vierte Gattung.

61. Die allgemeine Gleichung für die vierte Gattung (29.) iſt

$$y^3 - ax^2 + by + c = 0,$$

wo die Bezeichnung $+ a$ mit $- a$ vertauſcht iſt. Es iſt alſo

$$x = \pm \sqrt{\frac{y^3 + by + c}{a}}.$$

Die Gleichung, $y^3 + by + c = 0$, habe drey mögliche ungleiche Wurzeln. Man trage auf der Axe der Ordinaten AY (Fig. 64.) von A aus die poſitiven nach der Richtung AY, die negativen nach AY′, hier eine poſitive AB, zwey negative AC, AD, und ziehe mit der Axe der Abſciſſen AX durch B, C, D die parallelen bb, cc, dd, ſo iſt zwiſchen den beiden bb und cc keine Abſciſſe (hier Ordinate) x enthalten, weil der Werth der Größe unter dem Wurzelzeichen negativ iſt. Zwiſchen cc und dd liegt eine Ovale, jenſeits dd ſind keine Ordinaten. Auf der andern Seite von bb hat die Curve eine glockenförmige Geſtalt EBE, da die Ordinaten x ſtärker zunehmen als

die Abſciſſen y. Denn für große x iſt nahe $ax^2 = y^5$, alſo iſt $x^2 : y^4 = y : a$.

62. Die Ovale kann ſich auch hier in einen Punct, in einen Knoten, in eine Spitze verwandeln. Sind zwey Wurzeln der obigen Gleichung unmöglich, ſo iſt die Figur EBE ganz frey von allen Beyfügungen.

63. In dem Falle, da die Gleichung $y^3 + by + c = o$, drey gleiche Wurzeln hat, iſt bey B eine Spitze vorhanden. Es iſt alsdann $ax^2 = (y - p)^3$, wo p die Wurzel jener Gleichung iſt. Hier iſt AB = p. Setzt man $y - p = z$, ſo iſt $ax^2 = z^3$. Dieſes iſt die Gleichung für die Neiliſche Parabel.

64. Wenn das Glied ax^2 fehlt, ſo iſt für dieſen Fall die Gleichung der vierten Claſſe (29.),

$$y^3 + axy + bx + c = o.$$

Es iſt alſo $x = -\frac{y^3 + c}{ay + b}$.

Hier wird x unendlich, wenn $y = -\frac{b}{a}$. Die Curve hat in der Entfernung $-\frac{b}{a}$ von der Abſciſſenlinie AX (Fig. 65.) eine dieſer parallele Aſymptote MN, an deren entgegengeſetzten Seiten ſich die zwey Schenkel der Curve, CD und EF erſtrecken. Für unendliche x hat aber die Curve noch die unendlich großen Ordinaten, $\pm\sqrt{-ax}$, ſo daß ſich die beiden Schenkel CG, EH, einem paraboliſchen immer mehr nähern. Beide ſchließen ſich an jene hyperboliſchen, jeder an einen derſelben. Die Figur der ganzen Curve nähert ſich einem Dreyzack, und heißt daher auch Tridens. Iſt a poſitiv, ſo liegen die paraboliſchen Schenkel nach der Gegend der negativen Abſciſſen. Descartes hat ſich dieſer krummen Linie be-

dient, um durch ſie algebraiſche Gleichungen vom ſechsten Grade aufzulöſen. (Geometria, pag. 98.).

65. Eine Art in der vierten Gattung, von welcher ein Bogen für einen Bogen anderer verwickelten Linien gebraucht wird, iſt die, deren Gleichung iſt

$$ay^3 + by^2 + cy + d = x.$$

Sie gehört zu der Familie der paraboliſchen Linien, in welcher die Abſciſſe x aus Potenzen von y allein zuſammengeſetzt wird. Sie dient zur geometriſchen Darſtellung der Wurzeln einer cubiſchen Gleichung, wenn y als Abſciſſe, und x als Ordinate betrachtet wird, ſ. Anwendung der Geometrie auf die Algebra. IV.

Setzt man $y = z - \frac{1}{3}b$, ſo erhält die Gleichung die Form,

$$z^3 + Az + B = x.$$

Wenn A poſitiv iſt, ſo hat für jedes x die Ordinate z nur einen möglichen Werth (Gleichung, 69.). Iſt A negativ, oder iſt die Gleichung, $z^3 - Az + B = x$, ſo ſind drey Werthe für z nur möglich, wenn $|4A^3| > 27(x-B)^2$ iſt (daſ. 70). Die krumme Linie hat in dieſem Falle eine Geſtalt, wie in Fig. 66. gezeichnet iſt.

Eintheilung der Gattungen in Arten.

66. Newton brachte die Linien der dritten Ordnung auch auf vier Gattungen, oder, wie er es nennt, Casus, für welche er folgende vier allgemeine Gleichungen fand.

I. $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

II. $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

III. $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

IV. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

Dieſe ſind von den in (29.) aufgeführten ganz verſchieden. Die Arten (Species) beſtimmt Newton nach der

Geſtalt der Curven im endlichen Raume, zugleich mit Rückſicht auf die Aſymptoten, und die Beſchaffenheit der Zweige im Unendlichen, auch mit Unterſcheidung der Fälle, wo ein Durchmeſſer Statt hat. Manche Arten möchte man als Varietäten anſehen können. Er zählt 72 Arten. Stirling hat in der erſten Gattung noch vier hinzugeſetzt, und Gua fand noch zwey. Cramer will zu den vier Arten Newtons von 53 — 56 noch zwey bygefügt haben. Analyse des lignes courbes p 364. Stirlings Commentar, welcher zu Oxford 1717 herauskam, iſt zu Paris bey Düprat 1797 (198. S. 8. 9. Kupf.) wieder abgedruckt, zugleich mit Newtons Abhandlung ſelbſt, welche bey jener Ausgabe nicht vorhanden iſt.

67. Euler theilt die Linien der dritten Ordnung bloß nach der Beſchaffenheit ihrer Zweige im Unendlichen ein. Dieſe Eintheilung gewährt nicht allein eine viel bequemere Überſicht, ſondern iſt auch ganz beſtimmt, ſo daß weder mehrere noch wenigere Arten Statt haben können. Euler findet 16 Species. Was in dieſem Artikel Gattungen genannt ſind, unterſcheidet er als Casus. Am Ende erinnert er, daß es beſſer ſeyn möchte die Benennung, Genera, zu gebrauchen, und die Abänderungen durch Species zu benamen.

Eulers Methode, die Beſchaffenheit der Zweige im Unendlichen zu erforſchen, iſt etwas weitläuftig, weil er ſie aus den noch ſehr zuſammengeſetzten Gleichungen (18 bis 21.) herleitet, wobey er zu dem Coordinatenwinkel einen rechten nimmt. Auf dieſen Winkel kommt es hieben aber nicht an, wie es Euler am Ende ſelbſt bemerkt. Cap. X. §. 259. Die einfachen Gleichungen in (29.) ſind hier völlig hinreichend.

68. Zum Gebrauch bey dem Folgenden iſt zu bemerken, daß eine Curve, deren Gleichung iſt $y = Ax + B + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2} + \frac{E}{x^3} + \text{etc.}$ eine hy-

perboliſche zu nennen iſt, wie man eine Curve, deren Gleichung iſt $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ etc. eine paraboliſche nennt. Dieſes iſt noch ein Zuſatz zu dem Artikel, Hyperbel höherer Art.

69. Für die erſte Gattung der Linien der dritten Ordnung iſt (29.) die Gleichung,

$$y(y^2 + \alpha^2 x^2) + ay^2 + by + cx + d = 0.$$

Man gebe ihr die Geſtalt,

$$y + \frac{ayy}{yy + \alpha\alpha xx} + \frac{by + cx}{yy + \alpha\alpha xx}$$
$$+ \frac{d}{yy + \alpha\alpha xx} = 0.$$

Die Gränze des Verhältniſſes $x : y$ iſt $= 1 : 0$, oder die Abſciſſenlinie iſt Aſymptote der Curve.

Man nehme eine krumme Linie, deren Gleichung iſt,

$$z + * + \frac{c}{\alpha\alpha x} + \frac{d}{\alpha\alpha xx} = 0.$$

Sie habe mit jener gemeinſchaftliche Abſciſſen, und denſelben Ordinatenwinkel. Da das Gränzverhältniß $x : y = 1 : 0$ iſt, ſo kommt die Gleichung für y im Unendlichen mit der hyperboliſchen für z überein. Die letztere giebt deutlich zu erkennen, in welchem Maaße die Annäherung von y zu dem Gränzwerthe 0 geſchehe. Iſt c nicht Null, ſo iſt die Annäherung proportional dem Quotienten $\frac{1}{x}$; iſt $c = 0$, ſo iſt ſie proportional dem $\frac{1}{xx}$. In jenem Falle wird das letzte Glied $\frac{d}{\alpha\alpha xx}$ nicht beachtet. Euler druckt dieſes ſo aus: die Curve hat eine geradlinichte Aſymptote von der Form (species) $y = \frac{A}{x}$; oder eine von der Form $y = \frac{A}{xx}$.

70. Die erſte Gattung hat demnach zwey Arten nach Beſchaffenheit der hyperboliſchen Aſymptote. In der erſten geſchieht die Annäherung von entgegengeſetzten Seiten der geraden Aſymptote, wegen der entgegengeſetzten Beſchaffenheit der Abſciſſen im Unendlichen. (Euleri Species. I. et II. Newtoni 33—45.)

71. Für die zweyte Gattung iſt die Gleichung, (29.)

$$y(yy - \alpha\alpha xx) + ayy + by + cx + d = 0.$$

Man gebe ihr eine dieſer Geſtalten:

$$\text{I. } y + \frac{ayy}{yy - \alpha\alpha xx} + \frac{by + cx}{yy - \alpha\alpha xx} + \frac{d}{yy - \alpha\alpha xx} = 0.$$

$$\text{II. } y + \alpha x + \frac{ayy}{y(y - \alpha x)} + \frac{by + cx}{y(y - \alpha x)} + \frac{d}{y(y - \alpha x)} = 0.$$

$$\text{III. } y - \alpha x + \frac{ayy}{y(y + \alpha x)} + \frac{by + cx}{y(y + \alpha x)} + \frac{d}{y(y + \alpha x)} = 0.$$

Ferner nehme man folgende Gleichungen für hyperboliſche Linien an:

$$\text{I. } z + \ * \ + \frac{c}{-\alpha\alpha x} + \frac{d}{-\alpha\alpha xx} = 0.$$

$$\text{II. } z + \alpha x + \tfrac{1}{2}a + \frac{-b\alpha + c}{2\alpha\alpha x} + \frac{d}{2\alpha\alpha xx} = 0.$$

$$\text{III. } z - \alpha x + \tfrac{1}{2}a + \frac{b\alpha + c}{2\alpha\alpha x} + \frac{d}{2\alpha\alpha xx} = 0.$$

Digitized by Google

Da die Gränzen des Verhältniſſes $x:y$ ſind, I. $1:0$; II. $1:-\alpha$; III. $1:+\alpha$, ſo ſind die drey hyperboliſchen Linien die Aſymptoten der Curve. Iſt weder b noch c Null, oder iſt b allein Null, ſo iſt die Annäherung zu der geradlinichten Aſymptote an allen drey Zweigen proportional dem Quotienten $\frac{1}{x}$; iſt c allein Null, ſo iſt ſie bey I proportional dem $\frac{1}{xx}$, bey II. und III. dem $\frac{1}{x}$. Iſt entweder $c-b\alpha$ oder $c+b\alpha$ Null, ſo iſt an zwey Zweigen die Annäherung wie $\frac{1}{x}$, an einem wie $\frac{1}{xx}$. Sind beide b und c Null, ſo iſt ſie an allen drey Zweigen wie $\frac{1}{xx}$.

72. Demnach enthält die zweyte Gattung drey Arten. An der erſten ſind drey Aſymptoten von der Form $\frac{A}{x}$; an der zweyten ſind zwey von der Form $\frac{A}{x}$, und eine von der Form $\frac{A}{xx}$; an der dritten ſind alle drey von der Form $\frac{A}{xx}$. An keiner Art ſind zwey Aſymptoten von der Form $\frac{A}{xx}$ mit einer von der Form $\frac{A}{x}$. (Euleri Species III. IV. V. Newtoni 1—9; 24—27; 10—21; 28—31; 22, 23, 32.)

73. Die Gleichung für die dritte Gattung iſt (29.)

$$xy^2 + ax^2 + by + cx + d = 0.$$

Man gebe ihr eine dieſer beiden Geſtalten:

$$\text{I. } yy + ax + \frac{by+cx}{x} + \frac{d}{x} = 0;$$

$$\text{II. } x+\frac{axx}{yy}+\frac{b}{y}+\frac{cx}{yy}+\frac{d}{yy}=0.$$

Nach der letztern ſehe man y als Abſciſſe an, die ins Unendliche wachſen mag, und x als Ordinate.

Man nehme folgende beide Gleichungen an, die erſtere für eine Parabel, die andere für eine hyperboliſche Linie.

$$\text{I. } zz+ax+c=0;$$

$$\text{II. } x+\frac{b}{z}+\frac{d}{zz}=0,$$

in welcher letztern z als Abſciſſe betrachtet werden mag.

In I. iſt die Gränze des Verhältniſſes $x:yy=1:a$, wo y mit x unendlich groß wird, aber gegen x unendlich klein bleibt (53.). Im Unendlichen verſchwinden die Glieder $\frac{by}{x}$ und $\frac{d}{x}$, das iſt $\frac{b}{y}$ und $\frac{d}{x}$. Es nähert ſich alſo die Gleichung für y der für z immer mehr ohne Ende. In beiden mag man auch die Größe c im Unendlichen weglaſſen. In II. iſt die Gränze des Verhältniſſes $x:y$, wenn x mehr und mehr abnimmt, $0:1$, und die Gleichung nähert ſich immer mehr der zweyten Gleichung für z, das iſt der Gleichung $x+\frac{b}{z}=0$, und wenn $b=0$ iſt, der Gleichung, $x+\frac{d}{zz}=0$. Demnach ſind, wenn ax^2 in der Gleichung für y nicht fehlt, zwey Arten, die erſte mit der Aſymptote von der Form $zz=Ax$, und mit der von der Form $z=\frac{A}{y}$, die zweyte mit einer paraboliſchen Aſymptote, wie jene, aber einer hyperboliſchen von der Form $\frac{A}{yy}$. (Euleri Species VI. et VII. Newtoni 46—52; 53—56.)

74. Iſt $a = o$, und c poſitiv, ſo hat die Curve für unendliche x keine Ordinaten, weil in der Gleichung,

$y^2 + \frac{by}{x} + c + \frac{d}{x} = o$, für ein unendlich großes x die beiden durch x dividirten Glieder verſchwinden, und die beiden übrigen ſich nicht heben. In dieſem Falle iſt die Curve ſelbſt eine hyperboliſche Linie mit zwey Schenkeln. Denn der Quotient $\frac{by + d}{yy + c} = - x$, giebt

$-x = \frac{b}{y} + \frac{d}{y^2} - \frac{bc}{y^3} - \frac{cd}{y^4} + \text{etc.}$ Die Curve hat eine einzige Aſymptote von der Form $\frac{b}{y}$, wenn b nicht Null iſt, und von der Form $\frac{d}{y^2}$, wenn $b = o$ iſt. (Euleri Sp. VIII. et IX. Newtoni 61. 62; 63.)

75. Es ſey $a = o$, und c negativ, oder deutlicher, es ſey die Gleichung,

$$xy^2 + by - ccx + d = o,$$

ſo bleibt die Curve noch eine hyperboliſche mit ſechs Schenkeln oder mit drey Aſymptoten. Es iſt nämlich erſtlich, wie vorher,

$$-x = \frac{b}{y} + \frac{d}{y^2} + \frac{bc^2}{y^3} + \frac{c^2 d}{y^4} + \text{etc.}$$

Zweytens iſt

$$y = c - \frac{d + bc}{2cx} - \frac{d^2 - b^2 c^2}{8c^3 x^2} + \text{etc.}$$

wo c ſowohl negativ als poſitiv zu nehmen iſt.

Das leztere Paar Werthe erhält man durch die Methode in dem Art. Function. Man nehme nämlich

an: $y = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} +$ etc. und ſetze dieſen Werth von y in die Glieder der Gleichung, ſo giebt jeder Coefficient der Potenzen von x eine Gleichung zur Beſtimmung der Coefficienten in der Reihe. Da $A^2 = c^2$, ſo iſt $A = \pm c$. Daher erhält jeder Coefficient in der Reihe einen gedoppelten Werth. Eben die Reihe für y findet man auch, wenn man die Wurzelgröße in dem Werthe von y in eine Reihe verwandelt.

Die Curve hat zwey Aſymptoten der Axe der Abſciſſen x parallel in dem Abſtande c auf beiden Seiten, und eine in der Axe der Ordinaten y ſelbſt. Es ſind hier zwey Fälle möglich. Erſtlich, wenn b nicht $= o$ iſt, ſo ſind alle drey Aſymptoten von der Form $\frac{A}{t}$, wo t ſowohl die x als y bedeutet. Iſt $b = o$, ſo iſt die Aſymptote, die in der Axe der y liegt, von der Form $\frac{A}{t^2}$; die beiden andern ſind von der Form $\frac{A}{t}$. (Euleri Sp. X. et XI. Newtoni 57. 58. 59; 60.)

76. Es fehle ccx, und die Gleichung ſey, $xy^2 - by - d = o$, ſo iſt

$$yy = \frac{d}{x} + \frac{by}{x}, \text{ und}$$

$$x = \frac{b}{y} + \frac{d}{yy}.$$

Hieraus erhellet gleich, daß die Curve zwey Aſymptoten hat, die erſtere von der Form $yy = \frac{d}{x}$, auf der Axe der Abſciſſen x, die andere von der Form $x = \frac{b}{y}$, auf der Axe der Ordinaten y, wenn nämlich nicht iſt $b = o$. Iſt $b = o$, ſo iſt die erſtere Aſymptote wieder von der

Form $\frac{d}{x}$; die andere von der Form $\frac{d}{yy}$. (Euleri Spec. XII. et XIII. Newtoni 64; 65.)

Der Reihen-Ausdruck für y iſt

$$y = \pm \sqrt{\frac{d}{x}} + \frac{b}{2x} \pm \frac{bb}{8x\sqrt{dx}} \mp \text{etc.}$$

77. Die Gleichungen für die vierte Gattung ſind:

$$y^3 + ax^2 + by + c = 0;$$
$$y^3 + axy + bx + c = 0.$$

Für die erſte iſt die Gränzgleichung $z^3 + ax^2 = 0$, und die einzige Aſymptote iſt eine paraboliſche von dieſer Form. (Euleri Sp. XIV. Newtoni 67 — 71.)

Für die zweyte iſt eine Gränzgleichung $z^2 + ax = 0$; und eine $z = -\frac{b}{a} + \frac{A}{x}$, wo $A = \frac{b^3}{a^4} - \frac{c}{a}$ iſt. Denn wenn man nimmt $ay + b = 0$, ſo bleibt $y^3 + c$ in der Gleichung übrig. Um dieſen Theil zu heben, muß y haben die Form

$$y = -\frac{b}{a} + \frac{A}{x} + \frac{B}{xx} + \text{etc.}$$

Dieſer Werth in die Gleichung geſetzt, wird $A = \frac{b^3}{a^4} - \frac{c}{a}$. Daher iſt die Gränzgleichung die angegebene. Die Curve hat zwey Aſymptoten, eine paraboliſche und eine hyperboliſche. Die gerade Aſymptote der letztern iſt der Axe der Curve parallel in dem Abſtande $-\frac{b}{a}$. (Euleri Spec. XV. Newtoni 66.)

Iſt $b^3 = a^3c$, ſo läßt ſich die Gleichung durch

$y + \frac{b}{a}$ dividiren, und gilt für ein Syſtem einer geraden Linie und eines Kegelſchnitts.

78. Für die Gleichung, $ay^3 + by^2 + cy + d = x$, iſt die Gränze, $az^3 = x$. (Euleri Sp. XVI. Newtoni, 72.)

79. Cramer (Anal. des lignes courbes §. 155.) theilt die Gattungen auch nach der Beſchaffenheit der Aſymptoten in Arten ein, zählt aber nur vierzehn Arten der Linien der dritten Ordnung. Er zieht Eulers Species VIII. IX. in eine zuſammen; ferner X. XI; ſo auch XII. XIII. Dieſe unterſcheiden ſich aber in der That durch die Beſchaffenheit der Annäherung der hyperboliſchen Zweige zu den geraden Aſymptoten. Hingegen führt er in der zweyten Gattung noch eine vierte Art auf, nämlich diejenige, wo die drey Aſymptoten ſich in einem einzigen Puncte ſchneiden. Dieſer Umſtand hat aber mit dem Eintheilungsgrunde nichts zu thun. Er ſetzt auch wirklich hinzu, wenn man es für gut finde, dieſe Abſonderung zu machen. In den andern Fällen unterſcheidet er die hyperboliſchen Zweige, die ſich auf entgegengeſetzten Seiten, oder auf derſelben ihrer Aſymptote nähern, das iſt, diejenigen, wo ſie von der Form $\frac{A}{x}$ oder $\frac{A}{xx}$ ſind. D'Alembert (Dictionn. encycl. Art. Courbe) will aus der verſchiedenen Aufzählung der Arten, die Cramer und Euler machen, die Folge ziehen, daß die Unterabtheilungen etwas willkürliches ſeyn. Freylich kann man den Eintheilungsgrund auf verſchiedene Art wählen, wie es ſelbſt bey den Gattungen nach Newton und Euler der Fall iſt. Allein bey einem beſtimmten Eintheilungsgrunde dürfen keine Unterſchiede Statt haben. Cramer hat wirklich drey weſentliche Verſchiedenheiten überſehen.

Krumme Linien der dritten Claſſe, oder Linien der vierten Ordnung, ſind ſolche, worin die Anzahl

der Dimenſionen in den Gliedern der Gleichung bis zu **vier** ſteigt, nämlich bloß in Rückſicht auf die veränderlichen Größen. (Krumme Linien, 12.). Der höchſte Theil der Gleichung iſt im Allgemeinen

$$ay^4 + bxy^3 + cx^2y^2 + dx^3y + ex^4,$$

von welchen Gliedern wenigſtens eines vorhanden ſeyn muß.

Die Mannichfaltigkeit der Formen in dieſer Claſſe iſt ſehr groß. **Euler** zählt hundert ſechs und vierzig Arten in acht Gattungen, worin aber meiſtens noch manche merklich verſchiedene Abänderungen vorkommen.

Die Eintheilung macht Euler auch hier nach der Beſchaffenheit der einfachen Factoren des oberſten Gliedes.

I. Fall. Der höchſte Theil (membrum supremum) enthält gar keine mögliche einfache Factoren. Die Curven ſind auf einen endlichen Raum beſchränkt. Ein einziges Geſchlecht.

II. Fall. Zwey mögliche und ungleiche einfache Factoren. Sieben Geſchlechter mit hyperboliſchen Aſymptoten.

III. Fall. Zwey mögliche und gleiche einfache Factoren. Sieben Geſchlechter. Darunter zwey auf einen endlichen Raum eingeſchränkte. Eines mit einer einzigen paraboliſchen Aſymptote. Die übrigen mit hyperboliſchen.

IV. Fall. Vier ungleiche mögliche einfache Factoren. Zehn Geſchlechter, jedes mit vier hyperboliſchen Aſymptoten.

V. Fall. Zwey gleiche und zwey ungleiche Factoren. Vierzig Geſchlechter, die Euler aber nicht alle näher unterſucht hat, ſo daß vielleicht einige als unmögliche, wegen eines Widerſpruches in den Annahmen, wegfallen müſſen.

VI. Fall. Zwey Paare gleicher Factoren. Sieben und vierzig Geſchlechter, die nicht insbeſondere geprüft ſind.

VII. Fall. Drey gleiche Factoren. Vier und zwanzig Geſchlechter, die auch nicht einzeln unterſucht ſind.

VIII. Fall. Vier gleiche Factoren. Eilf Geſchlechter. Jedes hat eine paraboliſche Aſymptote, eines zwey ſolche. Neben jener iſt noch eine hyperboliſche, außer bey vier Geſchlechtern.

Cramer macht neun Claſſen von den Linien der vierten Ordnung. I. Die auf einen endlichen Raum beſchränkten. II. Mit zwey paraboliſchen Zweigen. III. Mit zwey hyperboliſchen. IV. Mit vier paraboliſchen. V. Mit zwey paraboliſchen und zwey hyperboliſchen. VI. Mit vier hyperboliſchen. VII. Mit zwey paraboliſchen und vier hyperboliſchen. VIII. Mit ſechs hyperboliſchen. IX. Mit acht ſolchen. Analyse des lignes courbes. §. 157.

Krumme Linien von gedoppelter Krümmung ſind ſolche, von welchen kein Theil, ſo klein er auch ſeyn mag, in derſelben Ebene liegt. Sie entſtehen auf verſchiedene Arten. Wenn zwey krumme Flächen einander ſchneiden, ſo iſt am häufigſten ihre Durchſchnittslinie eine gedoppelt krumme Linie. Dergleichen Fälle kommen in der Baukunſt vor. Ferner, auf der krummen Oberfläche eines Körpers werde eine krumme Linie nach einem gewiſſen Geſetze beſchrieben, ſo iſt dieſe meiſtens eine gedoppelt krumme Linie, z. B. die Spiralen auf der Fläche eines Cylinders, Kegels oder einer Kugel, welche mit den Seitenlinien des Cylinders oder des Kegels, oder den großen Kreiſen mit einem gemeinſchaftlichen Durchmeſſer (Meridianen) durchgehends gleiche Winkel machen. Wenn auf eine einfach krumme Linie gerade geſetzt werden, ſenkrecht auf ihre Ebene, und dieſe ſenkrechten nach einem gewiſſen Geſetze fortgehen, ſo entſteht eine gedoppelt krumme Linie. Auf dieſe Art laſſen ſich unendlich viele Curven dieſer Art angeben. Die Gränze der Erleuchtung eines Körpers mit einer krummen Oberfläche kann doppelt gekrümmt ſeyn. Die Bewegung eines Körpers, der nach zwey oder mehrern Mittelpuncten der beſchleunigenden Kräfte getrieben wird, geſchieht nicht in derſelben Ebene, es müßten denn dieſe Mittelpuncte der Kräfte

und die Richtung der Bewegung in derſelben Ebene liegen. Jenes iſt der Fall bey den Bewegungen der Planeten und ihrer Trabanten, für letztere auch bey ihren relativen Bewegungen. Hieraus ſieht man, daß die Unterſuchung der Linien von gedoppelter Krümmung allerdings von Wichtigkeit, auch wegen ihrer Anwendungen, iſt.

1. So wie bey einer krummen Linie, deren Puncte alle in einer Ebene liegen, die Lage jedes Punctes durch den Abſtand von zwey gegebenen geraden Linien in jener Ebene, nach Richtungen, die denſelben parallel ſind, d. i. durch zwey Coordinaten (x, y) mit einem gewiſſen Ordinatenwinkel beſtimmt wird, ſo wird für eine Linie von gedoppelter Krümmung die Lage jedes Punctes durch die Abſtände von drey gegebenen Ebenen (x, y, z) nach Richtungen, die denſelben parallel ſind, beſtimmt. Die drey Ebenen ſetze man ſenkrecht auf einander, ſo daß die Axen der Coordinaten durch den ihnen gemeinſchaftlichen Punct gehen, und ſenkrecht auf einander ſind. Die Abſtände jedes Punctes von den Ebenen werden ſolchergeſtalt nach geraden Linien, auf die Ebene ſenkrechten, genommen.

In Fig. 67. ſind AX, AY, AZ die drey Axen der Coordinaten. Je zwey bilden eine Ebene für zwey Coordinaten, die Ebene XAY ſind die x und y, die Ebene YAZ für die y und z; die Ebene XAZ für die x und z. Es ſey QPR ein Bogen der Curve; P ein Punct derſelben. Von demſelben laſſe man auf die Ebene XAY die ſenkrechte PN = z herab; von N ziehe man in dieſer Ebene die ſenkrechte NM = y auf AX. Dieſe ſchneidet darauf die AM = x ab.

2. Zur Beſtimmung einer krummen Linie von gedoppelter Krümmung ſind zwey Gleichungen zwiſchen den Coordinaten x, y, z nöthig. Schafft man aus denſelben eine der veränderlichen Größen, z, heraus, ſo erhält man eine Gleichung zwiſchen x und y, welche auch urſprünglich gegeben ſeyn mag. Dieſe Gleichung iſt für eine Curve qNr, welche die Projection der QPR auf der Ebene der x, y iſt. Schafft man x heraus, ſo iſt die Gleichung

zwiſchen y und z für die Curve qpr, welche auf der Ebene der y, z die Projection der Curve QPR iſt. Auf gleiche Weiſe iſt die Gleichung zwiſchen x und z, nach weggeſchaffter y, die Gleichung für die Projection auf die Ebene der x, z. Durch zwey dieſer Projectionen wird die gedoppelt krumme Linie beſtimmt. — Dieſe Projectionen bezeichne man durch ihre Coordinaten, ſo wie die gedoppelt krumme Linie ſelbſt durch alle drey.

3. Die ſtetige Reihe der auf die Projection der Curve (x, y, z) in der Ebene der x, y ſenkrechten z bildet eine cylinderartige Fläche, auf welcher die Curve (x, y, z) eben ſo dargeſtellt wird, wie eine Curve von einfacher Krümmung auf einer ebenen Fläche. Nimmt man die Bogen (s) der Curve (x, y) als Abſciſſen an, ſo ſind die z die Ordinaten zu denſelben. Auf gleiche Weiſe läßt ſich die Curve (x, y, z) auf der cylindriſchen Fläche über einer der beiden andern Projectionen, den Curven (y, z) oder (x, z), beſchreiben.

4. Exempel, 1. Die beiden Gleichungen für die gedoppelt krumme Linie ſeyn I. $ax = yy$; II. $yy + zz = aa$, jene für eine Parabel auf der Ebene der x, y, dieſe für einen Kreis, deſſen Mittelpunct der Anfang der Coordinaten iſt, in der Ebene der y, z. Da hier die veränderlichen Größen ſchon geſondert ſind, ſo ergiebt ſich ſogleich die Beſchaffenheit der Curve (x, y, z). Sie iſt der Durchſchnitt eines Cylinders über dem gedachten Kreiſe mit dem paraboliſchen Cylinder über der Curve (x, y). Für die Projection der Curve auf der Ebene (x, z) iſt die Gleichung, $ax = aa - zz$, oder $zz = a(a - x)$. Sie iſt ein paraboliſcher Bogen, mit dem Parameter a. Er bricht ab, wenn $x = a$ wird.

5. Exempel, 2. Die beiden Gleichungen für die gedoppelt krumme Linie ſeyn I. $ax = yy$: II. $by = zz$. Sie iſt der Durchſchnitt zweyer paraboliſchen Cylinder. Für die Projection derſelben auf der Ebene der x, z iſt die Gleichung, $abbx = z^4$, eine höhere Parabel.

6. Exempel, 3. Es ſey I. $xx + yy = aa$;

II. $bz = xy$, ſo iſt $b^2 z^2 = x^2 y^2$, daher $y^4 - a^2 y^2 + b^2 z^2 = 0$, die Gleichung für die Projection der Curve (x, y, z) auf die Ebene der y, z. Dieſe iſt auf einen endlichen Raum beſchränkt. Der größte Werth, den xy haben kann, iſt der für $x = y$. Denn es iſt $2xy$ der Sinus des doppelten Winkels, der zu x und y gehört. Dieſer iſt am größten, wenn der Winkel ein rechter iſt, alſo wenn der Winkel zu x und y ein halber rechter iſt.

7. Die Lage der berührenden geraden an irgend einem Puncte einer doppelt krummen Linie wird folgendergeſtalt beſtimmt. Die Gleichung für ihre Projection auf die Ebene der x, y ſey I. $y' = ax + \alpha$; auf die Ebene der x, z ſey ſie II. $z = bx + \beta$, ihr Neigungswinkel gegen die Ebene x, y ſey ϑ, ſpitz, wenn der Punct, wo ſie die Ebene trifft, von dem Grundpuncte der poſitiven Ordinate z zu einer poſitiven y, nach der Axe der x oder jenſeits derſelben liegt, ſtumpf (negativ), wenn jener Punct jenſeits des Grundpunctes der z fällt. Die Neigungsebene ſchneide die Axe der x unter dem Winkel η, der nach der Gegend der poſitiven x ſpitz ſey. Es iſt tang $\eta = a$, und tang $\vartheta = \frac{b}{\sqrt{(1 + aa)}}$, (Linie, 20.). An der berührenden ſind die Differential Verhältniſſe $\partial y : \partial x$ und $\partial z : \partial x$ dieſelben wie an der Curve, auf gleiche Art wie an den einfachen krummen Linien. Denn die gerade, an welcher die Verhältniſſe der endlichen Differenzen, $\Delta y : \Delta x$ und $\Delta z : \Delta x$ mit denen an der Curve in einem Puncte übereinkommen, weicht von der Curve ab, deſto mehr je größer die Differenzen ſind. Nun iſt an der geraden Linie $\frac{\partial y}{\partial x} = a$; $\frac{\partial z}{\partial x} = b$. Dadurch werden die Winkel η und ϑ für die gerade berührende beſtimmt. Es iſt, wenn nun die Differentiale zu der Curve gehören, tang $\eta = \frac{\partial y}{\partial x}$ und tang $\vartheta = \frac{\partial z}{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}$. Die

unveränderlichen α und β werden durch die zu einem gegebenen Puncte der Curve gehörigen Coordinaten beſtimmt, nachdem a und b gefunden ſind.

Die Subtangente in der Ebene des Winkels ϑ iſt $= z \cot \vartheta = \frac{z \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}}{\partial z}$. Durch dieſe wird die Lage der berührenden völlig beſtimmt.

8. Exempel. Die Gleichungen für eine gedoppelt krumme Linie ſeyn I. $ax = yy$; II. $yy + zz = aa$. Hier iſt $a\partial x = 2y\partial y$; und $z\partial z = -y\partial y = -\frac{1}{2}a\partial x$. Ferner iſt $\partial x^2 + \partial y^2 = \frac{aa + 4yy}{4yy} \partial x^2$. Folglich

$\tang \eta = \frac{a}{2y}$, und $\tang \vartheta = -\frac{ay}{z\sqrt{(aa + 4yy)}}$.

Die Negation zeigt an, daß der Neigungswinkel der berührenden mit der Ebene der x, y ſtumpf iſt, oder daß der Punct, wo ſie die Ebene trifft, weiter von der Axe der x liegt, als der Grundpunct der Ordinate.

Die Subtangente iſt $= -\frac{zz\sqrt{(aa + 4yy)}}{ay}$

$= -(a - x)\sqrt{\frac{a + 4x}{x}}$.

9. Das Differential eines Bogens einer gedoppelt krummen Linie iſt $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial x^2)}$. Es ſey nämlich (Fig. 68.) QNR ein Bogen der Projection auf die Ebene der x, y; PN die Ordinate z in dem Puncte N; QQ, RR ein paar andere Ordinaten z; QPR die gedoppelt krumme Linie auf der cylindriſchen Fläche durch QNR. Neben der Ordinate NP ziehe man noch eine np, und lege durch P eine mit der Grundebene parallele Ebene, welche die cylindriſche Fläche in Pπ ſchneide. Die Chorde von Pπ iſt gleich der Chorde von Nn, das iſt $= \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$, und die Chorde von Pp iſt $= \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}$. Der von der Größe der Differenzen unabhängige Theil des Quotienten,

$\frac{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}}{\Delta s}$ iſt $= 1$, wenn der endliche Bogen $= s$ iſt. Das iſt, es iſt $\partial s = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)}$.

Aus den Gleichungen zwiſchen x, y und z verwandle man das Differential $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)}$ in eine Differentialformel für x oder y oder z. Iſt dieſe integrirbar, ſo iſt die Curve rectificabel.

10. In N ziehe man die berührenden NT an die Projection QNR, und nehme PN : NT gleich dem Gränzverhältniſſe von $p\pi : P\pi$, welches iſt $\partial z : \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, ſo iſt NT die Subtangente, und PT die berührende in P.

11. Das Differential der cylindriſchen Fläche iſt $= z\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, auf ähnliche Art, wie an Curven in einer Ebene. Ein Beyſpiel in dem Artikel, Florentiniſche Aufgabe, 15.

12. Von den doppelt gekrümmten Curven, die auf andere als die hier erklärte Art, durch den Durchſchnitt zweyer krummen Flächen entſtehen, wird beſſer in dem folgenden Artikel gehandelt werden können. Hier folgen einige Beyſpiele von ſolchen krummen Linien, die nach einem beſtimmten Geſetze auf der krummen Oberfläche eines Körpers gezeichnet werden. An dieſen zeigt ſich zugleich eine andere Art, die Natur einer doppelt krummen Linie durch eine Gleichung darzuſtellen, und zwar bloß durch zwey Coordinaten, deren eine aber ein Kreisbogen, die andere eine gerade, oder auch ein Kreisbogen iſt.

13. Der Körper ſey ein ſenkrechter Cylinder, deſſen Halbmeſſer a iſt. Die krumme auf der Oberfläche gezeichnete Linie mache mit den Seitenlinien des Cylinders durchgehends denſelben Winkel. Ein Bogen des Umfanges der Grundfläche ſey $= s$; die Seite des Cylinders von dem veränderlichen Puncte deſſelben bis an den Punct der ſpiraliſchen Curve ſey $= z$, der Bogen derſelben $= S$, der Winkel mit der Seite $= \alpha$, ſo iſt $\tan\alpha = \frac{\partial z}{\partial s}$,

wie tang ϑ in (7.). Da $\partial S = \sqrt{(\partial s^2 + \partial z^2)}$ $= \partial s \sqrt{(1 + \tan g\, \alpha^2)} = \frac{\partial s}{\cos \alpha}$ iſt, ſo iſt

$S = \frac{s}{\cos \alpha} + C$. Die Conſtante fällt weg, wenn beide Bogen zugleich anfangen. Die ſpiraliſche Curve iſt in eben dem Maaße rectificabel als der Kreisbogen der Grundfläche.

14. Es iſt ABP (Fig. 69.) ein Theil von der Oberfläche eines ſenkrechten Kegels, deſſen Grundfläche zum Mittelpuncte C hat. Auf der Oberfläche iſt eine krumme Linie ſo gezogen, daß ſie mit den Seitenlinien des Kegels durchgehends einen gegebenen Winkel macht. Man ſucht die Gleichung zwiſchen dem Bogen BP und dem Stück PM der Seitenlinie AP bis an den Punct M der Curve.

Der Halbmeſſer der Grundfläche CB ſey $= a$, der Winkel $BCP = \varphi$, ſo iſt der Bogen $BP = a\varphi$. Die Seite des Kegels ſey $= b$, und $PM = u$. Der Winkel der Curve mit der Seitenlinie, nämlich BMP, ſey $= \alpha$. Man ziehe neben AP noch die Seitenlinie AQ, welche von der Curve in N geſchnitten werde, und durch M den Kreisbogen Mm bis an m auf AQ. Es iſt $PQ = a \Delta \varphi$; $Mm = \frac{b - u}{b} a \Delta \varphi$; $Nm = \Delta u$. Die Gränze oder der von der Quantität der Differenzen unabhängige Theil von $\frac{Mm}{Nm}$ iſt tang BNQ oder tang BMP. Es iſt $\frac{Mm}{Nm} = \frac{b - u}{b} \cdot \frac{a \Delta \varphi}{\Delta u}$, wovon die Gränze iſt $\frac{b - u}{b} \cdot \frac{a \partial \varphi}{\partial u}$. Dieſer Quotient iſt alſo $= \tan g\, \alpha$.

Folglich iſt $\frac{a \partial \varphi}{\tan g\, \alpha} = \frac{b \partial u}{b - u}$, alſo (Integralformel, 5.),

$$\frac{\alpha \varphi}{\text{tang}\,\alpha} = \text{b lognat.}\,\frac{\text{b}}{\text{b}-\text{u}},$$

wo die Conſtante ſo beſtimmt iſt, daß φ und u zugleich Null ſind.

Das Differential des Bogens BM ($=$S), iſt $\partial S = \frac{\partial u}{\text{coſ}\,\alpha}$, alſo $S = \frac{u}{\text{coſ}\,\alpha}$.

Wenn u$=$b geſetzt wird, ſo iſt $\frac{b}{b-u}$ unendlich, und φ unendlich. Die koniſche logarithmiſche Spirale gelangt nur nach unendlich vielen Umläufen in den Scheitelpunct des Kegels.

Ihre Länge bleibt aber endlich. Die Gränze dieſer Länge iſt $\frac{b}{\text{coſ}\,\alpha}$. Dieſes darf nicht wunderbar ſcheinen, da die Summe einer abnehmenden geometriſchen Reihe endlich iſt, ungeachtet ſie aus unendlich vielen Gliedern beſteht. Hier nehmen die Längen b — u in geometriſcher Progreſſion ab, wenn die Winkel φ am Mittelpuncte der Grundfläche in arithmetiſcher Progreſſion zunehmen.

15. Die Projection der koniſchen logarithmiſchen Spirale iſt auch eine logarithmiſche. Wenn von einem Puncte M jener eine ſenkrechte auf die Grundfläche gelaſſen wird, ſo theilet dieſe den zugehörigen Halbmeſſer in zwey Theile, welche denen auf A P proportional ſind. Bey demſelben Winkel hat man nur ſtatt b und u zu ſetzen a und $\frac{a}{b}$ u. S. Spirale, logarithmiſche.

16. Läßt man die PM oder u gleichförmig mit φ zunehmen, ſo iſt $\partial u = m a \partial \varphi$. Die Tangente des Winkels BMP iſt $= \frac{b-u}{mb}$. Der Winkel nimmt ab, wenn u zunimmt. Dieſe koniſche Spirale iſt der Archimedeiſchen analog. Ihre Projection giebt dieſe.

Das Differential des Bogens S iſt $\partial S =$

$V(\partial u^2 + \left(\frac{b-u}{b}\right)^2 a^2 \partial \varphi^2) = \frac{\partial u}{mb} V (m^2 b^2 + (b-u)^2)$, oder wenn $b - u = v$ geſetzt wird, $\partial s = -\frac{\partial v}{mb} V(m^2 b^2 + v^2)$, wovon das Integral nach Integralformel, 57 u. 50, gefunden wird.

17. Es ſind AB, AP (Fig. 70.) zwey Quadranten auf einer Kugelfläche, ſo daß BP ein Bogen eines großen Kreiſes iſt, deſſen einer Pol in A liegt. Die Curve BM ſchneide alle Quadranten wie AP unter demſelben Winkel BMP; es wird die Gleichung zwiſchen den Bogen BP und PM geſucht.

Man ziehe neben AP noch einen Quadranten AQ, und durch M den Bogen Mm eines Parallelkreiſes; auch ſey N auf AQ ein Punct der Curve. Es ſey der Halbmeſſer der Kugel = 1; der Bogen BP = φ; PM = ω, ſo iſt PQ = $\Delta\varphi$, Nm = $\Delta\omega$; Mm = $\cos\omega . \Delta\varphi$. Alſo iſt tang BNQ oder tang BMP = $\frac{\cos\omega . \partial\varphi}{\partial\omega}$.

Es ſey BMP = α, ſo iſt tang $\alpha . \frac{\partial\omega}{\cos\omega} = \partial\varphi$. Die Integration giebt (Integralformel, 117.)

$$\text{tang}\,\alpha . \log.\,\text{nat.}\,\text{tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\omega) = \varphi,$$

wo φ und ω zugleich anfangen. — Dieſe krumme Linie kommt in der Schiffkunſt vor, wo ſie die **loxodromiſche** heißt. Wie auf einem elliptiſchen Sphäroid die Gleichung für eine ſolche Spirale, als hier auf einer Kugelfläche gezeichnet iſt, gefunden werde, wird in dem Artikel, Sphäroid, gezeigt.

18. Man nehme den Bogen PM in einem beſtimmten Verhältniſſe zu BP, nämlich m : 1, ſo daß PM = m × BP oder $\omega = m\varphi$. Alſo iſt tang BNQ oder tang BMP = $\frac{\cos\omega . \partial\varphi}{\partial\omega} = \frac{\cos\omega}{m}$. Für $\omega = 0$ oder

in B iſt dieſe Tangente $= \frac{1}{m}$; in A iſt ſie $= 0$. S. Florentiniſche Aufgabe.

Nimmt man den Abſtand von A dem Bogen BP proportional, ſo iſt die Curve der archimedeiſchen Spirale analog.

19. Eine einfach krumme Linie liegt ganz in derſelben Ebene. Die Lage ihrer nächſten Puncte gegen einander, in der ſtetigen Folge genommen, zu beſtimmen, iſt es nur nöthig, die Lage der berührenden geraden in jedem Puncte zu kennen, das iſt derjenigen, welche unter allen durch einen Punct gezogenen geraden am wenigſten von der Curve abweicht, oder an welcher das Verhältniß der Unterſchiede zweyer Abſciſſen und der zugehörigen Ordinaten dem Differentialverhältniſſe derſelben an der Curve gleich iſt (berührende Linie, 12; Linie, 15.). Allein an einer gedoppelt krummen Linie iſt die Lage der Ebene durch je drey Puncte der Curve veränderlich, ſo daß es nicht genug iſt, die Lage der berührenden in jedem Puncte anzugeben, ſondern es muß auch die Lage der Ebene beſtimmt werden können, welche unter allen durch einen gegebenen Punct der Curve gelegten Ebenen ſich am wenigſten von der Curve entfernt. Dieſe iſt diejenige, an welcher die Verhältniſſe der erſten und zweyten Unterſchiede der Coordinaten den gleichnamigen Differentialverhältniſſen an der Curve gleich ſind, wobey noch, eben ſo wie an den einfachen Curven, die Coordinaten in dem gemeinſchaftlichen Puncte der Ebene und der Curve gegeben oder angenommen werden. Jede andere Ebene, die durch drey Puncte der Curve gelegt wird, kommt dadurch zwar in den Verhältniſſen der Unterſchiede ihrer Coordinaten an dieſen drey Puncten mit den endlichen Unterſchieden der Coordinaten an der Curve überein, entfernt ſich aber in den dazwiſchen liegenden. Je näher die drey Puncte einander liegen, deſto mehr nähern ſich die Verhältniſſe an der Ebene den Differentialverhältniſſen an der Curve. Setzt man jene dieſen gleich, ſo hat die Ebene nicht mehr drey Puncte mit

der Curve gemein, ſo wenig als eine berührende gerade zwey Puncte, aber ſie kommt unter allen Ebenen durch denſelben Punct der Curve am nächſten. Will man ſich zur Verſinnlichung der Lage drey Puncte der Curve zugleich in der Ebene gedenken, ſo müſſen es unendlich nahe Puncte ſeyn, wo durch den Zuſatz, unendlich nahe, die Entfernung derſelben wiederum aufgehoben wird.

20. Man nenne die nach (19.) beſtimmte Ebene die **Krümmungs-Ebene**. Denn um die Krümmung zu meſſen oder zu vergleichen, müſſen drey Puncte in ſtetiger Folge, oder zwey Elemente, gedacht werden, durch welche ein Kreisbogen gezogen wird. Der Mittelpunct deſſelben fällt alſo in die Ebene durch dieſe drey Puncte. Die franzöſiſchen Analyſten nennen dieſe Ebene **Plan osculateur.**

21. Es ſeyn AM, MN, NP (Fig. 71.) drey rechtwinklichte Coordinaten an eine Ebene, die durch die geraden BB, PO gelegt iſt. Sie ſchneide die Ebene der AM, MN in BB, und ſey gegen dieſelbe unter dem Winkel PON $= \vartheta$ geneigt. Die Durchſchnittslinie BB ſchneide die AM in C unter dem ſpitzen Winkel BCM $= \eta$, in dem Abſtande h von dem Anfangspuncte A. Man ſetze AM $= x$; MN $= y$; NP $= z$, ſo iſt (krumme Fläche, 4.) die Gleichung für die Ebene

$$x \sin\eta - y \cos\eta + z \cot\vartheta - h \sin\eta = 0.$$

22. Es ſeyn drey Folgen von Coordinaten an der Curve, x, x', x''; y, y', y''; z, z', z'', ſo wird durch dieſe die Lage der Ebene, die durch die drey zugehörigen Puncte der Curve geht, beſtimmt. Setzt man dieſe, als gegeben betrachtete, Coordinaten in die Gleichung für eine Ebene, ſo erhält man drey Gleichungen, woraus ſich η, ϑ und h beſtimmen laſſen. Es ſey $x' - x = \Delta x$; $x'' - x' = \Delta x'$; und $x'' - 2x' + x = \Delta^2 x$ (nämlich $x'' - x' - (x' - x)$), ſo iſt, wenn Δy, $\Delta^2 y$; Δz, $\Delta^2 z$ ähnliche Bedeutungen für y und z haben,

$$\Delta x.\ \sin\eta - \Delta y.\ \cos\eta + \Delta z.\ \cot\vartheta = 0;$$

und

$$\Delta^2 x . \sin\eta - \Delta^2 y . \cos\eta + \Delta^2 z . \cot\vartheta = 0.$$

Aus dieſen beiden Gleichungen folgt, durch Wegſchaffung von $\cot\vartheta$,

$$\tang \eta = \frac{\Delta y . \Delta^2 z - \Delta z . \Delta^2 y}{\Delta x . \Delta^2 z - \Delta z . \Delta^2 x}.$$

Aus der erſten derſelben wird $\cot\vartheta$ durch den nun beſtimmten Werth von η hergeleitet.

Setzt man nun anſtatt der Verhältniſſe zwiſchen endlichen Unterſchieden die Differentialverhältniſſe an der Curve, ſo erhält man die Gleichungen für die Krümmungs-Ebene:

I. $\partial x . \sin\eta - \partial y . \cos\eta + \partial z . \cot\vartheta = 0.$

II. $\partial^2 x . \sin\eta - \partial^2 y . \cos\eta + \partial^2 z . \cot\vartheta = 0.$

Dazu kommt noch die Gleichung für die Coordinaten an die Ebene, welche ihr mit der Curve in einem Puncte gemeinſchaftlich ſind,

III $x \sin\eta - y \cos\eta + z \cot\vartheta = h \sin\eta.$

Daraus iſt

$$\tang \eta = \frac{\partial y . \partial^2 z - \partial z . \partial^2 y}{\partial x . \partial^2 z - \partial z . \partial^2 x}.$$

$$\cot\vartheta = \frac{\partial y}{\partial z} \cos\eta - \frac{\partial x}{\partial z} \sin\eta.$$

$$h = x - \frac{z \partial x}{\partial z} - \left(y - \frac{z \partial y}{\partial z}\right) \cot\eta.$$

In der letzten Formel ſind $\frac{z\partial x}{\partial z}$ und $\frac{z\partial y}{\partial z}$ die Subtangenten zweyer Projectionen der Curve.

Die Winkel η und ϑ, und der Abſtand h ſind mit jedem Puncte der Curve veränderlich.

23. Um eine beſtimmte Vergleichung der zweyten Differentiale machen zu können, (Differentio — Differentialrechnung, 15.) iſt eines der erſten Differentiale

unveränderlich zu ſetzen, hier am füglichſten ∂z. Solchergeſtalt iſt

$$\mathrm{tang}\,\eta = \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x}.$$

Die Formeln für cot ϑ und h bleiben wie in (22.).

24. Exempel: Die Gleichungen für eine gedoppelt krumme Linie ſeyn I. $ax = yy$; II. $yy + zz = aa$. Sie iſt der Durchſchnitt eines paraboliſchen und eines circularen Cylinders (4.). Hieraus ſind die Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{2z}{a}$, und $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{z}{y}$. Ferner $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\frac{2}{a}$, und $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -\frac{a}{xy}$, wenn nämlich in dem Differential von $\frac{\partial y}{\partial z}$ für yy und ∂y ihre Werthe, von jenem durch x, von dieſem durch ∂z geſetzt werden. Folglich iſt $\mathrm{tang}\,\eta = \frac{aa}{2xy}$, alſo $\sin\eta = \sqrt{\frac{a^3}{a^3 + 4x^3}}$, und $\mathrm{coſ}\,\eta = \sqrt{\frac{4x^3}{a^3 + 4x^3}}$. Ferner iſt $\cot\vartheta = \frac{2z}{a}\sin\eta - \frac{z}{y}\,\mathrm{coſ}\,\eta$, und $h = \frac{ax + 2zz}{a} - \frac{a^2}{y}\cot\eta$, oder $h = \frac{2z^2}{a} - x$.

Für $x = 0$ iſt $y = 0$, und $z = a$, alſo $\eta = 90^\circ$. Daher $\cot\vartheta = +2$. Der zweyte Theil von $\cot\vartheta$ wird $\frac{0}{0}$, allein da $\frac{\partial . z\,\mathrm{coſ}\,\eta}{\partial y} = 0$ iſt, ſo iſt dieſer zweyte Theil $\doteq 0$ (Function, 50.). Noch iſt $h = 2a$. Die Krümmungs-Ebene in dem oberſten Puncte der Curve ſchneidet die Axe der x unter einem rechten Winkel, in dem Abſtande 2a von dem Anfangspuncte, und iſt gegen die Ebene der x, y unter einem Winkel ϑ geneigt, deſſen Tangente $= \frac{1}{2}$ iſt, daher $\vartheta = 26^\circ\,34'$ iſt, nach der Gegend des Anfangspunctes.

Für $x = a$ iſt $y = a$, und $z = o$, alſo $\tang \eta = \frac{1}{2}$, und $\cot \vartheta = o$, oder $\vartheta = 90^\circ$. Auch iſt $h = - a$. Die Krümmungs-Ebene ſchneidet nun die Axe der x unter dem Winkel $\eta = 26^\circ 34'$, in dem Abſtande $- a$ von dem Anfangspuncte, und ſteht auf die Ebene der x, y ſenkrecht.

Wenn $3x = 2a$ genommen wird, ſo iſt $h = o$, und die Krümmungs-Ebene geht durch den Anfang der Coordinaten. Es iſt $y = a\sqrt{\frac{2}{3}}$; $z = a\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\tang \eta = \sqrt{\frac{27}{32}}$; $\tang \vartheta = \sqrt{\frac{59}{4}}$; $\eta = 42^\circ 34'$; $\vartheta = 75^\circ 24'$.

25. Wenn die Gleichungen für die Curve aus einer Differentialgleichung hergeleitet werden, ſo ergeben ſich die Werthe der Winkel η und ϑ aus der Differentialgleichung, eben ſo wie der Winkel der berührenden an einer einfach krummen Linie mit einer der Axen der Coordinaten durch eine Gleichung, $P\partial x - Q\partial y = o$, gegeben wird.

26. Die Differentialgleichung für eine gedoppelt krumme Linie ſey

$$P\partial x - Q\partial y + R\partial z = o,$$

ſo iſt $\tang \eta = \frac{P}{Q}$, und $\frac{\cot \vartheta}{\cos \eta} = \frac{R}{Q}$, alſo

$$\tang \vartheta = \frac{\sqrt{(P^2 + Q^2)}}{R}, \text{ und } \cos \vartheta = \frac{R}{\sqrt{(P^2 + Q^2 + R^2)}}.$$

Für den Durchſchnittspunct der Krümmungs-Ebene mit der Axe der x iſt $h = x - \frac{Q}{P}y + \frac{R}{P}z$.

Die letztere Formel iſt der Gleichung für die Subtangente an einer einfach krummen Linie analog. Wenn die berührende die Axe der x zwiſchen dem Anfange der x und dem Grundpuncte der Ordinate ſchneidet, ſo iſt der Abſtand des Durchſchnittspunctes von dem Anfange der

Abſciſſen $= x - \frac{y \partial x}{\partial y}$, da $\frac{y \partial x}{\partial y}$ die Subtangente iſt (berührende Linie, 13.).

27. Exempel. I. Für die logarithmiſche Spirale auf einer Kegelfläche iſt in (14.) die Differentialgleichung,

$$\frac{a \partial \varphi}{\operatorname{tang} \alpha} = \frac{b \partial u}{b - u},$$

gefunden. Es ſoll hieraus nun die Differentialgleichung für drey auf einander rechtwinklichte Coordinaten x, y, z hergeleitet werden.

Man ziehe von einem Puncte M (Fig. 69.) der Spirale auf den Halbmeſſer CP der Grundfläche die ſenkrechte $ML = z$; von L auf den Halbmeſſer CB die ſenkrechte $LH = y$, welche darauf $CH = x$ abſchneide. Die Axen der Coordinaten ſind nun CB, eine durch C auf CB in der Grundfläche BCP ſenkrechte, und die Axe des Kegels. Es ſey $AC = c$, und der Winkel $BCP = \varphi$. Es iſt

$$\text{I. } y = x \operatorname{tang} \varphi.$$

Ferner $CL = \frac{x}{\operatorname{coſ} \varphi}$; $PL = a - \frac{x}{\operatorname{coſ} \varphi}$; und $PC : AC = PL : LM$, daher,

$$\text{II. } z = c - \frac{c x}{a \operatorname{coſ} \varphi}.$$

Auch iſt $AP : AC = MP : ML$, folglich $u = \frac{b z}{c}$, und daher

$$\text{III. } \frac{a \partial \varphi}{\operatorname{tang} \alpha} = \frac{b \partial z}{c - z}.$$

Aus I. iſt $\partial y = \operatorname{tang} \varphi . \partial x + \frac{x \partial \varphi}{\operatorname{coſ} \varphi^2}$. Dieſe Gleichung wird durch die Subſtitutionen aus I, und II.

$$\partial y = \frac{y}{x} \partial x + \frac{a^2 (c - z)^2}{c^2 x} \partial \varphi.$$

Die Subſtitution für $\partial \varphi$ aus III. giebt die geſuchte Differentialgleichung,

$$\frac{y}{x} \partial x - \partial y + \frac{a b (c - z) \tang \alpha}{c^2 x} \partial z = 0.$$

Für die Krümmungs-Ebene ergeben ſich nun die Beſtimmungen:

$$\tang \eta = \frac{y}{x}.$$

$$\tang \vartheta = \frac{c^2 \sqrt{(x^2 + y^2)}}{a b (c - z) \tang \alpha} = \frac{c}{b \tang \alpha}$$

$$h = \frac{a b z (c - z) \tang \alpha}{c^2 y}.$$

Der zweyte Ausdruck für tang ϑ folgt aus den beiden Gleichungen, I. und II. Es iſt nämlich $x^2 + y^2 = x^2 (1 + \tang \varphi^2) = \frac{x^2}{\cos \varphi^2}$, und $c - z = \frac{c x}{a \cos \varphi}$. Wenn der Winkel φ zu dieſen Beſtimmungen mitgenommen wird, ſo iſt

$$\eta = \varphi;\ h = \frac{b \tang \alpha}{c \sin \varphi} z.$$

Die Krümmungs-Ebene an der koniſchen Spirale dreht ſich auf der Axe der Abſciſſen x, auf welcher der Anfangs-Radius CB liegt, völlig ſo, wie das Dreyeck ACP um AC, iſt gegen die Ebene der x und y unter einem unveränderlichen Winkel geneigt, und ſchneidet die Axe der x in dem Abſtande $h = \frac{b \tang \alpha}{c \sin \varphi} z$. Die Tangente des Neigungswinkels dieſer Ebene gegen die Ebene der x, y iſt nicht der Neigung der Spirale gegen die Grundebene oder eine ihr parallele gleich, weil es auch auf den Winkel der Seitenlinie des Kegels gegen die Grundfläche ankommt. Es iſt $\frac{c}{b}$ der Sinus dieſes Winkels.

In dem Anfangspuncte iſt $\sin \varphi = 0$, und auch

$z = o$, daher $h = \frac{o}{o}$. Für dieſen Punct wird $\frac{z}{\sin\varphi}$ $= \frac{\partial z}{\cos\varphi . \partial\varphi}$ (Function, 50.) Da $\frac{\partial z}{\partial\varphi} = \frac{a(c-z)}{b \operatorname{tang}\alpha}$ iſt, ſo iſt, für $z = o$, der Werth dieſes Bruchs $=$ $\frac{ac}{b \operatorname{tang}\alpha}$, und in dem Anfangspuncte $h = a$, wie es leicht begreiflich iſt.

28. Wenn $c = b$ genommen wird, ſo verwandelt ſich der ſenkrechte Kegel in einen ſolchen Cylinder. Hier iſt $\operatorname{tang}\eta = \operatorname{tang}\varphi$, wie an dem Kegel, aber $\operatorname{tang}\vartheta =$ $\cot\alpha$; $h = \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\sin\varphi} z$.

29. Exempel. II. Für die ſphäriſche Spirale iſt die Differentialgleichung, $\partial\varphi = \operatorname{tang}\alpha . \frac{\partial\omega}{\cos\omega}$, gefunden (17.). Man laſſe von dem Puncte M der Oberfläche (Fig. 70.) eine ſenkrechte z auf die Ebene des Kreisbogens BP, ziehe von dem Grundpuncte derſelben eine ſenkrechte y auf den Radius durch den Anfangspunct B, welche auf demſelben von dem Mittelpuncte aus das Stück x abſchneide. Da $BP = \varphi$ iſt, ſo iſt

$$\text{I. } y = x \operatorname{tang}\varphi.$$

Da $PM = \omega$, und der Halbmeſſer $= 1$ geſetzt iſt, ſo iſt

$$\text{II. } z = \sin\omega.$$

Die ſenkrechte z ſchneidet auf dem Halbmeſſer durch P vom Mittelpuncte aus das Stück $\cos\omega$ ab. Eben dieſes iſt auch $= \frac{x}{\cos\varphi}$. Alſo iſt

$$\text{III. } \cos\omega = \frac{x}{\cos\varphi}.$$

Dazu die angeführte Differentialgleichung

$$\text{IV. } \partial\varphi = \operatorname{tang}\alpha . \frac{\partial\omega}{\cos\omega}.$$

Hier ſind vier Gleichungen, weil zwey Winkel zu den Coordinaten, x, y, z, hinzukommen. Zuerſt ſchaffe man ω und $\partial\omega$ weg. Es iſt $\partial z = \operatorname{coſ}\omega . \partial\omega$, alſo

$\frac{\partial\omega}{\operatorname{coſ}\omega} = \frac{\partial z}{\operatorname{coſ}\omega^2} = \frac{\operatorname{coſ}\phi^2}{x^2}\partial z$. Daraus iſt

$\partial\phi = \operatorname{tang}\alpha . \frac{\operatorname{coſ}\phi^2}{x^2}\partial z$. Ferner iſt

$\partial y = \operatorname{tang}\phi . \partial x + \frac{x\partial\phi}{\operatorname{coſ}\phi^2}$, das iſt,

$\partial y = \frac{y}{x}\partial x + \frac{\operatorname{tang}\alpha}{x}\partial z$, die geſuchte Differential-gleichung zwiſchen x, y, z. Geordnet iſt ſie

$$\frac{y}{x}\partial x - \partial y + \frac{\operatorname{tang}\alpha}{x}\partial z = 0.$$

Für die Krümmungs-Ebene ſind nun die Beſtimmungen folgende:

$$\operatorname{tang}\eta = \frac{y}{x}, \text{ alſo } \eta = \phi.$$

$$\operatorname{tang}\vartheta = \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{\operatorname{coſ}\omega}{\operatorname{tang}\alpha}.$$

$$h = \operatorname{tang}\alpha . \frac{z}{y} = \frac{\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\omega}{\sin\phi}.$$

Für $\phi = 0$, und $\omega = 0$ wird $\frac{\operatorname{tang}\omega}{\sin\phi} = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha}$, und daher $h = 1 =$ dem Halbmeſſer. Nämlich, wenn M ſehr nahe bey B genommen wird, ſo iſt der Bogen BM nahe ein Kreisbogen, und daher nahe $\frac{\operatorname{tang}\omega}{\sin\phi} = \cot\alpha$. In dem Puncte B ſelbſt erreicht der Quotient die Gränze $\cot\alpha$.

Man bemerke die Übereinſtimmung dieſer Formeln mit denen für eine Kegelfläche. Die gerade berührende an der Kugel in der Ebene des Quadranten AP in dem Puncte M der Spirale iſt als die Seite eines Kegels zu betrachten, welche unter einem gegebenen Winkel geſchnit-

ten wird. Daher iſt hier ebenfalls $\eta = \varphi$. Aber die Neigung dieſer berührenden gegen die Grundfläche oder die Ebene des Kreisbogens BP iſt veränderlich. Dieſer Winkel iſt $90° - \omega$, wenn der Bogen $PM = \omega$ iſt. Alſo iſt der Sinus deſſelben $= \cos \omega$. Für die koniſche Spirale iſt $\tan \vartheta = \frac{c}{b \tan \alpha}$. Hier iſt $\frac{c}{b}$ der Sinus des Neigungswinkels der Seitenlinie gegen die Grundfläche, ſtatt deſſen für die ſphäriſche Spirale $\cos \omega$ kommt. — Für die koniſche Spirale iſt ferner $h = \frac{b \tan \alpha}{c \sin \varphi} z$. Hier iſt $\frac{bz}{c}$ der Theil der Seitenlinie des Kegels von der Grundebene bis an den Punct der Spirale. Für dieſe iſt an der ſphäriſchen Spirale die berührende von M bis an die Grundebene zu ſetzen. Dieſe iſt $= \tan \omega$. So verwandelt ſich jener Werth von h in den von h für die Kugel.

30. Das Verfahren, die Krümmungs-Ebene für eine gedoppelt krumme Linie zu finden, hat viel ähnliches mit dem Verfahren für die berührenden an einfach krummen Linien. Für dieſe iſt entweder eine endliche Gleichung gegeben, und man beſtimmt daraus die Lage der berührenden; oder es iſt die Differentialgleichung, $P\,\partial x = Q\,\partial y$, gegeben, und man ſucht daraus die endliche Gleichung für die Curve. So ſind für eine gedoppelt krumme Linie auch entweder zwey endliche Gleichungen vorhanden, woraus die Lage der Krümmungs-Ebene für jeden Punct beſtimmt wird, oder es iſt eine Differentialgleichung für die drey Coordinaten gegeben, woraus die beiden endlichen Gleichungen zu ſuchen ſind. Dieſes wird aber viel öfterer nicht zu bewerkſtelligen ſeyn, als bey den Gleichungen für zwey veränderliche Größen.

31. Man kann zuerſt unterſuchen, ob ſich die Gleichung nicht in zwey, beſonders integrirbare, Theile zerlegen laſſe. Z. B. es ſey gegeben die Gleichung,

$$aa\,\partial x - 2xy\,\partial x + (2az - 2xz)\,dz = 0.$$

Dieſe zerlege man in die Theile,

$$aa\partial x + 2az\partial z = o,$$
$$2xy\partial y + 2xz\partial z = o.$$

Daraus iſt I. $ax + zz = \text{conſt.}$
II. $yy + zz = \text{conſt.}$

Nimmt man die Conſtanten jede $= aa$, ſo iſt I. $ax + zz = aa$; II. $yy + zz = aa$; und daraus III. $ax = yy$. Die beiden letztern ſind die Gleichungen in (4).

Es ſey gegeben die Gleichung,

$$(4zz+2by)dx - abdy + \left(2az - \frac{4yz(4zz+2by)}{ab}\right)dz = o.$$

Setzt man hier $-ab\partial y + 2azdz = o$, ſo bleibt übrig $\partial x - \frac{4yz}{ab}\partial z = o$. Jene Gleichung giebt I. $by = zz$. Daher iſt $\partial x = \frac{4z^3\partial z}{ab^2}$; und II. $ab^2x = z^4$, auch III. $ax = yy$. Dieſes ſind die Gleichungen in (5.). Conſtanten ſind hier nicht zugeſetzt.

32. Iſt eine ſolche Zerlegung nicht möglich, ſo ſuche man die Gleichung für diejenige krumme Fläche zu entdecken, auf welcher die gedoppelt krumme Linie beſchrieben werden mag. Dieſe verbinde man mit der gegebenen Differentialgleichung, und unterſuche, ob ſie dadurch integrirbar gemacht werden könne. Die Integralgleichung und die Gleichung für die krumme Fläche ſind dann die beiden Gleichungen für die gedoppelt krumme Linie. Z. B. es ſey gegeben die Gleichung,

$$x\partial y - y\partial x = \frac{mab}{cc}(c-z)\partial z.$$

Man unterſuche, ob ſich die gedoppelt krumme Linie, für welche ſie gehört, auf einer Kegelfläche beſchreiben laſſe. Der Mittelpunct der Grundfläche ſey der Anfang der rechtwinklichten Coordinaten, und die ſenkrechte Axe des Kegels falle in die Axe der z. Der Halbmeſſer der Grundfläche

ſey a, die Seite b, die Höhe c, ſo iſt die Gleichung für die Kegelfläche,

$$c^2 (x^2 + y^2) = a^2 (c - z)^2,$$

wie man leicht finden wird. Dieſe mit jener durch Diviſion verbunden verwandelt ſie in die Gleichung,

$$\frac{x\partial y - y\partial x}{xx + yy} = \frac{mb}{a} . \frac{\partial z}{c - z}.$$

Man ſetze zur Abkürzung, $\frac{y}{x} = u$, ſo iſt $\frac{x\partial y - y\partial x}{xx} = \partial u$.

Auch iſt $\frac{xx + yy}{xx} = 1 + uu$. Alſo iſt $\frac{x\partial y - y\partial x}{xx + yy}$
$= \frac{\partial u}{1 + uu}$, und $\frac{\partial u}{1 + uu} = \frac{mb}{a} . \frac{\partial z}{c - z}$.

Die Integration giebt (Integralformel, 15. 5.).

$$\text{Ang. tang}\, u = \frac{mb}{a} \log. \frac{const}{c - z},$$

das iſt, Ang. tang $\frac{y}{x} = \frac{mb}{a} \log. \frac{const}{c - z}$.

Dieſes iſt eine der Gleichungen für die krumme Linie, die andere iſt für die krumme Fläche, nämlich $cc(xx + yy) = aa(c - z)^2$.

33. Es wird gegeben die Gleichung,

$$x\partial y - y\partial x = m\partial z.$$

Man nehme die Gleichung für die Coordinaten einer Kegelfläche, deren Anfang in dem Mittelpuncte der Kugel ſey, ſo iſt dieſe,

$$xx + yy + zz = aa,$$

wenn a der Halbmeſſer der Kugel iſt. Vermittelſt dieſer wird jene verwandelt in folgende,

$$\frac{x\partial y - y\partial x}{xx + yy} = \frac{m\partial z}{aa - zz}.$$

Die Integration giebt

$$\text{Ang. tang} \frac{y}{x} = \frac{m}{2a} \log. \frac{a+z}{a-z} + \text{Conſt.}$$

Dieſe Gleichung und die angenommene beſtimmen die Curve.

34. Die Kugelfläche iſt ſehr geſchickt, um darauf jede gedoppelt krumme Linie zu entwerfen. Man gedenke ſich nach jedem Puncte der Curve von dem Mittelpuncte der Kugel her gerade Linien, welche durch ihre Durchſchnitte mit der Kugelfläche die Projection der Curve geben. Die Projection auf der Kugelfläche gewährt eine deutlichere Vorſtellung von dem Laufe der Curve, als die gedoppelte auf zwey abgeſonderten Ebenen. Die Projectionslinie iſt ſelbſt eine gedoppelt krumme, wenn ſie nicht etwa ein Kreis iſt. Die Darſtellung des Laufs der Weltkörper nach Länge und Breite iſt nichts anders als eine Projection der Bahn auf eine Kugelfläche von einem unbeſtimmten Halbmeſſer.

35. Es ſeyn (Fig. 72.) AM, MN, NP (x, y, z) drey rechtwinklichte Coordinaten zu dem Puncte P einer gedoppelt krummen Linie. Man ziehe von dem Anfangspuncte A nach P die gerade $AP = u$, ſetze die Winkel $MAN = \varphi$; $PAN = \omega$, ſo iſt $NP = u \sin \omega$; $AN = u \operatorname{coſ} \omega$; $MN = u \operatorname{coſ} \omega . \sin \varphi$; $AM = u \operatorname{coſ} \omega . \operatorname{coſ} \varphi$, oder

$$x = u \operatorname{coſ} \omega . \operatorname{coſ} \varphi; \quad y = u \operatorname{coſ} \omega . \sin \varphi;$$

$$z = u \sin \omega.$$

Die zu einem Puncte gehörigen Coordinaten behalten ihre Verhältniſſe, wie groß oder klein auch u gegen den Halbmeſſer der Kugel ſeyn mag. Haben alle Glieder einer Gleichung gleich viele Dimenſionen nach den veränderlichen x, y, z, ſo geht u heraus, und die Gleichung wird eine zwiſchen zwey veränderlichen Winkeln φ und ω.

36. Man ziehe an einem Puncte P der doppelt gekrümmten QPR (Fig. 72.) eine berührende PS (7.), welche die Ebene AMN (der x, y) in S treffe, verbinden AS, ſo iſt dieſe der Durchſchnitt der Ebene APS mit der AMN. Von dem Grundpuncte N der Ordinate PN

ziehe man NO ſenkrecht auf AS, ſo iſt AS ſenkrecht auf die Ebene PNO, und daher ſenkrecht auf die gerade PO; folglich PON der Neigungswinkel der Ebene APS gegen die AMN.

Es bleibe $MAN = \varphi$; $PAN = \omega$; und es ſey $MAS = \eta$; $PON = \vartheta$, ſo iſt $ON = PN.\cot\vartheta = z\cot\vartheta$. Ferner $LN = \frac{ON}{\mathrm{coſ}\,LNO} = \frac{z\cot\vartheta}{\mathrm{coſ}\,\eta}$, und $ML = AM.\,\mathrm{tang}\,\eta = x\,\mathrm{tang}\,\eta$. Da $y = ML + LN$ iſt, ſo iſt $y = x\,\mathrm{tang}\,\eta + \frac{z\cot\vartheta}{\mathrm{coſ}\,\eta}$,

oder

$$x\sin\eta - y\,\mathrm{coſ}\,\eta + z\cot\vartheta = 0.$$

Dieſes iſt dieſelbe Gleichung, wie in (21.) für die Coordinaten irgend einer Ebene gefunden iſt, nur daß das h dort hier wegfällt, weil die Ebene APS durch den Anfang der Coordinaten geht.

37. Man ſetze für x, y, z ihre Werthe aus (35.), ſo iſt nach der Diviſion durch u,

$$\mathrm{coſ}\,\varphi.\,\mathrm{coſ}\,\omega.\sin\eta - \sin\varphi.\,\mathrm{coſ}\,\omega.\,\mathrm{coſ}\,\eta + \sin\omega.\cot\vartheta = 0.$$

Da $\sin\varphi.\,\mathrm{coſ}\,\eta - \mathrm{coſ}\,\varphi.\sin\eta = \sin(\varphi - \eta)$ iſt, ſo iſt

$$\mathrm{tang}\,\omega = \sin(\varphi - \eta).\,\mathrm{tang}\,\vartheta.$$

Dieſe Gleichung wird auch durch die ſphäriſche Trigonometrie gefunden, da die Bogen zu $\varphi - \eta$ und ω die Katheten eines rechtwinkligen ſphäriſchen Dreyecks ſind, in welchem der Winkel ϑ an der Seite liegt, welche der Bogen zu $\varphi - \eta$ iſt.

38. Bey der ſtetigen Veränderung oder Bewegung des Punctes P verändert ſich die Lage der AP entweder ſo, daß ſie in derſelben Ebene APS bleibt, oder die Richtung PS und die Ebene APS ändern mit der AP zugleich ihre Lage. So fern die Veränderungen ſtetig oder unendlich klein gedacht werden, kann in jedem Puncte die eine oder die andere Statt haben. Die Differentialgleichung zwiſchen den vier Winkeln φ, ω, η, ϑ,

muß alſo in zwey Theile zerfallen, die jeder für ſich beſtehen. Sie iſt

$$\frac{\partial\omega}{\operatorname{coſ}\omega^2} = \operatorname{coſ}(\varphi - \eta).\ \operatorname{tang}\vartheta\ (\partial\varphi - \partial\eta)$$
$$+ \sin(\varphi - \eta).\ \frac{\partial\vartheta}{\operatorname{coſ}\vartheta^2}$$

Wenn P S eine berührende iſt, ſo bleiben η und ϑ unverändert. Alsdann iſt $\frac{\partial\omega}{\operatorname{coſ}\omega^2} = \operatorname{coſ}(\varphi - \eta).\operatorname{tang}\vartheta.\partial\varphi$. Das Differentialverhältniß $\partial\omega : \partial\varphi$ wird durch unendlich kleine Veränderungen von η und ϑ nicht geändert, da es, wie jedes Differentialverhältniß bloß durch die zugehörigen endlichen Größen beſtimmt wird. Es beſteht alſo jener Theil der Differentialgleichung für ſich, ſo wie der andere Theil, nämlich

$$\sin(\varphi - \eta).\frac{\partial\vartheta}{\operatorname{coſ}\vartheta^2} = \operatorname{coſ}(\varphi - \eta).\operatorname{tang}\vartheta.\partial\eta.$$

Man dividire jene erſtere Gleichung durch die urſprüngliche, ſo iſt

$$\frac{\partial\omega}{\sin\omega.\operatorname{coſ}\omega} = \cot(\varphi - \eta).\partial\varphi,$$

oder $$\frac{2\partial\omega}{\sin 2\omega} = \frac{\partial\varphi}{\operatorname{tang}(\varphi - \eta)}.$$

Die zweyte Gleichung wird durch eine leichte Abänderung dieſe:

$$\frac{2\partial\vartheta}{\sin 2\vartheta} = \frac{\partial\eta}{\operatorname{tang}(\varphi - \eta)}.$$

In der Aſtronomie iſt φ die Länge, ω die Breite, η die Länge der Knotenlinie, und ϑ die Neigung der Bahn eines Weltkörpers in Beziehung auf eine Ebene durch den Centralkörper A.

39. Man verlege den Anfang der Coordinaten in einen Punct, deſſen Coordinaten in Beziehung auf die zuerſt genommenen Axen ſind, $+a$, $+b$, $+c$, ſetze die neuen Coordinaten $= x'$, y', z', der vorigen parallel,

ſo iſt $x = a + x'$; $y = b + y'$; $z = c + z'$. Dieſe Verlegung iſt in der Aſtronomie brauchbar, wenn man die von der Erde aus beobachteten Örter eines Weltkörpers auf ihre Lage gegen den Mittelpunct der Sonne bringen will. Die Ebenen der Coordinaten können hier ſeyn, die Ebene der Ekliptik, diejenige der Nachtgleichen und des Colurs der Sonnenſtillſtände. Dieſen drey Ebenen lege man drey parallele durch den Mittelpunct der Sonne, und gebrauche die hier angezeigten Subſtitutionen. Durch die drey Coordinaten für den Ort der Erde in Abſicht auf die Sonne ſind die Abſtände, a, b, c, für den Augenblick der Beobachtung bekannt. Durch die beobachtete Länge und Breite werden die Abſtände, x, y, z, vermittelſt der Entfernung u des Körpers von der Erde gegeben, dadurch die x', y', z', in Beziehung auf die Sonne, und aus dieſen wiederum die Entfernungen u' von der Sonne, mit der heliocentriſchen Länge und Breite, alles mittelſt der Entfernungen u von der Erde zur Zeit jeder Beobachtung. Für die Lage der Bahn in jedem Augenblick dient die Gleichung (36.). Iſt jene gar nicht, oder wenig veränderlich, ſo dient ſie bey verſchiedenen Werthen der Abſtände oder Coordinaten die Lage der Bahn zu finden. Zu allem muß man aber noch die bekannten Geſetze elliptiſcher oder paraboliſcher Laufbahnen und ihrer geometriſchen Eigenſchaften nehmen. Man ſehe von dieſer Methode eine Abhandlung von la Grange in dem aſtronom. Jahrbuche für das J. 1783. Berlin 1780.

40. Zur Übertragung der Projectionen von einer Ebene auf eine andere, zur Verwandlung der Gleichungen für krumme Flächen, und beſonders in der höhern Mechanik, iſt es nöthig, die Axen der Coordinaten zu verändern, auf ähnliche Art wie es bey einfach krummen Linien geſchieht. Die Axen der Coordinaten kann man füglich auf einander ſenkrecht ſeyn laſſen. Auch laſſe man ſie zuerſt durch denſelben Anfangspunct der Coordinaten gehen. Verbindet man hernach damit die Verlegung des Anfangspunctes (39.), ſo kann man den unter ſich rechtwinklichten Coordinaten jede beliebige Lage geben. Die

Formeln für die Verlegung der Axen werden am Schluſſe dieſes Artikels eine bequeme Stelle finden, wo durch ſie keine Unterſuchung unterbrochen wird. Sie werden am leichteſten und deutlichſten durch Hülfe der ſphäriſchen Trigonometrie gefunden.

41. Es ſtellt Fig. 73. die Projectionen einiger größten Kreiſe und Kreisbogen ſtereographiſch vor, auf dem Kreiſe BCDE, als der Ebene der Projection, worauf A der Mittelpunct iſt; BD iſt die Axe der x, CE der y, und der in A auf die Ebene der Projection ſenkrechte Durchmeſſer die Axe der z. Die geraden BD, CE ſind die Projectionen zweyer aufeinander und auf den Kreis BCDE ſenkrechten Kreiſe. Der Punct P auf der Kugelfläche ſey durch die geradlinichten Abſtände von den Ebenen dieſer Kreiſe gegeben. Man ziehe durch P die Kreisbogen PM, PN ſenkrecht auf CE, BD, ſo iſt sin PM der Abſtand von der Ebene CE (der y, z); sin PN der Abſtand von der Ebene BD (der x, z). Auch ziehe man den Bogen PA, deſſen Ergänzung zum Quadranten PQ iſt, ſo iſt sin PQ, das iſt cof PA, der Abſtand von der Ebene BCDE (der x, y), wenn der Halbmeſſer = 1 iſt. Es iſt nun

$$x = \sin PM;\quad y = \sin PN;\quad z = \cos PA.$$

42. Anſtatt des Kreiſes BCDE nehme man den Kreis fFHGg zur Ebene der Coordinaten X, Y; ſetze auf dieſen und auf BCDE den Kreis KHAL ſenkrecht, auf welchem Z der Pol von FHG ſey. Durch Z, F, G ziehe man den Kreis FZG, ſo ſtehen die Ebenen der Kreiſe FHG, FZG, HAZ ſenkrecht auf einander. Die Axe der + X gehe durch F, der + Y durch H, der + Z durch Z, und zugleich jede durch den Mittelpunct der Kugel. So ſind die Kreiſe FHG, FZG, HAZ die Ebenen der Coordinaten X, Y; X, Z; Y, Z. Die Axen der X, Y können auch durch andere Puncte des Kreiſes FHG, als F und H, gelegt werden; allein um die Rechnung zu erleichtern geſchieht dieſe Annahme. Aus dieſer können hernach die Formeln für eine andere Lage der X und Y her-

geleitet werden, wobey die Rechnung einfacher wird, weil die Axe der Z alsdann ungeändert bleibt.

Man ziehe von P auf HAZ den ſenkrechten Bogen PX, auf FZG den ſenkrechten Bogen PY, und verbinde P, Z durch den Bogen PZ, welcher verlängert den Kreis FHG in R ſchneide. Nun iſt sin PX der Abſtand des Punctes von der Ebene der Y, Z; ferner PY der Abſtand von der Ebene der X, Z; und sin PR oder coſ PZ der Abſtand von der Ebene der X, Y. Demnach iſt

$$\sin PX = X;\quad \sin PY = Y;\quad \cos PZ = Z.$$

Es ſey der W. BAF $= \eta$; und der Winkel der Ebenen BCDE, FHG $= \vartheta$, ſo iſt der Bogen AZ $= \vartheta$. Dieſer Bogen iſt poſitiv, wenn er, wie in der Figur von A aus nach der Gegend der negativen Y genommen wird, oder wenn die Ebene FHG von K an nach der Gegend der poſitiven Z über der Ebene BCD liegt.

43. Es ſind nun ſo wohl X, Y, Z durch x, y, z, als dieſe durch jene auszudrucken, das Letztere insbeſondere in der Abſicht, jene erſtern in die Gleichung für eine Fläche einführen zu können. Es kommt hier auf die Verbindung des ſchiefwinkligen Dreyecks PAZ mit den rechtwinkligen Dreyecken PMA, PNA, PXZ, PYZ und dieſer unter ſich an.

I. $\cos PA = \cos PZ . \cos AZ + \sin PZ . \sin AZ . \cos AZP.$

$\cos AZP = \sin PZY$, und $\sin PZ . \sin PZY = \sin PY.$

Daraus

$$z = Z . \cos \vartheta + Y . \sin \vartheta.$$

II. $\sin PX = \sin PA \ \sin PAX.$

$\sin PAX = \sin PAM . \cos CAK + \cos PAM . \sin CAK.$

und $\cos PAM = \sin PAN.$

Daher

$$X = x \cos \eta + y \sin \eta.$$

Dieſe Formel iſt der in I. analog. Die Axen x, y, X liegen in einer Ebene, wie die Axen Y, Z, z.

III. $\cos PZ = \cos AP . \cos AZ + \sin AP . \sin AZ . \cos PAZ.$

$\cos PAZ = - \cos PAX.$

$\cos PAX = \cos PAM . \cos CAK - \sin PAM . \sin CAK$,
$Z = z \cos \vartheta + x \sin \eta . \sin \vartheta - y \cos \eta \sin \vartheta$.

Aus dieſen drey, durch Hülfe der Trigonometrie gefundenen, Gleichungen werden die Werthe von Y, z und y durch gehörige Verbindung derſelben hergeleitet. Es iſt aus I. und III, wenn z weggeſchafft wird,

IV. $Y = y \cos \eta . \cos \vartheta - x \sin \eta . \cos \vartheta + z \sin \vartheta$.

Ferner, wenn aus II. und III. y weggeſchafft, und aus I. der Werth von z geſetzt wird.

V. $x = X \cos \eta + Z \sin \eta . \sin \vartheta - Y \sin \eta . \cos \vartheta$.

Auf ähnliche Art, durch Wegſchaffung von x,

VI. $y = Y \cos \eta . \cos \vartheta + X \sin \eta - Z \cos \eta . \sin \vartheta$.

Die Formeln entſtehen paarweiſe aus einander, wenn x, y, z, η, ϑ mit Z, Y, X, ϑ, η vertauſcht werden.

44. In den Dreyecken BAZ, CAZ, worin eine Seite ein Quadrant iſt, iſt $\cos BZ = \sin AZ . \cos BAZ = \sin \vartheta . \sin \eta$; und $\cos CZ = \sin AZ . \cos CAZ = - \sin \vartheta . \cos \eta$, negativ, da CZ größer als ein Quadrant iſt. Eben ſo iſt in den Dreyecken DAH, EAH, worin AH das Complement von AZ zum Quadranten iſt, $\cos DH = \sin AH . \cos DAH = \cos \vartheta . \sin \eta$, und $\cos EH = \sin AH . \cos EAH = - \cos \vartheta . \cos \eta$. Oder wenn man für DH und EH ihre Ergänzungen zum Halbkreiſe, BH und CH, nimmt, $\cos BH = - \cos \vartheta . \sin \eta$; $\cos CH = \cos \vartheta . \cos \eta$. Der Bogen BH iſt, um Verwirrung zu vermeiden, nicht ausgezogen. Auch iſt $\cos \eta = \cos BF$ und $\sin \eta = \cos FC$. Setzt man dieſe Ausdrücke in die Formeln für X, Y, Z, ſo iſt

$$X = x . \cos BF + y . \cos CF + z . \cos AF.$$
$$Y = x \cos BH + y \cos CH + z \cos AH.$$
$$Z = x \cos BZ + y \cos CZ + z \cos AZ.$$

Die Bogen BF, CF, AF gehören zu den Winkeln, welche die Axen der x, y, z nach ihren poſitiven Richtungen mit der Axe der poſitiven X machen. Das Glied, $z \cos AF$, iſt der Gleichförmigkeit wegen zugeſetzt, welches geſchehen durfte, da AF ein Quadrant, alſo $\cos AF = 0$ iſt. Die

Bogen BH, CH, AH gehören auf gleiche Art zu den Winkeln derſelben Axen mit der Axe der + Y, und die Bogen BZ, CZ, AZ zu den Winkeln derſelben mit der Axe der + Z.

45. In der ſphäriſchen Trigonometrie wird gezeigt, daß $\cos AZ^2 + \cos BZ^2 + \cos CZ^2 = 1$ iſt; auch, daß bey jeder Lage zweyer Puncte H, Z, iſt

$$\cos HZ = \cos AH . \cos AZ + \cos BH . \cos BZ + \cos CH . \cos CZ.$$

Nur müſſen die Bogen AB, AC, BC, wie hier, Quadranten ſeyn. Für den gegenwärtigen Fall kann man es aus den vorher gefundenen Werthen der Bogen herleiten. Da die Bogen HZ, FZ, FH Quadranten ſind, ſo ſind ihre Coſinus = o, und es iſt für die drey Paare von Puncten, H und Z; F und Z; F und H,

$$0 = \cos AH . \cos AZ + \cos BH . \cos BZ + \cos CH . \cos CZ.$$

$$0 = \cos AF . \cos AZ + \cos BF . \cos BZ + \cos CF . \cos CZ.$$

$$0 = \cos AF . \cos AH + \cos BF . \cos BH + \cos CF . \cos CH.$$

46. Man verändere nun die Lage der Axen der Coordinaten X, Y, ohne die Lage der Axe der Z, das iſt, die Lage der Ebene FHG zu ändern. Man nehme nämlich auf dem Kreiſe fFGg zwey Puncte, S, T, die um 90 Gr. von einander abſtehen, lege durch ſie und den Pol Z zwey Kreiſe, und laſſe dieſe nebſt dem FHG die drey Ebenen der Coordinaten ſeyn. Die neuen Coordinaten ſeyn p, q, r, und zwar gehe die Axe der p durch S, der q durch T, der r durch Z. Der Bogen FS ſey = ζ. Man ſetze nun in den Formeln (43.)

ſtatt x, y, z, X, Y, Z, η, ϑ,
hier X, Y, Z, p, q, r, ζ, o,

ſo iſt

$$\text{I. } X = p \cos\zeta - q \sin\zeta.$$
$$\text{II. } Y = q \cos\zeta + p \sin\zeta.$$
$$\text{III. } Z = r.$$

Setzt man dieſe Werthe in die Werthe von x, y, z, ſo iſt

$$\text{IV. } x = p\,(\cos\eta.\cos\zeta - \sin\eta.\sin\zeta.\cos\vartheta) - q\,(\cos\eta.\sin\zeta + \sin\eta.\cos\zeta.\cos\vartheta) + r\sin\eta.\sin\vartheta.$$

$$\text{IV. } y = p\,(\sin\eta.\cos\zeta + \cos\eta.\sin\zeta.\cos\vartheta) - q\,(\sin\eta.\sin\zeta - \cos\eta.\cos\zeta.\cos\vartheta) - r\cos\eta.\sin\vartheta.$$

$$\text{V. } z = p\sin\zeta.\sin\vartheta + q\cos\zeta.\sin\vartheta + r\cos\vartheta.$$

Man bemerkt hier leicht die Symmetrie in den Coefficienten von p, q, r. Der Coefficient von p in IV. iſt der Coſinus der einen Seite eines ſchiefwinkligen ſphäriſchen Dreyecks, deſſen zwey andern Seiten die Bogen zu den Winkeln η und ζ ſind, und den Winkel $2R - \vartheta$ einſchließen. Auf ähnliche Art ſind die drey andern zweytheiligen Coefficienten beſchaffen. Auch iſt $\sin\eta.\sin\vartheta$ der Coſinus der Hypotenuſe eines rechtwinkligen ſphäriſchen Dreyecks, deſſen Katheten die Bogen zu den Winkeln $R - \eta$ und $R - \vartheta$ ſind. So auch die drey andern Coefficienten dieſer Art.

Die Formel für y entſteht aus der für x, wenn p, q, r mit $-q$, $-p$, $-r$, und dabey η mit $90° - \eta$; ζ mit $90° - \zeta$ vertauſcht werden. — Die Formel für z entſteht aus der für x, wenn ſtatt p, q, r ihre entgegengeſetzten genommen, $\eta = 90°$, und $90° - \vartheta$ ſtatt ϑ geſetzt werden.

47. In Eulers Analyſis des Unendlichen, Anhang, §. 88—92 ſind dieſe Formeln ohne Hülfe der ſphäriſchen Trigonometrie, durch eigene geometriſche Zuſammenſetzungen gefunden. Zur Vergleichung der Rechnung bemerke man, daß die dortigen x, y, z, t, u, v, p, q, r, ζ, ϑ, η hier ſind x, $-y$, $-z$, X, $-Y$, $-Z$, p, $-q$, $-r$, η, ζ, ϑ. Auch in der Mécanique céleste von la Place (deutſche Überſ. S. 76.) ſind dieſe Formeln entwickelt. Für x, y, z, φ, Ψ, ϑ daſelbſt ſtehen hier $-p$, $-q$, $-r$, $2R - \eta$, ζ, ϑ.

48. Zu den Werthen von x, y, z in (46.) kann

man noch drey beliebige Conſtanten, als f, g, h, als Coordinaten zu einem andern Anfangspuncte, zufügen, ſo daß in allem ſechs Größen, drey Winkel und drey Linien, zur Veränderung der Axen angenommen werden können. Um den Coefficienten einer Gleichung für drey veränderliche Größen beſtimmte Werthe zu geben, beſonders ſie wegzuſchaffen, iſt dieſes nützlich. Doch müſſen die Werthe der Sinus und Coſinus eigentliche Brüche werden.

Krumme Fläche iſt eine ſolche, auf welcher nicht zwiſchen irgend zwey Puncten eine gerade Linie gezogen werden kann, die ganz in die Fläche falle. Auf den cylindriſchen und koniſchen Flächen, welche durch die Drehung einer geraden Linie beſchrieben werden, fällt dieſe erzeugende gerade Linie zwar ganz in die krumme Fläche, aber zwiſchen je zwey Puncten, die nicht auf jener liegen, iſt auch auf ſolchen Flächen keine gerade Linie zu ziehen möglich. So auch auf andern krummen Flächen, die durch Bewegungen einer geraden Linie erzeugt werden.

Euler erklärt (Introd. in Anal. Inf. T. II. App. Cap. 1.) die krumme Fläche für diejenige, auf welcher nicht irgend vier Puncte in derſelben Ebene liegen. Dieſes iſt zweydeutig. Denn auf dem Durchſchnitte einer krummen Fläche mit einer Ebene liegen alle beiden gemeinſchaftlichen Puncte in derſelben Ebene. Was E. hier zugleich von der ebenen Oberfläche bemerkt, daß ſie diejenige ſey, auf welcher irgend vier Puncte in derſelben Ebene liegen, möchte eine Erklärung durch gleiche Ausdrücke ſeyn.

1. Die Beſchaffenheit einer krummen Fläche wird zunächſt aus ihrer Entſtehungsart erkannt, wobey man entweder, wenn es thunlich iſt, bloß geometriſche Hülfsmittel gebraucht, oder ſich der allgemeinen analytiſchen Rechnung bedient, durch Anwendung einer ähnlichen Methode, wie bey krummen Linien, beſonders denen mit doppelter Krümmung. Man kann auch von den Gleichungen zwiſchen den Coordinaten ausgehen, und daraus die Ge-

Digitized by Google

ſtalt und die Eigenſchaften der krummen Fläche herleiten, eben ſo wie bey krummen Linien. — Die Unterſuchungen über die Beſchaffenheit der krummen Fläche betreffen ferner die berührenden Ebenen, die Normalen, die Krümmung, die Durchſchnitte einer krummen Fläche mit einer Ebene oder einer andern krummen Fläche; dann auch noch die Complanationen, Cubirungen und Abwickelungen.

2. Die analytiſche Behandlung verfährt eben ſo mit den krummen Flächen als mit den krummen Linien von gedoppelter Krümmung. Drey Ebenen werden ſenkrecht auf einander geſetzt; ihre drey Durchſchnittslinien ſind die Axen der drey Folgen von Coordinaten; ihr gemeinſchaftlicher Durchſchnittspunct iſt der Anfang der Coordinaten. Dieſe ſind die Abſtände irgend eines Punctes der krummen Fläche von jeder der drey Coordinaten-Ebenen. Die Natur der krummen Fläche wird ausgedruckt durch eine Gleichung zwiſchen allen drey Coordinaten, x, y, z. In dieſer kann man zwey nach Belieben annehmen, ſo fern man dadurch nicht über die Gränze der körperlichen Oberfläche hinausgeht, und die dritte ergiebt ſich durch die Auflöſung der Gleichung. Wird eine der Ordinaten beſtimmt, z.B. z, ſo iſt die Gleichung zwiſchen den veränderlichen x und y, die Gleichung für den Schnitt der Fläche durch eine Ebene, die mit der Ebene der x und y in dem Abſtande z parallel gelegt wird. Die Curven, welche durch die parallelen Schnitte gebildet werden, ſind alle von gleicher Natur, weil ihre Gleichungen nur durch die Größe einer gegebenen Linie, des Abſtandes von der Coordinaten-Ebene, ſich unterſcheiden.

Darſtellung der Ebenen durch Gleichungen.

3. Zum beſſern Verſtändniß dieſer Methode für krumme Flächen iſt es dienlich, ſie auf ebene Flächen anzuwenden, welche in dem Artikel, Ebene, bloß rein geometriſch betrachtet wird. Hier laſſen ſich beide Arten von Flächen bequem zuſammen abhandeln. Die Sätze für die Ebenen finden hier unmittelbar ihre Anwendung. Man vergleiche mit dieſem Artikel den Art. Linie.

4. Die Ebene der AM, MN (x, y)(Fig. 71.) werde von einer Ebene in der Linie BB geſchnitten. Die Durchſchnittslinie mache mit AX, der Axe der x, den ſpitzen Winkel ACB oder $MCO = \eta$. Sie ſey gegen jene unter dem Winkel ϑ geneigt. Ein Punct derſelben ſey P. Von dieſem werde auf die Ebene (x, y) die ſenkrechte PN gelaſſen. Man ziehe NO ſenkrecht auf BB, und verbinde PO. Die Ebene PON ſteht ſenkrecht auf die Ebene der x, y (Ebene, 21.), und BB iſt ſenkrecht auf PON (daſ. 25.); alſo iſt PON der Neigungswinkel ϑ. Dieſer iſt für alle Puncte P unveränderlich, als welches der Charakter der Ebene iſt. Es ſeyn die rechtwinklichten Coordinaten, $AM = x$; $MN = y$; $NP = z$; ſo iſt $NO = \frac{z}{\tang \vartheta}$; ferner $NQ = \frac{NO}{\sin NQO} = \frac{z}{\cos \eta . \tang \vartheta}$. Noch ſey $AC = h$, ſo iſt $CM = x - h$, und $MQ = (x - h) \tang \eta$; alſo $MN = y = (x - h) \tang \eta + \frac{z}{\cos \eta . \tang \vartheta}$. Folglich iſt die Gleichung für die Ebene,

$$x . \sin \eta - y . \cos \eta + z . \cot \vartheta - h . \sin \eta = 0.$$

Dieſe Gleichung iſt vom erſten Grade, eben ſo wie eine Gleichung für eine gerade Linie.

5. Die Gleichung für eine Ebene mit irgend welchen Coefficienten ſey

$$Ax - By + Cz - D = 0.$$

Die Coefficienten dieſer Gleichung ſind denen der Gleichung (4.) proportional. Dadurch ergeben ſich die Functionen von η und ϑ, nebſt h. Oder man dividire beide Gleichungen durch einen der gleichnamigen Coefficienten, ſo kann man die Coefficienten gerade zu gleich ſetzen. Es iſt alſo $\tang \eta = \frac{A}{B}$; $\sin \eta = \frac{A}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$; $\cos \eta = \frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$. Der Sinus von η bleibt poſitiv,

weil η immer einen Winkel unter zwey rechten bedeutet; aber coſ η wird negativ für ungleichnamige A und B, das iſt, für gleichnamige Coefficienten von x und y.

Ferner iſt $\frac{\cot\vartheta}{\sin\eta} = \frac{C}{A}$, und $\tang\vartheta = \frac{\sqrt{(AA+BB)}}{C}$;

oder $\cos\vartheta = \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$. Drittens iſt $h = \frac{D}{A}$.

Einer der Coefficienten iſt willkürlich, da es bey der Beſtimmung der Winkel und der Länge h nur auf Verhältniſſe ankommt. Auch wird eine Ebene durch drey Puncte beſtimmt. Dieſes giebt nur drey Gleichungen zur Beſtimmung der Coefficienten.

Zu bemerken iſt noch, daß die poſitive Beſchaffenheit der Winkel und der Linie h eine Lage wie in der Figur anzeigt. Die mit BB durch A parallele geht zwiſchen den Axen der gleichnamigen Coordinaten, x, y, durch; die mit NO, der Richtung der Neigungs Ebene, durch A parallele liegt zwiſchen den Axen der ungleichnamigen Coordinaten x, y. Dabey ſind η und ϑ ſpitze Winkel. — Die Vorzeichen der Coefficienten ſind ſo angenommen, daß die abſoluten Werthe von A, B, C zu ſpitzen Winkeln η, ϑ gehören, ſo wie auch $\frac{D}{A}$ ein poſitives h giebt.

6. Der Winkel der Ebene mit der Ebene der x, z ſey $= \vartheta'$, und der Winkel derſelben mit der Ebene der y, z ſey ϑ'', ſo iſt, auf gleiche Weiſe, wie $\cos\vartheta$ $= \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$ iſt, auch

$$\cos\vartheta' = \frac{-B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}};\ \cos\vartheta'' = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}.$$

Folglich iſt

$$(\cos\vartheta)^2 + (\cos\vartheta')^2 + (\cos\vartheta'')^2 = 1.$$

Der Satz läßt ſich auch ſehr leicht daher erweiſen, weil das Quadrat des Abſtandes irgend eines Punctes von dem Anfange der drey rechtwinklichten Coordinaten gleich iſt

der Summe von den Quadraten der Abſtände deſſelben Punctes von den drey Coordinaten-Ebenen.

7. Da eine Ebene durch drey Puncte beſtimmt wird, ſo iſt ihre Gleichung durch drey Folgen von Coordinaten gegeben. Dieſe ſeyn x, x', x''; y, y', y''; z, z', z'', ihre erſten und zweyten Unterſchiede Δx, $\Delta^2 x$; Δy, $\Delta^2 y$; Δz, $\Delta^2 z$, d. i. $\Delta x = x' - x$; $\Delta^2 x = x'' - x' - (x' - x)$, und ſo bey den andern Unterſchieden). Es iſt, wie in dem vorherg. Art. 22.

$$\Delta x . \sin \eta - \Delta y . \cos \eta + \Delta z . \cot \vartheta = 0.$$

$$\Delta^2 x . \sin \eta - \Delta^2 y . \cos \eta + \Delta^2 z . \cot \vartheta = 0.$$

$$\tang \eta = \frac{\Delta y . \Delta^2 z - \Delta z \, \Delta^2 y}{\Delta x . \Delta^2 z - \Delta z . \Delta^2 x}.$$

Aus einer jener beiden Gleichungen wird nun $\cot \vartheta$ oder $\tang \vartheta$ gefunden, und dann noch aus den Gleichungen zwiſchen x, y, z in (4.) ſelbſt der Abſtand h.

8. Alle Ebenen, deren Gleichungen in den Coefficienten von x, y, x übereinſtimmen, ſind ſich parallel, und umgekehrt. Das gegebene Glied beſtimmt nur den Punct, in welchem die Ebene eine der Axen trifft.

9. Einer Ebene eine andere durch einen gegebenen Punct parallel zu legen, muß nur das unveränderliche Glied aus den zu dem gegebenen Puncte gehörigen Coordinaten beſtimmt werden. Dieſe ſeyn p, q, r; das unveränderliche Glied in der Gleichung für die verlangte Ebene ſey $= D'$, ſo iſt $Ap - Bq + Cr - D' = 0$, wenn die Gleichung für die gegebene iſt

$$Ax - By + Cz - D = 0.$$

Für die parallel gelegte iſt die Gleichung

$$Ax - By + Cz - D' = 0,$$

oder $A(x-p) - B(y-q) + C(z-r) = 0.$

10. Setzt man in der Gleichung,

$$Ax - By + Cz - D = 0,$$

die Ordinate $z = 0$, ſo iſt die Gleichung,

$$Ax - By - D = 0,$$

die Gleichung für den Durchſchnitt der Ebene mit der

Ebene der x, y, und es iſt $\frac{A}{B}$ die Tangente des Durchſchnittswinkels mit der Axe der x nach der Gegend der gleichnamigen Coordinaten, da der Abſtand des Durchſchnittspunctes von dem Anfange der Abſciſſen $= \frac{D}{A}$ iſt. Auf ähnliche Art entſtehen, wenn $x = o$, oder $y = o$ geſetzt wird, Gleichungen für die Durchſchnitte mit der Ebene der y, z, oder x, z.

11. Zwey Ebenen ſeyn durch die Gleichungen,

$$\text{I. } Ax - By + Cz - D = o,$$

$$\text{II. } A'x - B'y + C'z - D' = o,$$

gegeben, ſo iſt die Gleichung für die Projection ihrer Durchſchnittelinie auf die Ebene der x, y dieſe,

$$(AC' - A'C)x - (BC' - B'C)y - D + D' = o.$$

In der Durchſchnittslinie haben nämlich beide Ebenen dieſelben Ordinaten z. Durch Elimination derſelben wird nun die Gleichung zwiſchen denjenigen x und y erhalten, die zu dieſen gemeinſchaftlichen z gehören.

Die Gleichung für die Projectionen auf die Ebene der x, z oder der y, z wird erhalten, wenn y, oder wenn x weggeſchafft wird.

12. Den gemeinſchaftlichen Punct dreyer ſich ſchneidenden Ebenen zu finden, ſetze man in ihre Gleichungen die unbekannten Coordinaten dieſes Punctes, p, q, r, ſo erhält man drey Gleichungen vom erſten Grade für dieſe drey Größen, aus welchen die drey unbekannten p, q, r gefunden werden, (Elimination, 6.).

13. Durch die ſphäriſche Trigonometrie läßt ſich die Aufgabe (11.) auch auflöſen. Es wird ein ſphäriſches Dreyeck durch eine Seite und zwey anliegende Winkel gegeben. Daraus wird durch eine der trigonometriſchen Proportionen und ein paar Hülfsſätze der Goniometrie die Lage und Größe des auf jene Seite ſenkrechten Bogens gefunden.

Von der Lage gerader Linien gegen Ebenen, und dem

Winkel zweyer durch ihre Gleichungen beſtimmten Ebenen, ſ. den Artikel, Linie.

14. Iſt eine Gleichung für eine Oberfläche durch die rechtwinklichten Coordinaten, x, y, z, gegeben, und verlangt man die Figur des Schnittes durch eine gegebene Ebene, ſo verbinde man die Gleichungen für die Oberfläche und die Ebene mit einander, um daraus eine Gleichung für zwey der drey, x, y, z, zu erhalten, alſo die Projection des Schnittes.

15. Es ſeyn nun AM, MN, NP (Fig. 71.) die gemeinſchaftlichen Coordinaten einer Oberfläche und einer Ebene in dem Puncte P des Schnittes. Die Gleichung für die Ebene iſt die in (5.) geſetzte, mit den daraus beſtimmten Winkeln η, ϑ, und dem Abſtande h. Es iſt

$$QO = NO.\,\text{tang}\,QNO = \frac{z.\,\text{tang}\,\eta}{\text{tang}\,\vartheta},\ \text{und}\ CQ = \frac{CM}{\text{coſ}\,\eta} = \frac{x-h}{\text{coſ}\,\eta},\ \text{alſo}\ CO = \frac{z.\,\text{tang}\,\eta}{\text{tang}\,\vartheta} + \frac{x-h}{\text{coſ}\,\eta}.$$

Man nehme CO und OP zu Coordinaten an dem Schnitte in der Ebene BCOPOB, und ſetze CO = t, PO = u, ſo ſind nun x, y, z durch t und u auszudrucken. Zuerſt iſt

$$z = u\sin\vartheta.$$

Ferner iſt $t = \frac{z.\,\text{tang}\,\eta}{\text{tang}\,\vartheta} + \frac{x-h}{\text{coſ}\,\eta}$; alſo iſt

$$x = t\,\text{coſ}\,\eta - u\sin\eta.\,\text{coſ}\,\vartheta + h.$$

Drittens, da $y = (x-h).\,\text{tang}\,\eta + \frac{z}{\text{coſ}\,\eta.\,\text{tang}\,\vartheta}$ iſt, (4.), ſo iſt

$$y = t.\sin\eta + u.\,\text{coſ}\,\eta.\,\text{coſ}\,\vartheta.$$

16. Hieraus erhellt, daß der Schnitt eine Gleichung von demſelben Grade erhält, auf welchen die Gleichung für die Fläche ſteigt. Iſt die letztere vom zweyten Grade, das iſt, wenn die höchſte Anzahl der Dimenſionen nach den unveränderlichen Größen der Gleichung zwey iſt, ſo iſt der Schnitt eine Linie des zweyten Grades oder ein Kegelſchnitt.

17. Die Fläche, welche von einer Ebene geſchnitten wird, ſey ſelbſt eine Ebene, deren Gleichung iſt, $ax - by + cz - d = o$. Sie ſey gegen die Ebene der x, y unter dem Winkel ϑ' geneigt, und ihre Durchſchnittslinie ſchneide die Axe der x unter dem Winkel η', in dem Abſtande h' von dem Anfangspuncte. Für die ſchneidende Ebene gehören die Winkel η, ϑ, und der Abſtand h. Die Gleichung für die Durchſchnittslinie beider Ebenen auf der jene ſchneidenden iſt aus (15.)

$$(a.\cos\eta - b.\sin\eta)t - (a.\sin\eta.\cos\vartheta + b.\cos\eta.\cos\vartheta - c.\sin\vartheta)u + ah - d = o.$$

Da a, b, c, d ſich verhalten wie $\sin\eta'$, $\cos\eta'$, $\cot\vartheta'$, $h'.\sin\eta'$, ſo kann man dieſe Größen für jene ſubſtituiren, und es iſt dadurch

$$(\sin\eta'.\cos\eta - \cos\eta'.\sin\eta)t$$
$$-(\sin\eta'.\sin\eta.\cos\vartheta + \cos\eta'.\cos\eta.\cos\vartheta - \cot.\vartheta'.\sin\vartheta)u$$
$$+ h.\sin\eta' - h'\sin\eta' = o, \text{ das iſt}$$
$$\sin(\eta' - \eta)t - (\cos(\eta' - \eta)\cos\vartheta - \cot\vartheta'.\sin\vartheta)u$$
$$+ (h - h')\sin\eta' = o.$$

Hieraus ergiebt ſich die Ordinate in dem Anfangspuncte der Abſciſſen t, (nämlich in C), und der Punct, wo die Durchſchnittslinie beider Ebenen die BB trifft. Die Gleichung für die Projection der Durchſchnittslinie iſt in (11.) gefunden.

18. Durch die ſphäriſche Trigonometrie wird dieſe Aufgabe bequem aufgelöſet. Denn durch die Neigung zweyer Ebenen gegen eine dritte, die Grundebene, und durch die Winkel ihrer Durchſchnittslinien auf dieſer werden in einem ſphäriſchen Dreyeck zwey Winkel und die eingeſchloſſene Seite gegeben, daher die Lage der Durchſchnittslinie beider Ebenen ſelbſt, und die Winkel dieſer Linie mit den Durchſchnittslinien beider Ebenen und der Grundebene durch trigonometriſche Formeln gefunden werden.

Gleichungen für krumme Flächen aus ihrer Entſtehungsart hergeleitet.

19. Durch Bewegungen von Linien, geraden oder krummen, werden krumme Flächen erzeugt. Da dieſe häufig vorkommen, ſo iſt es nöthig, die Gleichungen für ſie zu ſuchen, um ſie daran gleich erkennen zu können.

Cylindriſche Flächen.

20. Auf einer Ebene ſey eine krummlinichte Figur beſchrieben, eine geſchloſſene oder nicht geſchloſſene. An dieſer bewege ſich eine gerade Linie, einer gegebenen geraden beſtändig parallel, ſo beſchreibt ſie eine cylindriſche Oberfläche. Iſt die Figur der Grundfläche nicht geſchloſſen, ſo mag man zwey Endpuncte durch eine gerade verbinden, und die ganze Fläche wird dann auf einer Seite durch einen ebenen Theil begränzt. Iſt die Figur in der Grundfläche ein Kreis, ſo iſt die Fläche eine cylindriſche im eigentlichen Verſtande. Die verſchiedenen Arten der cylindriſchen Oberfläche laſſen ſich durch einen von der Grundfläche hergenommenen Zuſatz unterſcheiden: circular-cylindriſche, elliptiſch-(paraboliſch, hyperboliſch-) cylindriſche, u. dgl.

21. Eine cylindriſche Fläche entſteht auch durch die Einwickelung einer andern krummen Fläche, wenn an dieſe nach parallelen Richtungen berührende in ſtetiger Folge gezogen werden. Die Berührungspuncte können eine gedoppelt krumme Linie bilden.

22. Eine charakteriſtiſche Eigenſchaft der cylindriſchen Oberflächen iſt, daß die Schnitte, die der Grundfläche parallel geführt werden, ihr gleich ſind.

23. Es ſey FUG (Fig. 74.) ein Bogen der Figur der Grundfläche, U ein Punct derſelben, UP eine gerade auf der cylindriſchen Fläche; A der Anfangspunct der Abſciſſen für die Figur und die Oberfläche; $AT = t$, und $TU = u$ ſeyn Coordinaten an der Figur der Grundfläche; AM, MN, NP (x, y, z) ſeyn Coordinaten an der cylindriſchen Fläche, jene wie dieſe rechtwinklichte. Die PU und jede ihr parallele ſeyn gegen die Ebene der x, y

unter dem Winkel PUN = ϑ geneigt; ihre Neigungsebene, wie PUN, ſchneide die Axe der x unter dem unveränderlichen Winkel ASN = η. Es iſt

$$u + y = (t + x) . \operatorname{tang} \eta.$$

Da ferner $NU = \frac{t + x}{\operatorname{coſ} \eta}$ iſt, ſo iſt

$$z = \frac{t + x}{\operatorname{coſ} \eta} . \operatorname{tang} \vartheta.$$

Die Ordinate u iſt eine Function der Abſciſſe t (oder t von u). Setzt man in jenen beiden Gleichungen für die Ordinate u ihren Werth durch die Abſciſſe t, oder umgekehrt, und ſchafft t (oder u) heraus, ſo erhält man die Gleichung für die cylindriſche Oberfläche.

Da u eine Function von t iſt, ſo bezeichne man dieſe durch φt; und die beiden allgemeinen Gleichungen für eine cylindriſche Fläche haben die Form

$$y + \varphi t = mz; \quad x + t = nz,$$

wo $m = \frac{\sin \eta}{\operatorname{tang} \vartheta}$; $n = \frac{\operatorname{coſ} \eta}{\operatorname{tang} \vartheta}$ ſind.

24. Exempel. Die Grundfläche ſey eine Ellipſe, deren Mittelpunct A iſt. Die Gleichung für dieſelbe ſey

$$a^2 u^2 + b^2 t^2 - a^2 b^2 = o.$$

Man ſetze für u und t ihre Werthe, $u = mz - y$; $t = nz - x$, ſo erhält man die Gleichung für die elliptiſch-cylindriſche Fläche, den Anfangspunct der Coordinaten in ihren Mittelpunct geſetzt,

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 + (m^2 a^2 + n^2 b^2) z^2$$
$$- 2n b^2 xz - 2m a^2 yz - a^2 b^2 = o.$$

25. Wenn der Punct N in dem Umfange der Grundfigur genommen wird, ſo iſt für die Coordinaten x, y die Gleichung,

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = o,$$

und es bleibt die Gleichung,

$$(m^2 a^2 + n^2 b^2) z = 2n b^2 x + 2m a^2 y.$$

In dieſem Falle nämlich iſt

$$a^2 (y^2 - u^2) + b^2 (x^2 - t^2) = o,$$

oder

$$a^2(y+u)(y-u) + b^2(x+t)(x-t) = o.$$

Da $y+u = mz$; $x+t = nz$; $y-u = 2y - mz$; $x-t = 2x - nz$, ſo folgt hieraus eben dieſelbe Gleichung. — Die Ordinate z trifft die Fläche in zwey Puncten. In dem gegenwärtigen Falle iſt der eine Punct in der Ebene der x, z ſelbſt, daher für dieſen $z = o$ iſt.

Iſt die Seite der cylindriſchen Fläche ſenkrecht auf die Ebene der x, y, ſo iſt tang ϑ unendlich groß, daher $m = o$, $n = o$, und z bleibt unbeſtimmt.

Koniſche Flächen.

26. Es ſey wie vorher in einer Ebene eine krummlinichte Figur beſchrieben. An dieſer bewege ſich eine gerade, die durch einen fixen Punct gelegt iſt, ſo beſchreibt dieſelbe eine koniſche Fläche, welche, wenn die Figur der Grundfläche ein Kreis iſt, die Fläche des Kegels in der Elementar-Geometrie iſt.

Wie bey der cylindriſchen Fläche entſteht auch eine Kegelfläche durch eine ſtetige Folge berührender geraden an einer andern krummen Fläche, wenn dieſelben immer durch einen fixen Punct gehen.

27. Es iſt P (Fig. 75.) ein Punct der koniſchen Fläche, D der Scheitelpunct, AM, AN, AP(x, y, z) ſind die Coordinaten zu dem Puncte P; AB, BC, CD (a, b, c) die Coordinaten zu dem Scheitelpuncte D. Ferner ſey U ein Punct der Grundfigur, AT = t, und Tu = u ſeyn die zu dieſem Puncte gehörigen Coordinaten. Die Neigung der PU und der Winkel der Neigungsebene PUN mit der Axe der x ſind veränderlich, nur daß jene bey einer Kreisfigur und ſenkrechter Axe eines Kegels dieſelbe bleibt.

Die Neigungsebene PUN ſchneide die AM in S. Es iſt CD : NP = CU : NU = BT : MT, das iſt

$$c : z = a + t : x + t,$$

oder $c - z : z = a - x : x + t$,

und $x + t = \frac{a - x}{c - z}\, z.$

Gleichfalls iſt CD : NP = CU : NU = BC + TU : MN + TU, das iſt

$$c : z = b + u : y + u,$$

oder $c - z : z = b - y : y + u,$

und $y + u = \frac{b-y}{c-y} z.$

28. Da u eine Function von t, oder $= \varphi t$ iſt, ſo ſind die beiden allgemeinen Gleichungen für die koniſche Fläche:

$$x + t = \frac{a-x}{c-z} z;$$

$$y + \varphi t = \frac{b-y}{c-z} z.$$

29. Hieraus iſt

$$t = \frac{az - cx}{c-z};\quad u = \frac{bz - cy}{c-z}.$$

Setzt man dieſe Werthe in die Gleichung zwiſchen t und u, ſo erhält man die Gleichung für die koniſche Fläche.

30. Exempel. Die Grundfläche ſey ein Kreis, deſſen Halbmeſſer = r iſt. Die Gleichung für den Kreis iſt $t^2 + u^2 = r^2$, daher die Gleichung für die Kegelfläche,

$$(az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = (c - z)^2 r^2.$$

31. Es ſeyn die veränderlichen Winkel MSN = η; PUN = ϑ, ſo iſt $x + t = NU.\cos\eta = z.\cot\vartheta.\cos\eta$, und $y + u = NU.\sin\eta = z.\cot\vartheta.\sin\eta$. Daher iſt

$$\frac{a-x}{c-z} = \cot\vartheta.\cos\eta;\quad \frac{b-y}{c-z} = \cot\vartheta.\sin\eta.$$

Alſo iſt $\frac{a-x}{c-z} : \frac{b-y}{c-z} = \cos\eta : \sin\eta = 1 : \tan\eta.$

Das Verhältniß der beiden Bruchgrößen iſt nach einem Geſetze veränderlich, welches von einer gegebenen Relation zwiſchen t und u, und von der Lage des Scheitelpunctes der koniſchen Fläche abhängt; das iſt, die eine Bruchgröße iſt eine Function der andern. Denn wenn eine ver-

änderliche Größe irgend eine Function einer andern veränderlichen iſt, ſo iſt ihr Verhältniß nach einem beſtimmten Geſetze veränderlich. Dieſes druckt man ſo aus: es iſt $\frac{a-x}{c-z} = \varphi \frac{b-y}{c-z}$, oder auch $\frac{b-y}{c-z} = \varphi \frac{a-x}{c-z}$, wo φ die Beſchaffenheit der Function anzeigt.

32. Man nehme den Scheitelpunct zum Anfang der Coordinaten, und laſſe die Ebenen derſelben den vorigen parallel ſeyn. Die Abſtände des Punctes P von den drey Ebenen ſind nun $a-x$; $b-y$; $c-z$. Wenn man nämlich in der Ebene der Grundfigur durch C, wo die ſenkrechte DC ſie trifft, EE parallel mit AM zieht, ſo ſind die drey neuen Ebenen, die BCD, die DCE und die hier nicht erſcheinende, durch D mit ABC parallele. Der Abſtand eines Punctes P von der erſtern iſt $a-x$; von der zweyten $b-y$; von der dritten $c-z$. Man nenne die neuen Coordinaten x', y', z', ſo iſt $x = a - x'$; $y = b - y'$; $z = c - z'$. Setzt man dieſe in die Werthe von t und u (28.), ſo iſt

$$t = \frac{cx' - az'}{z'}; \quad u = \frac{cy' - bz'}{z'}.$$

Oder, wenn man nun wieder die ungeſtrichelten Buchſtaben gebraucht,

$$t = \frac{cx - az}{z}; \quad u = \frac{cy - bz}{z}.$$

33. Setzt man dieſe Werthe in die Gleichung zwiſchen t und u, ſo entſteht eine homogene Gleichung zwiſchen x, y, z, das iſt, eine ſolche, worin alle Glieder gleich viele Dimenſionen nach x, y, z haben. Denn durch dieſe Subſtitutionen haben alle Glieder gar keine Dimenſion in Abſicht auf die veränderlichen Größen. Die höchſten Glieder der Gleichung zwiſchen t und u ſeyn von dem Grade m, oder enthalten m Factoren t oder u allein, oder von beiden. Durch die Subſtitution ihrer Werthe bekommen dieſe im Nenner die Potenz z^m; die nächſtfolgenden die Potenz z^{m-1}, u. ſ. f. dagegen in den Zählern

die Anzahl der Dimenſionen iſt m, m — 1, etc. Multiplicirt man alle Glieder durch z^m, ſo wird in dem höchſten Theile keine Dimenſion zugeſetzt; in dem zweyten eine, welche an m fehlt; in dem dritten werden zwey zugefügt, welche an m — 2 fehlen, u. ſ. f. Daher bekommen alle Glieder m Dimenſionen.

Dieſes iſt eine charakteriſtiſche Eigenſchaft der koniſchen Flächen, wenn die Coordinaten vom Scheitelpuncte aus genommen werden.

34. Die Gleichung für eine koniſche Fläche läßt ſich noch auf eine andere Art finden. Es ſey A (Fig. 76.) der Scheitelpunct, BQRB ein Theil der Grundfigur, in welcher BQ die Abſciſſe, QR die zugehörige ſenkrechte Ordinate, BR ein Bogen des Umfanges iſt. Die Ebene BQR ſtehe ſenkrecht auf die ABQ, und die Abſciſſe BQ mache mit der AB einen ſpitzen Winkel ABQ = α. Auf der Linie AR, von A nach einem Puncte des Umfanges R, nehme man einen Punct P, ziehe von demſelben die ſenkrechte PN auf AQ, und von N die ſenkrechte AM auf AB. Die PN ſteht wie RQ ſenkrecht auf die Ebene ABQ, alſo auf MN, und AM, MN, NP (x, y, z) ſind rechtwinklichte Coordinaten an die koniſche Fläche in P. Man ſetze AB = h; BQ = t; QR = u. Von Q ziehe man QS ſenkrecht auf AB, ſo iſt QS = t sin α; BS = t coſ α. Nun iſt x : y = h — t coſ α : t sin α. Auch iſt y : z = t sin α : u. Hieraus iſt

$$t = \frac{hy}{x \sin\alpha + y \cos\alpha};$$

$$u = \frac{hz \sin\alpha}{x \sin\alpha + y \cos\alpha}.$$

Die Coordinaten x, y, z haben hier andere Bedeutungen und andere Lagen gegen die Coordinaten t, u der Grundfigur als vorher. Aber die Werthe von t und u ſind eben ſo wie vorher Größen von keiner Dimenſion. Setzt man dieſelben in die Gleichung zwiſchen t und u, ſo iſt,

nach weggeſchafften Nennern der Glieder, die Gleichung zwiſchen x, y, z eine homogene.

Dieſes Verfahren iſt von Clairaut in ſeinen Recherches sur les courbes à double courbure, Art. 27. Er gebraucht anſtatt der trigonometriſchen Größen die Verhältnißzahlen m, n, welches die Rechnung weniger deutlich macht, da er nicht zugleich $m^2 + n^2 = 1$ annimmt.

35. Exempel. Die Grundfigur ſey ein Kreis, deſſen Gleichung iſt $2at - tt = uu$, ſo iſt die Gleichung für die Kegelfläche,

$$(2a\cos\alpha - h)\, y^2 + 2a\sin\alpha . xy = h \sin\alpha^2 . z^2.$$

Hier iſt die Axe der x eine Seitenlinie des Kegels.

Nimmt man die Axe des Kegels zur Axe der x (da bloß in dem Falle der Figur die Curve der Grundfläche durch den Punct B der Axe der x gelegt iſt), ſo iſt $tt + uu = aa$, und die Gleichung für die Kegelfläche, wenn die Axe des Kegels zur Axe der x genommen wird, iſt

$$a^2 \sin\alpha^2 . x^2 + (a^2 \cos\alpha^2 - h^2)\, y^2 + a^2 \sin 2\alpha . xy = h^2 \sin\alpha^2 . z^2.$$

Für den ſenkrechten Kegel iſt die Gleichung,

$$a^2 x^2 = h^2 y^2 + h^2 z^2.$$

36. Die Gleichungen in (35.) ſind Kegelſchnitte, worin für jedes gegebene x die Coordinaten y und z ſind. Zur Abkürzung ſetze man $\sin\alpha = m$; $\cos\alpha = n$, ſo iſt die erſtere Gleichung,

$$2maxy - (h - 2na)\, y^2 = m^2 hz^2.$$

Dieſes iſt eine Gleichung für eine Ellipſe, wenn h größer als 2na, eine Hyperbel, wenn h kleiner als 2na, und eine Parabel, wenn $h = 2na$ iſt.

Denn es ſey A die große Axe einer Ellipſe, oder die Hauptaxe einer Hyperbel, und B der Parameter, ſo iſt die Gleichung für die Ellipſe, wenn die Abſciſſen y vom Scheitel an genommen werden, $By - \frac{B}{A} yy = zz$,

und für die Hyperbel, $By + \frac{B}{A} yy = zz$. (Ellipſe, 7; und Hyperbel, 3.). Für die Parabel iſt A unendlich groß, daher die Gleichung für dieſelbe iſt $By = zz$.

Vergleicht man dieſe Gleichungen mit der für den Schnitt, ſo iſt $B = \frac{2ax}{mh}$; $\frac{B}{A} = \pm \frac{h - 2na}{mmh}$; alſo $A = \frac{2max}{h - 2na}$.

Iſt $h - 2na = m^2 h$, ſo iſt $B = A$, und der Schnitt ein Kreis, deſſen Durchmeſſer $= \frac{2ax}{mh}$. Dieſer iſt der Wechſelſchnitt, oder die sectio ſubcontraria. Da $1 - m^2 = n^2$ iſt, ſo iſt in dieſem Falle $nh = 2a$. Dieſes findet Statt, wenn die gerade von A nach dem Endpuncte des durch B gezogenen Durchmeſſers auf denſelben ſenkrecht iſt. S. Kegel, 9.

In der zweyten Gleichung (35.) iſt der Anfang der Abſciſſen y auf einem Puncte der Axe außerhalb des Scheitels und des Mittelpuncts. Man erhält eine Gleichung von dieſer Form, wenn in den Gleichungen $By \mp \frac{B}{A} yy = zz$ für y geſetzt wird $y + b$. Die Axe des Kegels halbirt die Axe des Schnittes nicht, wenn dieſer nicht mit der Grundfläche parallel iſt.

36. Man ziehe NL parallel mit QB, ſo iſt der Schnitt des Körpers durch PNL parallel mit der Grundfigur (Ebene, 18.). Da $LN : NP = BQ : QR$ iſt, ſo iſt der Schnitt durch PNL der Grundfigur ähnlich. In dem Schnitte durch PNM hingegen iſt MN der SQ proportional.

Sucht man die Gleichung für den Schnitt PNL, der mit BQR parallel iſt, ſo ſetze man für denſelben $AL = x'$, $LN = y'$, da $PN = z$ bleibt. Es iſt $y = my'$; $x' = x' - ny'$. Dieſe Werthe ſetze man in die Gleichung für den Schnitt durch MNP, ſo iſt

$$\frac{2ax'}{h}y' - y'y' = zz,$$

eine Gleichung für einen Kreis, deſſen Durchmeſſer $= \frac{2ax'}{h}$ iſt.

Durch Drehung einer Curve um eine Axe entſtehende Fläche.

38. Die Curve DPE (Fig. 77.) drehe ſich um die Axe BC, ſo beſchreibt jede rechtwinklichte Coordinate QP mit ihrem Endpuncte P eine Kreislinie. Von P fälle man auf die gegebene Ordinate CE die ſenkrechte PN, ſo iſt CN eine Function von PN. Wenn nämlich eine Gleichung zwiſchen den Coordinaten DQ, QP gegeben wird, wie es am gewöhnlichſten iſt, ſo iſt auch eine Gleichung zwiſchen CQ (= CD — DQ) und QP (= CN) gegeben.

39. Nun ſoll eine Gleichung für einen Punct P der beſchriebenen Fläche in Beziehung auf drey Ebenen durch drey Coordinaten x, y, z gefunden werden. Die Ebene der Fig. 77* ſey die Ebene der x, y. Die Axe der DC treffe ſie in C, und ſey ſenkrecht auf dieſelbe; auch ſey der Punct C in der Ebene derſelbe mit dem Puncte C der Axe CD. Mit dem Halbmeſſer CF = CN beſchreibe man um C den Kreis FNf. Die Ordinate CE (Fig. 77) liege auf CE (Fig 77*), ſo liegt der Punct P in der auf die Ebene AMN ſenkrechten, in der Höhe PN = z. Es ſey AX die Axe der x, und die auf AX ſenkrechte NM = y; AM = x; ferner CB ſenkrecht auf AM in B, und CLF parallel mit AM: AB = a; BC = b; ſo iſt CL = x — a; NL = y — b, und

$$CN^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2.$$

Da CN eine Function von PN oder z iſt, ſo iſt die Gleichung für jede durch Drehung um eine Axe entſtandene Fläche,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = (\varphi z)^2.$$

40. Exempel. Es ſey DPE ein Kreisbogen, deſſen Mittelpunct G iſt, in dem Abſtande $GC = c$ von C, und der Halbmeſſer $GD = g$. Nun iſt $QP^2 = CN^2 = g^2 - (z-c)^2$, alſo iſt

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = g^2,$$

die allgemeine Gleichung für die Kugelfläche. Dieſe iſt überhaupt die Gleichung für den Abſtand, g, zweyer Puncte, deren reſpective Coordinaten ſind a, b, c und x, y, z.

Fällt der Mittelpunct in den Anfang der Coordinaten, ſo iſt

$$x^2 + y^2 + z^2 = g^2.$$

41. Exempel. Die Curve DPE ſey eine Parabel, ſo iſt, wenn der Parameter p heißt, $p \times DQ = QP^2$, oder $p(CD - CQ) = CN^2$. Es ſey $CD = f$, ſo iſt $CN^2 = pf - pz$; alſo iſt die Gleichung für die paraboliſch-konoidaliſche Fläche,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = pf - pz.$$

Auf dieſelbe Art werden die Gleichungen für eine hyperboliſch-konoidaliſche und ſphäroidiſche Fläche gefunden, welche durch Drehung einer Hyperbel und Ellipſe um eine ihrer Axe entſtehen.

42. Wenn die Axe der Parabel durch den Anfangspunct A geht, das iſt, wenn ſie in die Axe der z fällt, ſo iſt

$$x^2 + y^2 = pf - pz.$$

43. Die Gleichung für den Schnitt der paraboliſch-konoidaliſchen Fläche bey der in (42.) angenommenen Lage der Axe zu finden. — Man ſetze die in (15.) gefundenen Werthe der Coordinaten x, y, z durch die Coordinaten des Schnittes, t, u in die Gleichung (42.) Die Ebene ſchneide die Axe der x in dem Abſtande h von dem Anfangspuncte der Coordinaten, unter dem Winkel η mit dem Neigungswinkel ϑ, ſo iſt

$$x = t\cos\eta - u\sin\eta.\cos\vartheta + h;$$
$$y = t\sin\eta + u\cos\eta.\cos\vartheta;$$
$$z = u\sin\vartheta.$$

Daraus iſt

$$x^2 + y^2 = t^2 + u^2 . \cos\vartheta^2 + h^2 + 2ht \cos\eta - 2hu \sin\eta . \cos\vartheta .$$

oder, weil $h^2 = h^2 \cos\vartheta^2 + h^2 \sin\eta^2$ iſt,

$$x^2 + y^2 = (t + h\cos\eta)^2 + (u\cos\vartheta - h\sin\eta)^2 .$$

Die Gleichung für den Schnitt des Konoids iſt alſo

$$(t + h\cos\eta)^2 + (u\cos\vartheta - h\sin\eta)^2 + pu\sin\vartheta = pf .$$

Es iſt pf dem Quadrate der Ordinate CE an der Parabel (Fig. 77.) gleich.

Die Zuſammenſtellung dieſer Gleichung mit der allgemeinen für eine Ellipſe (Krumme Linien der erſten Claſſe, 29.) ergiebt, daß a daſelbſt unendlich groß iſt, weil das Glied tu fehlt. Daher fällt die Abſciſſenlinie AP (Fig. 54.) in AR. Wegen des einem rechten gleichen Ordinatenwinkels für t und u iſt der Quotient $\frac{c}{a} = 1$; daher iſt das dortige m hier $= \cos\vartheta$, das iſt, die große Axe verhält ſich zur kleinen wie $1 : \cos\vartheta$. Die Ordinaten u ſind der großen Axe, die t der kleinen parallel. Da das Glied tu fehlt, und die Quadrate von t und u gleichnamige Vorzeichen haben, ſo iſt der Schnitt eine Ellipſe (a. a. O. 30.), oder eine Parabel, wenn u^2 fehlt, das iſt, wenn $\vartheta = 90°$ iſt. Die Beſtimmungen der Ellipſe oder Parabel ſelbſt wird man in jedem Falle nach der Methode (a. a. O. 29.) zu ſuchen haben.

44. In dem gegenwärtigen Falle läßt es ſich auch bequem genug folgendergeſtalt bewerkſtelligen.

Man addire auf beiden Seiten der obigen Gleichung die Größe, $\frac{1}{4}p^2 \tang\vartheta^2 - hp\sin\eta . \tang\vartheta$, ſo wird ſie dieſe:

$$(t + h\cos\eta)^2 + (u\cos\vartheta - h\sin\eta + \tfrac{1}{2}p\tang\vartheta)^2 = pf + \tfrac{1}{4}p^2 \tang\vartheta^2 - hp\sin\eta . \tang\vartheta .$$

oder

$$(t + h\cos\eta)^2 + \cos\vartheta^2 \left(u - \frac{2h\sin\eta - p\tang\vartheta}{2\cos\vartheta}\right)^2 = pf + \tfrac{1}{4}p^2 \tang\vartheta^2 - hp\sin\eta . \tang\vartheta .$$

Vergleicht man dieſe Gleichung mit der für eine Ellipſe, $y^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 = b^2$, worin a die halbe große, b die halbe kleine Axe, der Anfangspunct im Mittelpuncte iſt, und die Ordinaten y der kleinen Axe parallel ſind, ſo erhellt, daß die Ordinaten y um die Größe $h \cos \eta$ vermindert, die Abſciſſen x aber um die Größe $\frac{2 h \sin \eta - p \tang \vartheta}{2 \cos \vartheta}$ vergrößert ſind, daß $\frac{b}{a} = \cos \vartheta$, und das gegebene Glied $= bb$ iſt.

45. Wenn die Drehungsaxe gegen die Ebene der x, y geneigt iſt, ſo iſt die Projection des von einer Ordinate beſchriebenen Kreiſes eine Ellipſe, deren Mittelpunct auf der Projection der Axe liegt. Die große Axe iſt die Projection desjenigen Durchmeſſers, welcher der Ebene der x, y parallel iſt, und demſelben gleich. Die kleine Axe verhält ſich zu der großen wie der Sinus des Neigungswinkels der Drehungsaxe zum Sinustotus.

In dieſem Falle wird es am leichteſten ſeyn, zuerſt die Gleichung für die Fläche in Beziehung auf drey rechtwinklichte Ebenen zu ſuchen, deren eine ſenkrecht auf die Drehungsaxe iſt, und dann die Coordinaten nach den Formeln (krumme Linien von gedoppelter Krümmung, 43. oder 46.) zu vertauſchen, daß die Coordinaten-Ebenen die gegebenen werden.

Oder man mag die Gleichung auch unmittelbar durch Hülfe der folgenden Aufgaben erhalten.

46. Die Gleichungen für den Umfang eines gegebenen Kreiſes zu finden, deſſen Mittelpunct und Ebene durch Coordinaten in Beziehung auf drey rechtwinklichten Ebenen beſtimmt werden.

Der Halbmeſſer des Kreiſes ſey g, die Coordinaten zu ſeinem Mittelpuncte ſeyn p, q, r; die Gleichung für dieſelben Ebene ſey $Ax - By + Cz - D = 0$. Da der Mittelpunct in derſelben liegt, ſo iſt auch $Ap - Bq + Cr - D = 0$. Daher iſt

$$A(x-p)-B(y-q)+C(z-r)=0.$$

Die Gleichung für die Kugelfläche mit dem Halbmeſſer g iſt (39.)

$$(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=g^2.$$

Der Durchſchnitt der Ebene und der Kugelfläche iſt der Umfang des gegebenen Kreiſes, der durch dieſe beiden Gleichungen eben ſo beſtimmt wird, wie eine gedoppelt krumme Linie durch zwey Gleichungen zwiſchen drey Coordinaten. Schafft man eine derſelben weg, welches ganz leicht iſt, ſo erhält man eine Gleichung für die beiden andern, oder für die Projection auf einer der Coordinaten-Ebenen.

47. Da die Gleichung für eine Fläche geſucht wird, die durch Umdrehung einer Curve um eine Axe entſteht, ſo wird hier die Ebene jedes der veränderlichen Kreiſe durch die darauf in dem Mittelpuncte ſenkrechte gerade, und den Abſtand des Mittelpuncts von einer Coordinaten-Ebene nach der Richtung dieſer ſenkrechten gegeben. Darum müſſen nun die Größen eingeführt werden, durch welche die Lage dieſer geraden gegeben wird. Auch müſſen die Coordinaten, p, q, r, die nun veränderlich ſind, weggeſchafft werden, zugleich mit dem veränderlichen Halbmeſſer, und dem auf jener ſenkrechten genommenen Abſtande des Mittelpunctes.

Die Gleichungen für die ſenkrechte auf die Ebenen der Kreiſe ſeyn

$$\text{I. } y=ax+\alpha; \quad \text{II. } z=bx+\beta.$$

Die Gleichung für die auf dieſe Linie ſenkrechte Ebene iſt nun (Linie, 43.)

$$x+ay+bz=h,$$

wo h den Durchſchnittspunct der Ebene mit der Axe der x angiebt.

Da der Mittelpunct jedes Kreiſes in dieſer Ebene liegt, ſo iſt auch

$$p+aq+br=h.$$

Folglich iſt

$$\text{III. } x - p + a(y - q) + b(z - r) = o.$$

Die Coordinaten für den Punct, worin die auf die Ebenen der Kreiſe durch die Mittelpuncte ſenkrechte die Ebene der x, y trifft, ſeyn γ, δ, ſo iſt, wenn dieſe für x und y geſetzt werden,

$$\text{IV. } \delta = a\gamma + \alpha; \quad \text{V. } o = b\gamma + \beta.$$

Der veränderliche Abſtand der Mittelpuncte von der Ebene der x, y nach der auf die Ebene der Kreiſe ſenkrechten, ſey $= t$, und der veränderliche Halbmeſſer der Kreiſe $= u$, ſo iſt

$$\text{VI. } (p - \gamma)^2 + (q - \delta)^2 + r^2 = t^2.$$

$$\text{VII. } (x - p)^2 + (y - q)^2 + (z - r)^2 = u^2.$$

Zu dieſen Gleichungen kommt noch die zwiſchen den Coordinaten an der beſchreibenden Curve, t und u, da u eine Function von t iſt. Aus den acht Gleichungen laſſen ſich die ſieben Größen, p, q, r, γ, δ, t, u wegſchaffen, ſo daß alsdann eine Gleichung zwiſchen x, y, z, a, α, b, β, und den in der Gleichung zwiſchen t und u befindlichen gegebenen Größen erhalten wird. Dieſe gilt für die Puncte des Umfanges irgend eines der Kreiſe, deren Ebenen ſenkrecht auf eine der Lage nach gegebene gerade, als den Ort ihrer Mittelpuncte ſind, und deren Halbmeſſer zu den Abſchnitten dieſer geraden eine beſtimmte Relation haben, das iſt, es iſt eine Gleichung für eine durch Umdrehung einer gegebenen Curve um ihre Axe erzeugte Fläche.

Die ganze Rechnung wird ſehr abgekürzt, wenn die auf die Ebenen der Kreiſe ſenkrechte durch den Anfang der Coordinaten geht, wodurch α, β, γ, δ jede $= o$ werden.

48. Dieſe Methode iſt deutlicher, als die von Monge in den Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie, Nr. 6 vorgetragene. Er legt, wie hier geſchehen iſt, die Gleichungen, $y = ax + \alpha$; $z = bx + \beta$; und $x + ay + bz = h$, zum Grunde, und findet, daß die Functio-

nen, $x + ay + bz$ und $(x - \gamma)^2 + (y - \delta)^2 + z^2$, für irgend welche Werthe von x, y, z zugleich conſtant und veränderlich ſind. Daher ſey $(x - \gamma)^2 + (y - \delta)^2 + z^2$ eine Function von $x + ay + bz$, deren Beſchaffenheit von der Natur der erzeugenden Curve abhängt. Allein, wie dieſe Function beſtimmt werden möge, zeigt Monge nicht.

Krumme Flächen, welche von einer geraden Linie, die einer gegebenen Ebene parallel bleibt, und zugleich durch eine gegebene Linie, ebene oder krumme, geht, beſchrieben werden.

49. Eine gerade Linie bewege ſich an einer andern geraden hin, indem ſie zugleich durch die Axe der x geht, und einer gegebenen Ebene parallel bleibt; ſie beſchreibt alsdann eine gekrümmte Keilfläche. Dieſe verwandelt ſich in eine ebene Fläche, wenn die gerade Linie, an welcher ſich die beſchreibende bewegt, der Axe der x parallel iſt.

50. Es ſeyn AX, AY (Fig. 78.) die Axen der x, y; BB ſey die Projection der gegebenen geraden; LR die Projection der beſchreibenden auf die Ebene der x, y. Da die letztere Linie einer gegebenen Ebene parallel bleibt, ſo bleibt auch die RL in jeder Lage ſich parallel, oder der W. RLX iſt conſtant.

Die Coordinaten an die krumme Fläche ſeyn $AM = x$, $MN = y$, und die in N auf die Ebene AMN ſenkrechte, z. An die gegebene gerade ſeyn die Coordinaten, $AQ = p$; $QR = q$, und die in R auf die Ebene AQR ſenkrechte, r. Die Gleichungen für dieſe gerade ſeyn

$$q = ap + \alpha; \quad r = bp + \beta.$$

Da der Durchſchnitt der Fläche in der Richtung LR eine gerade iſt, ſo iſt

$$r : z = LR : LN = QR : MN = q : y$$

alſo, $bp + \beta : ap + \alpha = z : y$,

und $(az - by)\, p = \beta y - \alpha z$.

Ferner iſt $1 : \tan NLM = LQ : QR = MQ : QR - MN = p - x : q - y$. Man ſetze $\tan NLM = \lambda$, ſo iſt $\lambda(p - x) = ap + \alpha - y$, und

$$p = \frac{\lambda x - y + \alpha}{\lambda - a}.$$

Dadurch wird aus der vorher gefundenen Gleichung nunmehr dieſe:

$$(az - by)(\lambda x - y + \alpha) = (\lambda - a)(\beta y - \alpha z),$$

welche die geſuchte Gleichung für die gekrümmte Keilfläche iſt.

51. Man laſſe die Projection BB der gegebenen geraden Linie parallel mit AX ſeyn, ſo wird q eine unveränderliche Größe, α, und $a = 0$, da a die Tangente des Winkels der BB mit AX iſt. Die gegebene gerade gehe durch C, ſo iſt für $p = 0$ auch $r = 0$, alſo $\beta = 0$. Dann ſey noch NLM ein rechter Winkel, ſo iſt λ unendlich groß. Nun iſt die Gleichung für die gekrümmte Keilfläche,

$$bxy = \alpha z,$$

wo α der Abſtand der nun parallelen AX, BB, und b die Tangente des Neigungswinkels der gegebenen geraden gegen die Ebene der x, y iſt.

52. Die Figur des Durchſchnitts der krummen Fläche (51.) mit einer auf die Ebene der x, y ſenkrechten Ebene zu finden.

Die ſchneidende Ebene gehe durch AN, und ſchneide die Axe der x unter dem Winkel MAN, ſo ſind die Verhältniſſe AM : AN und MN : AN gegeben. Man ſetze $AN = t$. Die Ordinate z an die Fläche iſt nun auch Ordinate an die Durchſchnittslinie. Es ſey $x = mt$; $y = nt$, ſo iſt die Gleichung für die Durchſchnittslinie, $mnbt^2 = \alpha z$. Dieſe gehört für eine Parabel, deren Axe in der Axe der z liegt, und deren Anfangspunct in A iſt. Die Curve iſt nach der Gegend der poſitiven z concav.

Wird der Schnitt parallel mit der Ebene der x, z geführt, ſo daß AN parallel mit AX iſt, ſo iſt y für alle Puncte der Durchſchnittslinie dieſelbe. Es iſt alſo, wenn

$= z^2$. Die Durchſchnittslinie iſt eine Ellipſe, deren Parameter $\frac{2ay^2}{h^2}$, und große Axe 2a iſt, (Ellipſe, 7.).

Wird der Schnitt nach der AN durch A geführt, ſo ſeyn $AM = m \times AN$; $MN = n \times AN$, und $AN = v$. Die Gleichung für die Durchſchnittslinie iſt

$$h^2 z^2 = mn^2 (2a - mv) v^3.$$

Die Curve iſt vom vierten Grade, und kann als eine Ellipſe von einer höhern Art angeſehen werden.

Dieſe krumme Fläche wird bisweilen zur Wölbung über einem Thore angewandt. Die franzöſiſchen Baumeiſter nennen ſie Arrière voussure de St. Antoine, von dem Hauptthore der Pariſer Vorſtadt dieſes Namens. Montucla Hist. des Mathém. T. III. p. 95. Daviler Cours d'Architecture, p. 276. Planche 66. A.

56. Iſt die Curve eine Parabel, deren Parameter $= a$, ſo iſt $u^2 = at$, und $h^2 z^2 = axy^2$. Die Schnitte parallel mit der Ebene BQB ſind Parabeln mit den Parametern $\frac{ayy}{hh}$. Schnitte nach der Richtung AN haben die Gleichung, $h^2 z^2 = mn^2 at^3$, und ſind Linien vom dritten Grade, und zwar Neiliſche Parabeln, ſ. Krumme Linien der zweyten Claſſe, 63.

57. Die an der Curve BQB herum geführte gerade Linie QM kann auch, anſtatt nach der geraden AMX gerichtet zu ſeyn, nach einer in der Ebene der x, y beſchriebenen Curve gezogen werden, ſo daß RM eine Ordinate an derſelben, für BR als Abſciſſe iſt. Es ſey nun $BR = x$; $BN = y$; $NP = z$; $RQ = u$; $RM = v$, ſo iſt

$$v : u = v - y : z.$$

Hier ſind v und u jede eine Function von x. Jene ſey φx, dieſe ſey ψx, ſo iſt $\frac{y}{\varphi x} + \frac{z}{\psi x} = 1$, oder eine Conſtante.

58. Die zweyte Curve mag auch irgend eine andere Lage haben als in (57.), wenn nur die gerade von einem Puncte der einen nach einem Puncte der andern einer gegebenen Ebene parallel bleibt. Beide Curven können auch von gedoppelter Krümmung seyn.

59. Oder eine gerade bewegt ſich an zwey krummen Linien, die auch gedoppelt krumm seyn mögen, so, daß ſie zugleich durch eine gegebene gerade geht. Eine ſolche krumme Fläche hat die Wölbung, welche im Franzöſiſchen Arrière-voussure de Marseille genannt wird. Daviler, wie oben. — Anſtatt der geraden Linie kann man auch eine krumme nehmen. (Monge Feuilles d'Analyse. Nr. 29.)

60. Die beſchreibende gerade bleibe einer gegebenen Ebene parallel, indem ſie an einer darauf ſenkrechten ſich drehend fortrückt, ſo entſteht eine krumme Fläche, dergleichen an einer Art von Schraubengängen, an Windeltreppen, undurchſichtigen oder durchſichtigen, an Windmühlenflügeln vorkommt.

Krumme Flächen des zweyten Grades.

61. Die zweyte Methode zur Unterſuchung krummer Flächen iſt, daß aus den Gleichungen für dieſelben die Geſtalt und die Eigenſchaften hergeleitet werden. Der Grad der Gleichung wird aus der höchſten Summe der Exponenten der veränderlichen Größen in den Gliedern der Gleichung beſtimmt, eben ſo wie bey krummen Linien. Die Gleichungen für eine Ebene enthalten die veränderlichen x, y, z nur einzeln und einfach in ihren Gliedern. Die allgemeine Form derſelben iſt

$$Ax + By + Cz + D = o.$$

Die krummen Flächen von der einfachſten Beſchaffenheit ſind diejenigen, welche unter der allgemeinen Gleichung,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = o,$$

begriffen ſind. Sie heißen Flächen der zweyten Ordnung in Beziehung auf die Ebene, als Fläche der

erſten Ordnung. In Beziehung auf die höchſte Summe der Exponenten in den Gliedern der Gleichung heißen ſie **krumme Flächen des zweyten Grades.**

Die Unterſuchung der krummen Flächen des dritten Grades, oder gar noch höherer Grade, hat man noch nicht vorgenommen, weil ſie zu ſchwierig iſt.

62. Nimmt man von den drey mit einander veränderlichen Größen zwey nach Willkür, ſo wird die dritte durch eine quadratiſche Gleichung gegeben, es müßte denn ihr Quadrat fehlen. Dieſe hat daher entweder zwey mögliche, ungleiche oder gleiche, Werthe, oder keine mögliche. Sind für unendlich große x, und endliche oder unendliche y, keine mögliche Werthe von z, ſo iſt die Oberfläche eine im endlichen Raume begränzte.

63. Jede krumme Fläche des zweyten Grades von einer Ebene geſchnitten, giebt einen Kegelſchnitt (16.). Hieraus kann man ſich eine Vorſtellung von der Geſtalt der Flächen des zweyten Grades machen. Man nehme die drey Ebenen der Coordinaten zu den Ebenen der Schnitte, ſo daß dieſe durch den Anfang der Coordinaten gehen, und auf einander ſenkrecht ſeyn. Die drey Schnitte können eine Ellipſe, Hyperbel oder Parabel ſeyn, nur daß nicht alle Combinationen dieſer Linien Statt haben. Dieſe Schnitte heißen die **Hauptſchnitte** des Körpers oder der Fläche (Sectiones principales).

64. Die drey Hauptſchnitte ſeyn Ellipſen, ſo iſt der Körper ein **Ellipſoid.** Zweytens, zwey der drey Hauptſchnitte ſind Hyperbeln, und der dritte iſt eine Ellipſe, an welcher die Scheitelpuncte aller hyperboliſchen Schnitte herum liegen, und eine rings um die eine Axe herumlaufende doppelte trichterförmige Vertiefung bilden. Oder der eine Hauptſchnitt iſt etwas unmögliches, und die hyperboliſchen Schnitte bilden zwey rundliche, ganz geſonderte Körper. Dieſe beiden Gattungen heißen **Hyperboloiden.** Drittens, zwey Hauptſchnitte ſind Parabeln, deren Ebenen ſich rechtwinklicht durchſchneiden, und der dritte Hauptſchnitt iſt Null; die mit der dritten Coordinaten-Ebene parallelen Ebenen ſind entweder Ellipſen,

oder Hyperbeln. In dem erſtern Falle liegen die beiden paraboliſchen Hauptſchnitte nach derſelben Gegend hin, in dem andern nach entgegengeſetzten, wie es ſich unten zeigen wird. Dieſe beiden Gattungen heißen Paraboloiden.

Dieſes ſind, nebſt den cylindriſchen und koniſchen Körpern, deren Grundflächen Kegelſchnitte ſind, alle Gattungen von Körpern mit Oberflächen vom zweyten Grade. Unter Ellipſen wird der Kreis mit begriffen, um deſto mehr, da die Erklärung einer Ellipſe zufolge ihrer Gleichung auch auf den Kreis paſſet. Die Erörterung dieſer vorläufigen Ueberſicht der drey Arten von Körpern und Oberflächen des zweyten Grades geben die folgenden Unterſuchungen.

65. Alle parallelen Schnitte der Oberflächen des zweyten Grades ſind gleichnamige Kegelſchnitte, nämlich entweder alle Ellipſen, oder Parabeln oder Hyperbeln.

Denn die Ebene des Schnittes ſchneide die Axe der x in dem Abſtande h von dem Anfangspuncte, unter dem Winkel η mit dem Neigungswinkel ϑ gegen die Ebene der x, y, ſo wird die Gleichung zwiſchen den Coordinaten t und u für den Schnitt nach (15.) erhalten, wenn geſetzt wird

$$x = t\cos\eta - u\sin\eta.\cos\vartheta + h.$$
$$y = t\sin\eta + u\cos\eta.\cos\vartheta.$$
$$z = u\sin\vartheta.$$

Die Coefficienten von t^2, u^2, tu ſind von dem Abſtande h ganz frey, alſo für alle parallelen Schnitte dieſelben. Nun wird die Gattung des Schnittes bloß durch dieſe Coefficienten beſtimmt, (krumme Linien der erſten Claſſe, 29. 31. 34.), alſo ſind alle parallelen Schnitte gleichnamig.

66. Man führe mit der Ebene der x, y einen parallelen Schnitt, in dem Abſtande k, ſo wird die Gleichung für die Projection des Schnittes gefunden, wenn in der allgemeinen Gleichung für die Oberflächen des zweyten Grades $z = k$ geſetzt wird, da für alle Puncte des Schnittes $z = k$ iſt. Demnach iſt

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + (Ek + G)x + (Fk + H)y + Ck^2 + Kk + L = 0.$$

Um die Glieder, welche die erſten Potenzen der veränderlichen Größen enthalten, wegzuſchaffen, ſetze man $x = t + a$; $y = u + b$, und beſtimme a und b aus den Gleichungen,

$$2Aa + Db + Ek + G = 0,$$
$$2Bb + Da + Fk + H = 0.$$

Dadurch wird erhalten

$$At^2 + Bu^2 + Dtu = M,$$

wo M aus den gegebenen Coefficienten nebſt a und b und k zuſammengeſetzt iſt.

Man nehme einen andern Abſtand des Schnittes, k′, ſo verändern ſich auch die Werthe von a und b, und anſtatt M tritt ein anderer Werth ein, der N ſey. Die Gleichung für dieſen Schnitt iſt, wenn die Coordinaten ſtatt t und u durch s und v bezeichnet werden,

$$As^2 + Bv^2 + Dsv = N.$$

Es ſey $M : N = m^2 : n^2$, ſo iſt

$$As^2 + Bv^2 + Dsv = \frac{n^2}{m^2} M.$$

Folglich

$$An^2t^2 + Bn^2u^2 + Dn^2tu = Am^2s^2 + Bm^2v^2 + Dm^2sv.$$

Dieſe Gleichung wird erfüllt, wenn zugleich iſt $m : n = t : s$ und $m : n = u : v$, ſo daß $t : s = u : v$, oder $t : u = s : v$ iſt. Auf eine andere Art kann ſie nicht erfüllt werden. Denn wenn $m : n = t : s$ genommen wird, welches, wegen der Unabhängigkeit beider veränderlichen, t, s, geſchehen darf, ſo bleibt

$$Bn^2u^2 + Dn^2tu = Bm^2v^2 + Dn^2sv.$$

Dieſer Gleichung kann nicht für jedes willkürliche t und s ein Genüge geſchehen, da u und v ſchon, jenes durch t, dieſes durch s, beſtimmt ſind, wenn nicht $m : n = t : s$

$= u:v$ genommen wird. In der Application de l'Algèbre à la Géométrie par M. M. Monge et Hachette, à Paris, 1805. p. 29. iſt der umgekehrte Satz, daß aus der Gleichung die Proportion $t:s = u:v$ folgt, nicht erwieſen.

Alle mit der einen Ebene der Coordinaten parallelen Schnitte ſind daher ähnliche Figuren.

Da man durch Vertauſchung der Coordinaten-Ebenen mit andern jede Durchſchnitts-Ebene zu einer Coordinaten-Ebene machen kann, ſo iſt der Satz allgemein.

67. Es ſtelle Fig. 80. ein Stück einer Oberfläche vom zweyten Grade vor, worin die beiden Schnitte durch die Axe der z oder AZ, in den Ebenen der z, x; z, y Ellipſen ſind, nämlich EBC, BAD. Der Schnitt in der Ebene der x, y kann weder eine Parabel noch Hyperbel ſeyn, denn bey einer ſolchen Geſtalt des Schnittes gäbe es auch ins Unendliche hinaus parallele Ellipſen mit BAD, da doch über C und E hinaus keine mehr Statt finden.

68. Der Körper, worin die drey Hauptdurchſchnitte Ellipſen ſind, heißt, wie ſchon bemerkt iſt, ein Ellipſoid. Es ſey der Anfangspunct der Coordinaten an der Fläche zugleich der gemeinſchaftliche Mittelpunct der drey Ellipſen, ſo wird der Körper durch jede der drey Coordinaten-Ebenen in zwey gleiche und ähnliche Hälften getheilet. Auch ſind die beiden Theile jeder durch den Mittelpunct an die Oberflächen gezogenen geraden von dieſem Puncte angenommen, einander gleich. Der Punct A iſt auf gleiche Art der Mittelpunct des Körpers und der Oberfläche, wie für die elliptiſchen Schnitte.

69. Sind die beiden Halbmeſſer AB, AD ungleich, ſo ſind auch die Halbmeſſer jedes Schnittes, der mit BAD parallel iſt, ungleich. Durch einen Punct P auf AC ziehe man PM, PN ſenkrecht auf AC, jene in der Ebene BAC, dieſe in der Ebene CAD. Dieſe ſind zwey Coordinaten des parallelen Schnittes. Nun iſt (Ellipſe, 4.) $AB^2 : PM^2 = AC^2 : AC^2 - AP^2$, und $AD^2 : PN^2 = AC^2 : AC^2 - AP^2$, alſo iſt $AB : PM = AD : PN$,

oder AB : AD = PM : PN. Nun verhalten ſich in ähnlichen Ellipſen, wie es die durch BAD, MPN ſind, die correſpondirenden Abſciſſen wie die zugehörigen Ordinaten (66, und Artik. Ähnlichkeit, Th. I. S. 19.). Alſo ſind PM, PN Halbmeſſer des Schnittes, und P iſt der Mittelpunct. Die beiden Halbmeſſer ſind ungleich.

70. Iſt AB = AD, alſo der Schnitt ein Kreis, ſo iſt PM = PN, und der Schnitt MPN iſt ein Kreis. Daher ſind alle durch CE gelegten Schnitte dem EBC oder EDC und einander gleich. Das Ellipſoid iſt ein durch Drehung der Ellipſe CBE um CE beſchriebenes, ein Solide de revolution.

Die Halbaxe AC mag größer oder kleiner ſeyn als die Halbaxe AB.

Sind alle drey Halbaxen einander gleich, ſo iſt der Körper eine Kugel.

71. Die Gleichung für die Fläche des Ellipſoids zu finden. — Es ſey MRN (Fig. 80.) der elliptiſche Quadrant in dem Schnitte durch MPN. Man nehme auf PN die Abſciſſe PQ, und ziehe auf dieſe die Ordinate QR. In den ähnlichen Ellipſen BAD, MPN iſt

$$AB : AD = PM : PN.$$

In den Ellipſen MPN, CAD iſt (Ellipſe, 4),

$$PM^2 (PN^2 - PQ^2) = PN^2 . QR^2;$$
$$AD^2 (AC^2 - AP^2) = AC^2 . PN^2.$$

Die erſtere Gleichung verwandelt ſich wegen der angeführten Proportion in dieſe:

$$AB^2 (PN^2 - PQ^2) = AD^2 . QR^2.$$

Setzt man für PN^2 ſeinen Werth aus der zweyten Gleichung, ſo iſt

$$AB^2 . AD^2 (AC^2 - AP^2) - AB^2 . AC^2 . PQ^2 = AC^2 . AD^2 . QR^2.$$

Man ſetze AC = a; AD = b; AB = c; AP = x; PQ = y; QR = z, ſo iſt die Gleichung für das Sphäroid,

$$b^2 c^2 x^2 + a^2 c^2 y^2 + a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2.$$

72. Iſt a = b = c, ſo wird die Gleichung für die Kugel erhalten:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

73. Die beiden Schnitte durch die Axe der z ſeyn Hyperbeln, nämlich (Fig. 81.) in der Ebene der z, x die Hyperbel ECF, in der Ebene der z, y die GH, deren entgegengeſetzte in der Zeichnung weggelaſſen ſind. Der Schnitt durch die vier Scheitelpuncte dieſer Hyperbeln, in der Ebene der x, y, iſt eine geſchloſſene Figur, alſo eine Ellipſe, von welcher der Bogen DC gezeichnet iſt. Alle Schnitte, die den Ebenen ZAX, ZAY parallel ſind, ſind Hyperbeln, denen ECF und GDH ähnlich. Die auf die Axe AZ ſenkrechten Schnitte ſind Ellipſen. Alle Schnitte, die außer den beiden durch die Axe AZ auf AX und AY geführten Schnitten durch dieſelbe gehen, ſind Hyperbeln, weil ein Schnitt auf einer Seite von AZ auch einen Schnitt in derſelben Ebene auf der andern Seite mit ſich bringt, eine Parabel aber nur auf einer Seite der AZ vorhanden ſeyn kann. Solchergeſtalt iſt die Fläche wie ein doppelter Trichter geſtaltet, deſſen Axe AZ iſt, und worin die gemeinſchaftliche Mündung beider Theile durch CD geht. Euler nennt ſie eine elliptiſch-hyperboliſche. Der Körper, der davon begränzt wird, iſt ein hohles Hyperboloid. Für x und y, deren jenes kleiner als AC, und dieſes zugleich kleiner als AD iſt, ſind keine Puncte einer Oberfläche vorhanden.

74. Der Anfangspunct A ſey der Mittelpunct der Hyperbeln und der Ellipſe, ſo wird die Oberfläche, ſo wie der Körper, durch jede der Ebenen der Coordinaten in zwey gleiche und ähnliche Hälften getheilt. Der Punct A iſt der Mittelpunct, welcher alle durch denſelben an die Fläche gezogenen geraden halbirt.

75. Iſt AC = AD, ſo wird das Hyperboloid durch die Umdrehung einer Hyperbel um die conjugirte Axe AZ erzeugt.

76. Wenn AC und AD = 0 ſind, ſo verwandelt ſich das Hyperboloid in einen Kegel, deſſen Scheitel A, und Axe AZ iſt.

77. Die Hauptaxe der mit der Ebene ZAY parallelen Schnitte, die zwiſchen A und C geführt werden, liegt in der Ebene XAY, und der Mittelpunct der Hyperbeln liegt auf AC. Die Axe wird Null, wenn der Schnitt durch C geht, wobey die Hyperbel ſich in zwey gerade, in C ſich ſchneidende, verwandelt. Weiterhin ſchneidet die ſich parallel bleibende Ebene die Hyperbel CEF in einer geraden Linie, und die beiden Scheitelpuncte der Hyperbel liegen auf der Hyperbel ECF, eben ſo wie an dem Ellipſoid die Scheitelpuncte der mit ZAY (Fig. 80.) parallelen Ellipſe auf den beiden Ellipſen durch AX, nur daß an dieſen vier Scheitelpuncte Statt haben, an dem Hyperboloid nur zwey. Die Mittelpuncte der Hyperbeln liegen auf CX; die halbe Hauptaxe der durch M und m gelegten Hyperbel iſt PM. Von C nach X hin giebt es keine mögliche auf CX ſenkrechte Ordinaten, ſo wie von A bis nach C keine auf AC mögliche.

78. Die Gleichung für die elliptiſch-hyperboliſche Fläche zu finden. — Man führe parallel mit der Ebene XAY einen Schnitt durch M, ſo iſt dieſer eine Ellipſe, deren mit AC, AD parallele Axen ſich wie AC : AD verhalten. Ein Quadrant derſelben iſt in Fig. 81* beſonders vorgeſtellt, wo die halbe Axe KM der Abſciſſe AP (Fig. 81.) gleich, und $KM:KL = AC:AD$ iſt. Es ſey R irgend ein Punct des Umfanges von dem Schnitte und deſſelben Coordinaten KQ, QR. Es ſey AB (Fig. 81.) die halbe Nebenaxe der Hyperbel ECF, ſo iſt an der Hyperbel

$$AB^2 (AP^2 - AC^2) = AC^2 . PM^2,$$

und an der Ellipſe

$$KL^2 (KM^2 - KQ^2) = KM^2 . QR^2.$$

Die letztere Gleichung verwandelt ſich, wegen der obigen Proportion, und wegen $KM = AP$, in dieſe,

$$AD^2 (AP^2 - KQ^2) = AC^2 . QR^2.$$

Setzt man für AP^2 ſeinen Werth aus der erſtern Gleichung, ſo entſteht hieraus:

$$AD^2.AC^2.PM^2 + AD^2.AB^2.AC^2 - AB^2.AD^2.KQ^2 = AB^2.AC^2.QR^2.$$

Man ſetze $KQ = x$, $QR = y$, $PM = z$; auch $AC = a$, $AD = b$, $AB = c$, ſo iſt

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2,$$

die Gleichung für das hohle Hyperboloid. Sie folgt aus der für das Ellipſoid, wenn die Axe 2c, die in die Axe der z fällt, unmöglich, oder ihr Quadrat negativ genommen wird.

Die Nebenaxe, 2AB oder 2c, iſt beiden Hyperbeln, ECF und GDH, gemein. Denn man ſetze in der Gleichung für die Fläche $y = 0$, ſo erhält man die Gleichung für die Hyperbel ECF, $c^2(x^2 - a^2) = a^2z^2$, worin a die halbe Hauptaxe und c die halbe Nebenaxe iſt. Setzt man in jener Gleichung $x = 0$, ſo erhält man die Gleichung für die Hyperbel GDH, $c^2(y^2 - b^2) = b^2z^2$, worin c auch die halbe Nebenaxe iſt.

In einem hyperboliſchen Schnitte durch einen Punct der CX ſenkrecht auf dieſelbe verhält ſich die Hauptaxe zur Nebenaxe, wie an der Hyperbel GDH die Nebenaxe zur Hauptaxe, mit denen ſie parallel ſind, wenn nämlich die Nebenaxe ſenkrecht auf die Hauptaxe im Mittelpuncte geſetzt wird.

79. Iſt $a = b = c$, ſo iſt die Gleichung,

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2.$$

Dieſes Hyperboloid iſt in Beziehung auf die Kugel das, was die gleichſeitige Hyperbel in Beziehung auf den Kreis iſt. Wenn man die Halbkreiſe einer Kugel von den gemeinſchaftlichen Polen an zurückbiegt, und die Figur gehörig ändert, ſo entſteht das hohle Hyperboloid.

80. Man laſſe die Scheitelpuncte zweyer hyperboliſchen Hauptſchnitte beide in eins fallen, wie in Fig. 82. wo die Hyperbel ECF in der Ebene XAY gedacht werden muß, und die Hyperbel GCH in der Ebene XAZ, ſenkrecht auf jene durch AX, und eben ſo auf der andern Seite von A die entgegengeſetzten Hyperbeln ecf, gch.

Zwiſchen dieſen Hauptſchnitten liegt eine ſtetige Folge von Schnitten, welchen eine eben ſolche Folge jenſeits A zugeordnet iſt. Dieſe ſind daher Hyperbeln. Die mit der Ebene YAZ parallelen Schnitte, welche dieſe Hyperbeln quer ſchneiden, ſind alſo geſchloſſene Figuren, daher Ellipſen. Die Oberfläche, welche ſolchergeſtalt entſteht, nennt Euler eine **hyperboliſch-hyperboliſche**; deutlicher möchte es ſeyn, ſie eine **konoidiſch-hyperboliſche** zu benamen. Der Körper iſt ein **hyperboliſches Konoid**.

81. Wenn die Hauptaxen, ſo wie die Nebenaxen einander gleich ſind, ſo entſteht der Körper durch Drehung, und alle auf AX ſenkrechte Schnitte ſind Kreiſe.

Wenn $AC = o$ iſt, ſo verwandelt ſich der Körper in einen Kegel. Dieſer macht den Übergang von dem Hyperboloid der einen Gattung zu dem der andern.

82. Die Gleichung für das hyperboliſche Konoid zu finden. — Man führe (Fig. 82.) einen Schnitt ſenkrecht auf CX; dieſer iſt einer Ellipſe EGFH, welche zur Hälfte in Fig. 82.* beſonders vorgeſtellt iſt. Die halben Nebenaxen der beiden Hyperbeln ECF, GCH ſind AD, AB; die gemeinſchaftliche halbe Hauptaxe iſt AC. An den beiden Hyperbeln iſt

$$AD^2 (AK^2 - AC^2) = AC^2 . KC^2,$$
$$AB^2 (AK^2 - AC^2) = AC^2 . KG^2,$$

Daher iſt $AD : AB = KC : KG.$

In der Ellipſe iſt

$$KG^2 (KE^2 - KQ^2) = KE^2 . QR^2,$$
oder $$AB^2 (KE^2 - KQ^2) = AD^2 . QR^2.$$

Für KE^2 werde aus der Gleichung für die Hyperbel ECF der Werth geſetzt, ſo iſt

$$AB^2 . AD^2 . AK^2 - AB^2 . AD^2 . AC^2 - AB^2 . AC^2 . KQ^2 = AC^2 . AD^2 . QR^2.$$

Man ſetze $AK = x$, $KQ = y$, $QR = z$; auch $AC = a$, $AD = b$, $AB = c$, ſo iſt

$$b^2 c^2 x^2 - a^2 c^2 y^2 - a^2 b^2 z^2 = a^2 b^2 c^2.$$

Dieſe Gleichung geht aus der für das Ellipſoid hervor, wenn die beiden Halbaxen, b, c, unmöglich oder ihre Quadrate negativ geſetzt werden.

83. Für das hyperboliſche Konoid, das durch Umdrehung entſteht, iſt $b = c$, und die Gleichung für daſſelbe iſt

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 - a^2 z^2 = a^2 b^2.$$

84. Durch die Umdrehung einer gleichſeitigen Hyperbel um ihre Hauptaxe entſteht ein Körper, deſſen Gleichung iſt

$$x^2 - y^2 - z^2 = a^2.$$

85. Zwey Parabeln ſchneiden ſich in ihren Axen mit gemeinſchaftlichem Scheitelpuncte, welcher der Anfang der Coordinaten, x, y, z iſt. Die Parabel AB (Fig. 83.) liege in der Ebene XAZ, die AC in der Ebene XAY. Zwiſchen dieſen liegt eine ſtetige Folge von Parabeln, mit ungleichen Parametern, wenn die Parameter der Hauptſchnitte ungleich ſind. Es iſt aus der Natur der Parabel offenbar, daß nur auf der einen Seite der Ebene YAZ die Fläche des Körpers ſich erſtrecken kann. Ein Schnitt wie MPN ſenkrecht auf AX iſt eine geſchloſſene Figur, und daher eine Ellipſe. Dieſer Körper iſt ein **Paraboloid**, und zum Unterſchiede von der folgenden Art, das **elliptiſche**. Wenn die Parameter der Parabeln ſich gleich ſind, ſo ſind die auf AX ſenkrechten Schnitte Kreiſe, und der Körper iſt ein **paraboliſches Konoid**.

86. Die Gleichung für die Oberfläche des Paraboloids zu finden. — Es ſey MPN (Fig. 83.) ein Schnitt ſenkrecht auf AX, und in demſelben RQ ſenkrecht auf PN, den Durchſchnitt des Schnittes mit der Ebene CAX. Der Parameter der Parabel AB ſey $= a$; der Parabel $AC = b$, ſo iſt $PM^2 = a \times AP$, und $PN^2 = b \times AP$. In der Ellipſe MPN iſt $PM^2 (PN^2 - PQ^2) = PN^2 . QR^2$. Da $PM^2 : PN^2 = a : b$ iſt, ſo iſt

$$a (b \times AP - PQ^2) = b \times QR^2.$$

Es ſey $AP = x$, $PQ = y$, $QR = z$, ſo iſt die Gleichung für das elliptiſche Paraboloid,

$$ay^2 + bz^2 = abx.$$

87. Für das paraboliſche Konoid iſt

$$y^2 + z^2 = ax.$$

88. Die beiden durch den Anfang der Coordinaten der Fläche gelegten Parabeln können auch ihre Axen in entgegengeſetzter Richtung haben, müſſen aber alsdann ebenfalls in zwey verſchiedenen Ebenen liegen, da jeder Schnitt einer Fläche vom zweyten Grade nur einen einzigen Kegelſchnitt giebt, nicht zwey. — Es ſey nämlich (Fig. 84.) BAb eine Parabel in der Ebene ZAX, und CAc eine Parabel in der Ebene X'AY. In der Ebene XAY (in der Figur rechter Hand) iſt keine Begränzung der Fläche, wie in dem Falle, Fig. 83. durch die Parabel ANC. Denn da auf der andern Seite der Ebene YAZ in dem Theile X'AY derſelben Ebene für den Schnitt eine Parabel genommen iſt, ſo iſt nach der entgegengeſetzten Gegend keine Durchſchnittslinie vorhanden. Man nehme nun einen Punct M der Parabel BA, ziehe MPm ſenkrecht auf AX, und ſetze durch MPm eine Ebene ſenkrecht auf AX oder parallel mit YAZ, welche die Ebene XAY in PN ſchneide, ſo iſt PN unbegränzt, da PMm hingegen in M und m begränzt wird. Folglich iſt der Schnitt eine Hyperbel, deren Scheitelpuncte in M, m liegen. Die Schnitte in dem andern Theile der krummen Fläche ſind nun ebenfalls Hyperbeln, deren Scheitelpuncte, wie M, m, auf der Parabel CAc liegen. Die ſtetige Folge der Hyperbeln auf BAb bildet eine nach der Axe AX hin gerundete, ins Unendliche fortlaufende krumme Fläche. Eben ſo bildet die Folge der Hyperbeln auf CAc eine Fläche, die nach AX' hin gerundet iſt. Schneidet man die Fläche durch eine Ebene parallel mit der Ebene der Parabel BAb, ſo trifft dieſe alle Hyperbeln, die auf dem Umfange der Parabel BAb ſenkrecht auf ihre Ebene geſtellt ſind; allein von den Hyperbeln auf dem Umfange der Parabel CAc nur die Reihe derer von A bis an den

jenigen Punct M oder m, deſſen Abſtand von AX′ dem Abſtande der ſchneidenden Ebene von der Ebene der Parabel BAb gleich iſt. Dieſer Punct iſt daher der Scheitelpunct des paraboliſchen Schnittes. Eben ſo verhält es ſich mit den Schnitten, die der Ebene der Parabel CAc parallel geführt werden. Sie treffen alle Hyperbeln von A an bis an die durch einen Scheitelpunct M oder m, deſſen Abſtand von der Axe AX dem Abſtande der ſchneidenden Ebene von der Ebene CAc oder XAY gleich iſt. Wenn man ſich die Ebene XAY als horizontal, die Ebene XAZ als vertical vorſtellt, ſo ſind die Ebenen der hyperboliſchen Schnitte zwar alle vertical, aber nur die Axen der Hyperbeln über AX ſind vertical, die Axen derer über AX′ ſind horizontal. — Dieſer Körper heißt das hyperboliſche Paraboloid.

89. Die Gleichung für dieſen Körper zu finden. — Es ſey (Fig. 84.) R ein Punct der Hyperbel RMr auf dem paraboliſchen Bogen AMB; die halbe Hauptaxe derſelben MP iſt eine Ordinate der Parabel. Auf die Axe AX in der Ebene XAY ſey durch P die ſenkrechte NP gezogen, und auf dieſe von R die ſenkrechte RQ. Die Hyperbel liegt nämlich in der Ebene MPN. Die halbe Nebenaxe der Hyperbel ſey $= \alpha$, ſo iſt $\alpha^2 (QR^2 - PM^2) = PM^2 . PQ^2$, da QR der Abſciſſe auf der Axe, und PQ der Ordinate auf ihren Endpunct gleich iſt. In dem andern Theile des Paraboloids ſey R ein Punct der Hyperbel RMr auf dem paraboliſchen Bogen CMA. Ihre halbe Hauptaxe PM iſt eine Ordinate dieſes Bogens. Auf die Axe AX′ ſey in der Ebene ZAX′ (einer verticalen) die NP ſenkrecht geſetzt, welche eben ſo wie die NP in dem Theile rechter Hand unbegränzt iſt. Auf dieſe ſey von R in der Ebene MPQ die ſenkrechte RQ gezogen. Die halbe Nebenaxe der Hyperbel RMr ſey $= \beta$, ſo iſt $\beta^2 (QR^2 - PM^2) = PM^2 . PQ^2$.

Der Parameter zu der Parabel BAb ſey $= a$; zu der Parabel CAc $= b$. In jener iſt $PM^2 = a \times AP$; in dieſer iſt $PM^2 = b \times AP$. Ferner ſind alle parallelen Schnitte ſich ähnlich, das iſt ihre Haupt- und Ne-

benaxen haben einerley Verhältniß; alſo iſt für die Hyperbeln auf BAb, $\alpha : PM = m : 1$, und für die auf CAc, $\beta : PM = n : 1$, wo m und n unveränderliche Größen ſind. In dem Theile des Paraboloids über AX ſey $AP = x$; $PQ = y$; $QR = z$; in dem Theile über AX' ſey $AP = -x$, wegen der entgegengeſetzten Lage; $PQ = z$; $QR = y$, weil hier PQ auf die Ebene XAY ſenkrecht, und QR derſelben parallel iſt. So wird die Richtung der Coordinaten zugleich durch die Buchſtabenzeichen angegeben. Bey den beiden, y, z, iſt es gleichgültig, ob ſie poſitiv oder negativ ſind. Für den erſten Theil des Paraboloids iſt nun die Gleichung,

$$m^2(z^2 - ax) = y^2,$$

für den andern Theil iſt ſie

$$n^2(y^2 + bx) = z^2.$$

Damit das ganze Paraboloid durch eine einzige Gleichung dargeſtellt werde, muß genommen werden, $m^2 = \frac{b}{a}$, und $n^2 = \frac{a}{b}$. Dadurch wird aus beiden Gleichungen dieſe einzige:

$$bz^2 - ay^2 = abx,$$

Die Gleichung für das hyperboliſche Paraboloid. Sie entſteht aus der Gleichung für das elliptiſche dadurch, daß der Parameter b der Parabel in der Ebene XAY hier negativ genommen iſt, wegen der entgegengeſetzten Lage der Parabel in dieſer Ebene.

90. Die Paraboloiden haben keinen Mittelpunct. Sie verhalten ſich in dieſer Rückſicht zu den beiden erſtern Gattungen von Körpern oder Flächen, wie die Parabel zu den beiden andern Kegelſchnitten.

91. Noch eine Gattung von Oberflächen des zweyten Grades ſind die cylindriſchen, die Grundfläche mag eine elliptiſche, oder hyperboliſche, oder paraboliſche

ſeyn. Die Gleichungen für die der Grundfläche parallelen Schnitte ſind die für jene ſelbſt.

92. Daß die bisher abgehandelten Gattungen von krummen Flächen des zweyten Grades vollzählig ſind, läßt ſich leicht darthun. Es ſind überhaupt nur dreyerley Schnitte möglich. Dieſe ſeyn durch E, P, H bezeichnet. Von dieſen laſſen ſich in den drey Coordinaten-Ebenen zehn Combinationen machen. Die Combinationen, EEP, EEH, PPP, HHH, HHP, EHP, ſind, wie aus den vorhergehenden Bemerkungen erhellt, nicht möglich, und ſo bleiben die Combinationen, EEE, HHE, PPE, PPH übrig, von welchen die zweyte zwey Gattungen liefert.

93. Aus den Gleichungen für die fünf Gattungen läßt ſich die allgemeinſte Gleichung für jede derſelben herleiten, auf eine ähnliche Art, wie die allgemeine Gleichung für einen Kegelſchnitt aus den einfachſten Gleichungen für die beſondern Gattungen hergeleitet iſt. (Krumme Linien der erſten Claſſe, 29—34.). Dieſes geſchieht mittelſt der Subſtitutionen in dem Artikel, krumme Linien von gedoppelter Krümmung, 43—46. Die drey Coefficienten in den einfachſten Gleichungen, die drey Winkel für die neuen Coordinaten-Ebenen, und die drey Coordinaten zu dem neuen Anfangspuncte (daſ. 48.) machen neun, von einander ganz unabhängige Größen aus, wodurch in der neuen vollzähligen Gleichung neun Coefficienten beſtimmt werden. Dieſe hat zehn Glieder; aber die abſolute Größe der Coefficienten iſt willkürlich, da es dabey nur auf die Verhältniſſe derſelben ankommt. Aus den Formen einiger Coefficienten wird ſich erkennen laſſen, zu welcher Gattung von Flächen eine gegebene Gleichung gehöre, auf ähnliche Art wie bey den Gleichungen für Linien vom zweyten Grade.

94. Dieſe Methode iſt bequemer, als die entgegengeſetzte, von der allgemeinen Gleichung auf die Formen der einfachen zu kommen. Dieſer bedienen ſich Euler, la Croix, Biot und Monge. Aber die verwickelte und weitläuftige Rechnung gewährt keine deutliche Ueber-

ſicht des Ganges vom Allgemeinen zum Einfachſten. Es entſtehen auch Schwierigkeiten wegen des Falles, worin die Coordinaten des neuen Anfangspunctes unendlich groß werden, und wegen der Möglichkeit aller der conſtanten Größen, die zur Reduction einer gegebenen Gleichung auf die einfachſte Form beſtimmt werden müſſen.

95. Die allgemeinſte Gleichung iſt

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0.$$

Aus dieſer laſſen ſich die Glieder, welche bloß die erſten Potenzen der Coordinaten enthalten, wegſchaffen, unter einer gewiſſen Bedingung. Man ſetze nämlich

$$x = x' + a; \quad y = y' + b; \quad z = z' + c.$$

Iſt nun

$$2Aa + Db + Ec + G = 0,$$
$$2Bb + Da + Fc + H = 0,$$
$$2Cc + Ea + Fb + K = 0,$$

ſo erhält die Gleichung die Form,

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + D'xy + E'xz + F'yz + L' = 0,$$

wo die Symbole x', y', z', mit x, y, z vertauſcht ſind.

Aus dieſen drey Gleichungen werden die Werthe von a, b, c hergeleitet, nach der Formel, Elimination, 6.

96. Der Anfangspunct der Coordinaten in der transformirten Gleichung iſt der Mittelpunct des Körpers, weil derſelbe alle gerade Linien, die dadurch bis an die Fläche gezogen werden, halbirt. Denn wenn man $+x$, $+y$, $+z$ mit $-x$, $-y$, $-z$ vertauſcht, ſo bleibt die Gleichung unverändert, alſo auch die geraden, die von dem Anfangspuncte nach dem Puncte der Fläche, welcher durch die Coordinaten beſtimmt wird, gezogen werden.

97. Iſt aber der Nenner des Werthes von a Null, ſo iſt auch der Nenner des Werthes von b und c Null,

und der Mittelpunct der Fläche, das iſt, des Körpers, iſt unendlich weit entfernt. Es giebt in dieſem Falle eigentlich gar keinen Mittelpunct. Dieſer Fall tritt ein, wenn

$$4ABC + DEF = AFF + BEE + CDD.$$

98. Es iſt zweytens die Frage, ob die Glieder mit xy, xz, yz alle drey weggeſchafft werden können. Zu dieſem Ende müſſen die Formeln in dem Art. krumme Linien von gedopp. Krümmung, 46. angewandt werden, wodurch die drey Axen der Coordinaten eine veränderte Lage erhalten. Allein man möchte bezweifeln, ob in allen Fällen die drey Winkel ζ, η, ϑ, mögliche Werthe erhalten, wenn die Coefficienten D, E, F von xy, xz, yz gleich Null geſetzt werden. Euler und nach ihm la Croix helfen ſich hier ſo: man könne immer zwey dieſer Coefficienten = o ſetzen, wenn der dritte willkürlich genommen wird, und darauf könne man durch Veränderung der dritten Axe auch den dritten Coefficienten verſchwinden machen. Allein man ſieht nicht, warum es nicht einerley ſey, die Subſtitutionen oder die Veränderungen in der Lage der Axen auf einmahl als nach einander vorzunehmen. Die unbekannte Größe, welche Euler für die Lage der dritten Axe zu ſuchen nöthig findet, iſt ein Winkel, der durch ſeinen Sinus und Coſinus beſtimmt wird. Dieſe können als bloße Größen möglich, und doch als Functionen eines Winkels unmöglich ſeyn.

Inzwiſchen läßt ſich das Verfahren aus folgendem Grunde rechtfertigen. Die Winkel ζ, η, ϑ, welche zur Erfüllung der Gleichungen, $D' = o$; $E' = o$, $F' = o$, in der neuen Gleichung für die Fläche beſtimmt werden ſollen, haben in der That drey Werthe, weil ſie für je zwey der drey Coordinaten-Ebenen genommen werden können. Daher müſſen ihre Functionen durch Gleichungen vom dritten Grade gefunden werden. Sind zwey Wurzeln einer ſolchen Gleichung möglich, ſo iſt es auch die dritte.

Die ausgeführte Rechnung findet man in dem Essai de Géométrie analytique par Biot, 2de édit. §. 261;

und auf eine andere Art in der Application de l'Algèbre à la Géométrie, par Monge et Hachette, à Paris 1805. p. 46. ff. In der letzten Schrift wird der darin geführte Beweis als der erſte ſtrenge, den man gefunden habe, angegeben.

99. Laſſen ſich die Glieder, welche x, y, z enthalten, ſowohl als diejenigen, worin xy, xz, yz ſind, wegſchaffen; ſo hat die Fläche drey auf einander ſenkrechte Diametral-Ebenen, deren jede die Fläche in zwey gleiche und ähnliche Hälften theilet, wie aus der Form der Gleichung, $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + D = 0$, erhellet. Der gemeinſchaftliche Punct aller drey Ebenen iſt der Mittelpunct der Fläche oder des davon begränzten Körpers. Die drey Durchſchnittslinien dieſer Ebenen ſind die Hauptaxen der Fläche und des Körpers. Da die Paraboloiden vermöge ihrer Conſtruction keinen Mittelpunct nach drey Diametral-Ebenen haben (91.), ſo erhellt, daß die erſten Potenzen und die Producte zweyer Coordinaten nicht immer zugleich weggeſchafft werden können. In der vorher angeführten zweyten Schrift wird dieſes als allgemein thunlich angegeben, und daraus gefolgert, daß alle Flächen des zweyten Grades drey gegen einander ſenkrechte Diametral-Ebenen haben.

100. In den cylindriſchen Körpern, deren Grundfläche eine Ellipſe oder Hyperbel iſt, iſt der Ort der Mittelpuncte die Axe derſelben, nämlich die gerade, die durch die Mittelpuncte der parallelen und gleichen Schnitte geht. In den Ellipſoiden und Hyperboloiden iſt nur ein Mittelpunct, der zugleich der gemeinſchaftliche Punct der drey Diametralflächen iſt. In den Gleichungen für dieſe beiden Gattungen müſſen alſo die Coefficienten von xy, xz, yz zugleich mit denen von x, y, z Null werden.

101. Eine merkwürdige Eigenſchaft der Flächen des zweyten Grades, (das hyperboliſche Paraboloid ausgenommen) iſt, daß durch jeden Punct derſelben zwey Schnitte gelegt werden können, welche Kreiſe ſind, nur daß dieſe bey den durch Drehung entſtandenen Flächen in eins fallen, außer bey der Kugel, an welcher alle durch einen

Punct der Oberfläche geführten Schnitte Kreiſe ſind. An dem ſchiefen Kegel hat man ein leichtes Beyſpiel (Kegel, 8. 9.); an dem ſenkrechten iſt durch jeden Punct der Oberfläche nur ein einziger Schnitt ein Kreis. Zum Erweiſe jenes Satzes iſt es vorher nöthig, die allgemeine Gleichung für den Kreis zu ſuchen. Sie folgt aus der allgemeinen Gleichung für die Ellipſe (Krumme Linien der erſten Claſſe, 29.), doch wird es zur Deutlichkeit dienen, ſie beſonders zu entwickeln.

102. Es iſt AMBm (Fig. 85.) ein Kreis, deſſen Mittelpunct C. Auf dem Durchmeſſer $AB = 2a$ ſey $AP = x$; die ſenkrechte Ordinate $PM = y$. Mit AB ſey eine neue Abſciſſenlinie TT parallel, auf dieſer der Anfang der Abſciſſen in D, und E der Punct, wo die gerade PM ſie trifft. Die ſenkrechte von D auf die gerade AB treffe ſie in F, und es ſey $AF = b$, $DF = c$. Nun iſt $x = t - b$, und $y = u - c$. Durch die Subſtitution dieſer Werthe in die Gleichung, $2ax - xx = yy$, wird die zwiſchen t und u erhalten, nämlich

$$t^2 + u^2 - 2(a+b)t - 2cu + bb + 2ab + cc = 0.$$

Hieraus erhellt ſogleich, daß in der Gleichung für einen Kreis die Coefficienten von den Quadraten der Coordinaten ſich gleich ſeyn müſſen, wenn ſie gleich nicht $= 1$ zu ſeyn brauchen, und daß das Glied mit ihrem Producte nicht vorhanden ſeyn darf. Es bleibt dabey noch eine Bedingung wegen der Möglichkeit des Halbmeſſers zu finden.

103. Eine gegebene Gleichung, worin jene beiden Bedingungen erfüllt ſind, ſey

$$t^2 + u^2 - 2At - 2Bu + C = 0,$$

ſo iſt $a + b = A$; $c = B$;

$$bb + 2ab + cc = C.$$

Die letzte Gleichung verwandelt ſich in dieſe:

$$A^2 + B^2 = C + aa.$$

Daher iſt das Quadrat des Halbmeſſers

$$aa = A^2 + B^2 - C,$$

und die dritte Bedingung iſt, daß $A^2 + B^2$ größer als C ſey.

104. Ein Ellipſoid ſoll ſo geſchnitten werden, daß der Schnitt ein Kreis iſt. — Die Gleichung für daſſelbe iſt (71.)

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

Man ſetze $m^2a^2 = f^2$; $n^2b^2 = f^2$; $p^2c^2 = f^2$; ſo wird die Gleichung

$$m^2x^2 + n^2y^2 + p^2z^2 = f^2.$$

In dieſer ſetze man zufolge (15.),

$$x = t\cos\eta - u\sin\eta.\cos\vartheta + h;$$
$$y = t\sin\eta + u\cos\eta.\cos\vartheta;$$
$$z = u\sin\vartheta.$$

Es iſt ϑ der Neigungswinkel der ſchneidenden Ebene gegen die Ebene der x, y, und η der Winkel, welchen die Durchſchnittslinie beider mit der Axe der x macht. Die Gleichung zwiſchen t und u iſt nun

$$(m^2\cos\eta^2 + n^2\sin\eta^2)\,t^2 - 2(m^2 - n^2)\sin\eta.\cos\eta.\cos\vartheta.\,tu$$
$$+ (m^2\sin\eta^2.\cos\vartheta^2 + n^2\cos\eta^2.\cos\vartheta^2 + p^2\sin\vartheta^2)\,u^2$$
$$+ 2m^2h\cos\eta.\,t - 2m^2h\sin\eta.\cos\vartheta.\,u$$
$$+ m^2h^2 - f^2 = 0.$$

Die beiden erſten Bedingungen für einen Kreisſchnitt ſind:

I. $(m^2 - n^2)\sin\eta.\cos\eta.\cos\vartheta = 0.$

II. $m^2\cos\eta^2 + n^2\sin\eta^2 = m^2\sin\eta^2\cos\vartheta^2 + n^2\cos\eta^2.\cos\vartheta^2 + p^2\sin\vartheta^2.$

Um die dritte Bedingung darzuſtellen iſt es nöthig, die Gleichung auf die Form in (103.) zu bringen. Zu dem Ende ſetze man zur Abkürzung $m^2\cos\eta^2 + n^2\sin\eta^2 = q$, ſo ſind die Werthe von A, B, C daſelbſt,

$$A = -\frac{m^2h\cos\eta}{q}; \quad B = \frac{m^2h\sin\eta.\cos\vartheta}{q};$$

$C = \frac{m^2h^2 - f^2}{q}$, und es iſt die dritte Bedingung,

$$m^4h^2\cos\eta^2 + m^4h^2\sin\eta^2.\cos\vartheta^2$$
$$> (m^2h^2 - f^2)(m^2\cos\eta^2 + n^2\sin\eta^2),$$

das iſt, wenn man das auf beiden Seiten vorhandene Glied $m^4h^2\cos\eta^2$ wegläßt, und für f^2 den Werth, m^2a^2, ſetzt, auch mit m^2 alles dividirt,

$$\text{III.}\quad m^2h^2\sin\eta^2.\cos\vartheta^2 + m^2a^2\cos\eta^2 + n^2a^2\sin\eta^2 > n^2h^2\sin\eta^2.$$

Die erſte Bedingung zu erfüllen, muß entweder ſeyn $m = n$; oder $\eta = 0$, oder $\eta = 90°$, oder $\vartheta = 90°$. Die erſte Annahme würde die Auflöſung einſchränken; auch müßte zugleich wegen II. $p = n$ ſeyn, das iſt, der Körper wäre eine Kugel, welcher Fall hier nicht in Betracht kommt.

Nimmt man $\eta = 0$, ſo iſt $m^2 = n^2\cos\vartheta^2 + p^2\sin\vartheta^2$. Da $\frac{1}{\cos\vartheta^2} = 1 + \tang\vartheta^2$ iſt, ſo iſt $\tang\vartheta^2 = \frac{m^2 - n^2}{p^2 - m^2}$.

Nimmt man $\eta = 90°$, ſo iſt $n^2 = m^2\cos\vartheta^2 + p^2\sin\vartheta^2$, und $\tang\vartheta^2 = \frac{n^2 - m^2}{p^2 - n^2}$.

Nimmt man $\vartheta = 90°$, ſo iſt $m^2\cos\eta^2 + n^2\sin\eta^2 = p^2$, und $\tang\eta^2 = \frac{m^2 - p^2}{p^2 - n^2}$.

Eine von dieſen Annahmen findet immer Statt. Denn die Ordnung, in welcher die Größen m, n, p aufeinander der Größe nach folgen, iſt eine der folgenden, vorwärts oder rückwärts genommen, 1) n, m, p; 2) m, n, p; 3) m, p, n.

Die dritte Bedingung wird offenbar erfüllt, wenn h kleiner oder = a iſt; dann aber auch für größere Werthe, bis daß die beiden Theile auf jeder Seite des Zeichens der Ungleichheit ſich gleich ſind.

105. Der Halbmeſſer des Kreisſchnittes ſey $= R$, ſo iſt

$$\frac{q^2}{m^2} R^2 = m^2 h^2 \sin \eta^2 . \cos \vartheta^2 + m^2 a^2 \cos \eta^2 + n^2 (a^2 - h^2) \sin \eta^2 .$$

wo $q = m^2 \cos \eta^2 + n^2 \sin \eta^2$ iſt.

106. Ein durch den Mittelpunct des Ellipſoids gelegter Kreisſchnitt geht immer durch eine der drey Axen. Für dieſen Fall iſt $h = 0$. Z. B. wenn in Fig. 80. A C der Größe nach zwiſchen die beiden, A B, A D fällt, ſo giebt es auf der Ellipſe B D einen Halbmeſſer, der A C gleich iſt, daher der durch denſelben und durch A C geführte Schnitt ein Kreis iſt.

107. In der Ellipſe, wovon B D ein Quadrant iſt, giebt es auf beiden Seiten von A D zwey Halbmeſſer, die der A C gleich ſind; alſo gehen durch A C zwey Kreisſchnitte, deren Winkel ϑ mit der Ebene C A D zuſammen zwey rechte ausmachen. Eben ſo verhält es ſich mit den ihnen parallelen Schnitten, die durch einen Punct der Oberfläche geführt werden. Daher rührt es, daß der Winkel ϑ durch das Quadrat der Tangente gegeben wird, wodurch ϑ zwey Werthe erhält, welche Nebenwinkel ſind. Eben ſo mit dem Winkel η. Denn η iſt in Abſicht auf die Ebene C A B daſſelbe, was ϑ in Abſicht auf die Ebene C A D iſt.

108. Für das Hyperboloid iſt die Rechnung nur in den Vorzeichen von p^2, oder von p^2 und n^2, von der für das Ellipſoid verſchieden. In der Gleichung für die erſte Art iſt p^2 negativ. Hier kann ϑ nicht $= 90°$ geſetzt werden, weil dieſe Annahme für tang η^2 einen negativen Werth giebt. Auch erhellt aus der Conſtruction dieſes Hyperboloids, daß die auf die Ebene der x, y ſenkrechten Ebenen alle Hyperbeln ſind. Sie gehen entweder durch die Axe A Z, oder ſind ihr parallel. Iſt $m^2 > n^2$, ſo muß $\eta = 90°$ genommen werden, und es iſt alsdann $\tang \vartheta^2 = \frac{m^2 - n^2}{n^2 + p^2}$; iſt aber $m^2 < n^2$, ſo iſt $\eta = 0$

zu nehmen, wodurch $\tang \vartheta^2 = \frac{n^2 - m^2}{m^2 + p^2}$ iſt. Die dritte Bedingung erhält dieſelbe Formel wie für das Ellipſoid.

109. In der Gleichung für das Hyperboloid der zweyten Art ſind n^2 und p^2 negativ. Es kann daher nicht $\eta = 0$ ſeyn, als welches einen negativen Werth für $\tang \vartheta^2$ gäbe. Iſt $p > n$, ſo muß $\eta = 90°$ ſeyn, wodurch $\tang \vartheta^2 = \frac{m^2 + n^2}{p^2 - n^2}$ wird. Iſt $p < n$, ſo iſt $\vartheta = 90°$, und $\tang \eta^2 = \frac{m^2 + p^2}{n^2 - p^2}$. Die dritte Bedingung iſt nun enthalten in der Formel,

$$m^2 h^2 \sin \eta^2 . \cos \vartheta^2 + m^2 a^2 \cos \eta^2 + n^2 h^2 \sin \eta^2 > n^2 a^2 \sin \eta^2 .$$

Dieſe wird erfüllt, wenn h größer oder gleich a iſt, auch für kleinere Werthe, bis zu demjenigen, wodurch beide Theile der Formel ſich gleich werden.

110. Für das Paraboloid der erſten Art iſt die Gleichung, (86.)

$$a y^2 + b z^2 - a b x = 0.$$

Durch die vorigen Subſtitutionen entſteht hieraus die Gleichung,

$$\begin{aligned} &a \sin \eta^2 . t^2 + 2 a \sin \eta . \cos \eta \cos \vartheta . t u \\ &+ (a \cos \eta^2 . \cos \vartheta^2 + b \sin \vartheta^2) u^2 \\ &- a b \cos \eta . t + a b \sin \eta . \cos \vartheta . u - a b h = 0. \end{aligned}$$

Damit dieſe Gleichung für eine Kreislinie gehöre, muß ſeyn

I. $\sin \eta . \cos \eta . \cos \vartheta = 0$.

II. $a \sin \eta^2 = a \cos \eta^2 . \cos \vartheta^2 + b \sin \vartheta^2$.

III. $b^2 \cos \eta^2 + b^2 \sin \eta^2 . \cos \vartheta^2 + 4 b h \sin \eta^2 > 0$.

Die letztere Formel zu erhalten, muß die Gleichung vorher durch $a \sin \eta^2$ dividirt werden, um die Coefficienten von t^2 und u^2 jeden $= 1$ zu machen.

Es kann η nicht $= o$ ſeyn, weil dieſes für tang ϑ^2 einen negativen Werth geben würde; auch erhellt aus der Conſtruction, daß die Schnitte dieſer Art Parabeln ſind. Nimmt man $\eta = 90^\circ$, ſo iſt $\frac{a}{b} = \sin \vartheta^2$, wo $b < a$ ſeyn muß. In dem gegenſeitigen Falle iſt $\vartheta = 90^\circ$ zu ſetzen, wodurch $\sin \eta^2 = \frac{b}{a}$ wird.

Für poſitive h iſt die Formel III. immer erfüllbar; für negative h, ſo lange $4h < b \cot \eta^2 + b \cos \vartheta^2$ iſt. Iſt a kleiner als b, alſo $\eta = 90^\circ$, ſo iſt ein Kreisdurchſchnitt für negative h möglich, wenn $4h < b - a$. Iſt b größer als a, alſo $\vartheta = 90^\circ$, ſo iſt ein Kreisſchnitt für negative h möglich, wenn $4h < a - b$ iſt. Iſt ein ſolches $h = \frac{1}{4}(b - a)$ oder $\frac{1}{4}(a - b)$, ſo berührt die Ebene die krumme Fläche.

Das Quadrat des Halbmeſſers des Kreisſchnittes iſt in dem Falle, da $\eta = 90^\circ$ geſetzt werden muß, $= \frac{1}{4} b(b - a) + bh$; und in dem Falle, da $\vartheta = 90^\circ$ zu nehmen iſt, $= \frac{1}{4} a(a - b) + ah$.

111. Für das Paraboloid der zweyten Art (89.) iſt die Gleichung,

$$ay^2 - bz^2 + abx = o;$$

und die transformirte,

$$\begin{aligned} &a \sin \eta^2 . t^2 + 2a \sin \eta . \cos \eta . \cos \vartheta . tu \\ &+ (a \cos \eta^2 . \cos \vartheta^2 - b \sin \vartheta^2) u^2 \\ &+ ab \cos \eta . t - ab \sin \eta . \cos \vartheta . u + abh = o. \end{aligned}$$

Es muß alſo ſeyn

I. $\sin \eta . \cos \eta \cos \vartheta = o.$

II. $a \sin \eta^2 = a \cos \eta^2 . \cos \vartheta^2 - b \sin \vartheta^2.$

III. $b^2 \cos \eta^2 + b^2 \sin \eta^2 . \cos \vartheta^2 - 4bh . \sin \eta^2 > o.$

Nimmt man $\eta = o$, ſo iſt der Coefficient von $t^2 = o$; ſetzt man nun den von u^2 auch $= o$, ſo bleiben von der ganzen Gleichung nur die Glieder $ab \cos \eta . t + abh = o$.

Nimmt man $\eta = 90^\circ$, ſo wird der Werth von sin ϑ^2 negativ. Nimmt man $\vartheta = 90^\circ$, ſo wird der Werth von sin η^2 negativ. Folglich iſt es bey dieſem Körper nicht möglich einen Kreisſchnitt zu führen. Auch zeigt die Conſtruction des Körpers, daß kein ſolcher Schnitt daran möglich iſt. Es ſind hier keine elliptiſchen Schnitte möglich, daher auch keine Kreisſchnitte. Biot und Monge haben an dieſe Ausnahme nicht gedacht.

Berührende Ebene an einer krummen Fläche.

112. Eine berührende Ebene an einer krummen Fläche iſt diejenige, für welche die partiellen Differentialquotienten, $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$ und $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)$, an einem gemeinſchaftlichen Puncte beider dieſelben ſind, wie an der krummen Fläche. Unter z wird diejenige der Coordinaten verſtanden, die ſich an die krumme Fläche endigt, welches aber auch jede der übrigen ſeyn kann. Sie hat bisher eine ſolche bezeichnet. Bey dieſer Annahme fallen in dem Schnitte, der durch dieſen Punct parallel mit der Ebene der x, z, und an dem Schnitte, welcher der Ebene der y, z parallel iſt, die berührenden geraden in die Ebene, welche für den gemeinſchaftlichen Punct jene Differentialquotienten mit der krummen Fläche gemein hat. Es iſt nämlich $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)$ die Tangente des Winkels, welchen die berührende an der krummen Fläche in einer, der Ebene der x und z parallelen Durchſchnitts-Ebene, mit der Ordinate z macht. Eben ſo iſt $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)$ die Tangente des Winkels, welchen die berührende an der krummen Fläche in einer, der Ebene der y und z parallelen Durchſchnitts-Ebene, mit der Ordinate z macht. Durch dieſe beide berührenden geraden wird die berührende Ebene beſtimmt, die weniger von der krummen Fläche abweicht, als jede andere, an welcher die endlichen Unterſchiede der Coordinaten mit denen an der krummen Fläche übereinkommen, als welches nur bey ſchnei-

benden Ebenen Statt hat, eben ſo wie bey der berühren-den an einfach krummen Linien.

113. Die Gleichung für die krumme Fläche gebe die Differentialgleichung,

$$P\partial x + Q\partial y + R\partial z = o,$$

wo P, Q, R, Functionen von x, y, z, es ſey von allen oder von zweyen oder von einer derſelben, ſind, zum Theil auch eine gegebene Größe ſeyn können. Die Gleichung für die geſuchte berührende Ebene ſey (5.)

$$A x - By + Cz - D = o,$$

oder durch die zu ihr gehörigen Winkel η, ϑ und den Abſtand h,

$$x \sin\eta - y \cos\eta + z \cot\vartheta. - h \sin\eta = o.$$

Es iſt nun für dieſe Ebene,

$$A\partial x - B\partial y + C\partial z = o.$$

Die Gleichung für die krumme Fläche giebt

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -\frac{R}{P}; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) = -\frac{R}{Q}.$$

Die Gleichung für die Ebene giebt

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -\frac{C}{A}; \quad \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right) = \frac{C}{B}.$$

Berührt die Ebene die krumme Fläche, ſo ſind dieſe Quotienten jenen gleich. Nimmt man A = P, ſo gilt auch für die Ebene die Gleichung,

$$P\partial x + Q\partial y + R\partial z = o,$$

wofern die Functionen P, Q, R für jedes x, y, z diejenigen Werthe unveränderlich behalten, welche ſie an der krummen Fläche bloß für den Berührungspunct, als Functionen von x, y, z, haben. Bey dieſer Annahme giebt die Integration die Gleichung,

$$Px + Qy + Rz = D,$$

wo D die Conſtante iſt, die hier, wie bey jeder Integra-

tion, beſtimmt werden muß. In dem Berührungspuncte ſeyn die gemeinſchaftlichen Coordinaten, p, q, r, ſo iſt

$$Pp + Qq + Rr = D,$$

alſo iſt

$$P(x-p) + Q(y-q) + R(z-r) = o.$$

In den Functionen P, Q, R ſind für x, y, z die Coordinaten zu dem Berührungspuncte zu ſetzen.

114. Die Vergleichung mit der zweyten Form der Gleichung für eine Ebene,

$$x \sin\eta - y\cos\eta + z\cot\vartheta = h\sin\eta,$$

giebt, wenn dieſe durch $\cos\eta$, die Gleichung $Px + Qy + Rz = D$ durch Q dividirt wird, um den Verhältniſſen der Coefficienten ein beſtimmtes Glied zu geben,

$$\tang\eta = -\frac{P}{Q}; \quad \text{alſo } \cos\eta = -\frac{Q}{\sqrt{(P^2+Q^2)}}.$$

Ferner $-\dfrac{\cot\vartheta}{\cos\eta} = \dfrac{R}{Q}$, alſo $\tang\vartheta = -\dfrac{Q}{R\cos\eta}$

$= \dfrac{\sqrt{(P^2+Q^2)}}{R}$. Auch iſt

$-h\tang\eta = \dfrac{D}{Q}$, das iſt $h = p + \dfrac{Q}{P}q + \dfrac{R}{P}r$.

115. Anwendung auf krumme Flächen des zweyten Grades. — Für eine ſolche ſey die Gleichung,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = o.$$

Die Differentiation giebt

$$(2Ax + D)\partial x + (2By + E)\partial y + (2Cz + F)\partial z = o.$$

Für einen Punct, deſſen Coordinaten ſind p, q, r, wird die berührende Ebene beſtimmt durch die Gleichung,

$$(2Ap + D)(x-p) + (2Bq + E)(y-q) + (2Cr + F)(z-r) = o.$$

Für dieſe iſt

$$\tang\eta = -\frac{2Ap + D}{2Bq + E}.$$

$$\text{tang}\,\vartheta = \frac{\sqrt{[(2Ap+D)^2 + (2Bp+E)^2]}}{2Cr + F}$$

$$h = p + \frac{2Bq+E}{2Ap+D}\,q + \frac{2Cr+F}{2Ap+D}\,r.$$

116. Man kann auch in den Werth von h das in der Gleichung für die Fläche befindliche, unveränderliche Glied, G, hineinbringen. Es iſt nämlich, da p, q, r, Coordinaten an die Fläche ſind,

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + Dp + Eq + Fr + G = 0.$$

Nun iſt gefunden $(2Ap + D)h = 2Ap^2 + 2Bq^2 + 2Cr^2 + Dp + Eq + Fr$. Aus dieſen beiden Gleichungen folgt

$$h = -\frac{Dp + Eq + Fr + 2G}{2Ap + D}.$$

117. Exempel. An einem Ellipſoid ſey der Mittelpunct der Anfang der Coordinaten, ſo iſt die Gleichung für dieſelbe (71.),

$$b^2c^2x^2 + a^2c^2y^2 + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2.$$

Hier iſt $P = 2b^2c^2x$; $Q = 2a^2c^2y$; $R = 2a^2b^2z$. Folglich iſt die Gleichung für eine berührende Ebene an dem Ellipſoid, wenn für x, y, z ihre Werthe in dem Berührungspuncte geſetzt werden,

$$b^2c^2p(x-p) + a^2c^2q(y-q) + a^2b^2r(z-r) = 0.$$

Da $b^2c^2p^2 + a^2c^2q^2 + a^2b^2r^2 = a^2b^2c^2$ iſt, ſo iſt die Gleichung für die berührende Ebene,

$$b^2c^2px + a^2c^2qy + a^2b^2rz = a^2b^2c^2.$$

Auch iſt $\text{tang}\,\eta = -\frac{b^2p}{a^2q}$; $\text{tang}\,\vartheta = \frac{c^2\sqrt{(b^4p^2 + a^4q^2)}}{a^2b^2r}$; $h = \frac{aa}{p}$.

118. Für die berührende Ebene an einer Kugelfläche iſt die Gleichung,

$$px + qy + rz = aa.$$

Auch iſt tang $\eta = -\frac{p}{q}$; tang $\vartheta = \frac{\sqrt{(p^2+q^2)}}{r}$;

$h = \frac{aa}{p}$.

119. Zur Erläuterung dient noch die Zeichnung, (Fig. 86.), wo APB ein Kreis um den Mittelpunct C, in der Ebene der x, y iſt, CM = x oder p; MN = y oder q. In N ſey PN auf den Halbmeſſer CD ſenkrecht, und NP die in P berührende, welche die gerade CD in Q treffe. Das Dreyeck CPQ ſtelle man ſich über CQ ſenkrecht gegen die Ebene des Kreiſes aufgerichtet vor, ſo liegt PQ in der die Kugel in P berührenden Ebene. Wegen der gleichförmigen Krümmung der Kugel macht die berührende Ebene mit CQ auf beiden Seiten gleiche Winkel, oder es iſt CQR ein rechter Winkel, daher CQP der Neigungswinkel der berührenden Ebene gegen die Ebene APB iſt. Nun iſt tang CQP = tang CPN = $\frac{CN}{PN}$ $= \frac{\sqrt{(p^2+q^2)}}{r}$, poſitiv, weil der Winkel die in (4.) angenommene Lage hat. Ferner iſt der W. CRQ = CNM, alſo tang CRQ = $\frac{p}{q}$. Es iſt aber CRQ der Nebenwinkel von QRX = η, alſo tang $\eta = -\frac{p}{q}$. Drittens iſt CM : CN = CQ : CR, und CN : CP = CP : CQ. Daher CM : CP = CP : CR, alſo CR = $\frac{aa}{x}$.

Von der Beſtimmung der Krümmung an jedem Puncte einer krummen Fläche, nach irgend einer gegebenen Durchſchnittsfläche, insbeſondere der größten und kleinſten, in dem Artikel, Krümmungskreis, 63. ff.

Durchſchnittslinien krummer Flächen.

120. Zwey krumme Flächen, welche auf dieſelben coordinirten Ebenen bezogen werden, ſind durch Gleichun-

gen zwiſchen ihren Coordinaten gegeben; es ſoll die krumme Linie gefunden werden, in welcher beide Flächen einander ſchneiden.

Dieſe krumme Linie wird gewöhnlich eine von doppelter Krümmung ſeyn. Deßwegen iſt es nöthig, zwey Gleichungen für ſie zu ſuchen, zwiſchen zwey Paaren der Coordinaten x, y, z. Die Aufgabe iſt dieſelbe mit der Eliminations-Aufgabe. Die Gleichungen für die beiden Flächen ſeyn $V = 0$; $U = 0$. In den gemeinſchaftlichen Puncten ſind die drey Coordinaten beider Flächen dieſelben, in andern Puncten ſind ſie verſchieden, oder nur zwey einander gleich. Schafft man eine der Coordinaten, als z, weg, ſo wird eine Gleichung zwiſchen den beiden andern, x, y, erhalten. Wird für eine dieſer, als x, die andere, y, der Gleichung gemäß beſtimmt, ſo geben dieſe Werthe von x und y in beiden Gleichungen, $V = 0$; $U = 0$, denſelben Werth von z. Denn die Wegſchaffung von z ſetzte voraus, daß die Werthe von z gleich ſind.

121. Die Gleichung zwiſchen x und y iſt die Gleichung für die Projection der Durchſchnittslinie beider Flächen auf die Ebene der x, y. Eben ſo iſt die Gleichung zwiſchen x und z oder y und z diejenige für die Projection auf die Ebene der x, z oder y, z. Zwey dieſer drey Gleichungen beſtimmen die Curve, indem die dritte eine Folge von den beiden andern iſt.

Beyſpiele werden dieſes Verfahren ohne weitere Theorie hinlänglich aufklären.

122. Exempel. I. Die Durchſchnittslinie einer Kugel und eines ſenkrechten Cylinders zu finden. — Die Ebene der x, y ſey ſenkrecht auf die Axe des Cylinders, und der Schnitt des Cylinders von dieſer Ebene gehe durch den Mittelpunct der Kugel. Der Anfang der Coordinaten ſey in eben dieſem Puncte. Dieſe erleichternde Beſtimmung der Lage verändert im Weſentlichen nichts. Der Halbmeſſer der Kugel ſey $= a$; des Cylinders $= b$. Die Gleichung für die Kugelfläche iſt

$$x^2 + y^2 + z^2 = aa \qquad (72.);$$

Die Gleichung für den Querſchnitt des Cylinders iſt

$$2bx - xx = yy.$$

Jedes z, das mit einem x und zugehörigen y an dieſem Schnitte verbunden wird, giebt einen Punct der Cylinderfläche. Die Gleichung gilt für die Projection der Durchſchnittslinie beider krummen Flächen auf die Ebene der x, y.

Man laſſe nun die Ordinate y für beide Flächen dieſelbe ſeyn, ſo iſt, was ſie auch ſeyn mag,

$$zz = aa - 2bx.$$

Dieſe Gleichung gehört für eine Parabel, deren Parameter $= 2b$, und in welcher der Abſtand des Scheitels vom Anfange der Abſciſſen $= + \frac{aa}{2b}$ iſt. Sie iſt die Projection des Schnittes beider Flächen auf die Ebene der x, z. Die Ordinate z muß ſo wohl negativ als poſitiv genommen werden, da auf beiden Seiten der Ebene der x, y Kugel und Cylinder ſich ſchneiden. Die Durchſchnittslinien hängen zuſammen, wenn $a = 2b$ iſt. Größer als a, oder größer als 2b, wenn 2b kleiner als a iſt, kann x nicht genommen werden. Die Curve auf beiden Flächen iſt zwar geſchloſſen, wird aber hier durch einen paraboliſchen Bogen entworfen, der für beide Theile auf beiden Seiten der Ebene der x, z gilt.

Man ſieht leicht, daß auf der Ebene der y, z die Durchſchnittslinien beider Flächen ſo wohl diesſeits als jenſeits der Ebene der x, y durch eine geſchloſſene Figur entworfen werden müſſen. Die Gleichung für dieſe wird erhalten, wenn x weggeſchafft wird. Da $x = \frac{aa - zz}{2b}$ iſt, ſo iſt

$$\frac{(aa - zz)^2}{4b^2} + y^2 + z^2 = aa,$$

das iſt

$$z^4 - 2(a^2 - 2b^2)z^2 + 4b^2y^2 + a^4 - 4a^2b^2 = 0.$$

Daraus iſt

$$z^2 = a^2 - 2b^2 \pm 2b\sqrt{(b^2 - y^2)}.$$

Es hat z. vier Werthe, von welchen zwey und zwey ſich gleich und entgegengeſetzt ſind.

123. Exempel. II. Die Durchſchnittslinie zweyer cylindriſchen Flächen zu finden, deren Axen ſich ſenkrecht ſchneiden, und auch ſenkrecht auf die Grundfläche, die Kreiſe ſind, ſtehen. — Die Axen der beiden Cylinder ſeyn die Axen der x und y; der Halbmeſſer des erſtern ſey a, des andern b. Die Projection der erſtern Fläche auf die Ebene der y, z iſt ein Kreis, für welchen iſt $y^2 + z^2 = a^2$. Für die Projection des andern auf die Ebene der x, z iſt, $x^2 + z^2 = b^2$. Dieſe ſind zugleich die Projectionen der Durchſchnittslinien auf die beiden Ebenen. Daraus wird für die Projection der Durchſchnittslinie auf die Ebene der x, y, wegen der gemeinſchaftlichen z an beiden Flächen, die Gleichung, $x^2 - y^2 = b^2 - a^2$, oder $y^2 - x^2 = a^2 - b^2$, wenn a größer als b iſt. Dieſes iſt die Gleichung für eine gleichſeitige Hyperbel. (Hyperbel, 3. u. 31.). Das Quadrat jeder der halben Axen iſt hier $b^2 - a^2$ oder $a^2 - b^2$. Die Hauptaxe und die Scheitelpuncte liegen in jenem Falle auf der Axe der x, in dieſem auf der Axe der y. Eine cylindriſche Fläche, die über dem hyperboliſchen Bogen ſenkrecht auf ihre Ebene errichtet wird, begegnet den beiden circular-cylindriſchen Flächen in ihrem Durchſchnitte.

Wenn die Cylinder ungleich ſind, ſo bleibt auf dem größern über dem kleinern um die Axe der z ein Stück der Fläche übrig. Iſt a = b, ſo treffen ſich beide Durchſchnittslinien in der Axe der z. Es iſt nun für jeden Punct derſelben x = y, ihre Projection eine gerade Linie. Auf dieſer nehme man die Abſciſſe $t = x\sqrt{2}$, oder $t = y\sqrt{2}$, (da $x^2 + y^2 = t^2$), ſo iſt $t^2 + 2z^2 = 2a^2$. Dieſes iſt die Gleichung für eine Ellipſe, deren halbe große Axe $= a\sqrt{2}$, und halbe kleine Axe = a iſt. (Ellipſe, 4.).

Wenn die Cylinder ſchiefwinklichte ſind, ſo ſind die Projectionen ihrer Grundflächen Ellipſen. Dieſes macht die Rechnung nur etwas umſtändlicher. So auch, wenn

die Axen der Cylinder ſich unter einem ſchiefen Winkel ſchneiden. Übrigens ſieht man hieraus, wie geſchmeidig ſich die Berechnung der Kreuzgewölbe und Gewölbeöffnungen (Lunettes) durch die hier angewandte Methode machen läßt. Die Kloſtergewölbe werden auf dieſelbe Art berechnet. Man mag hiemit noch vergleichen eine Abhandlung von Käſtner: Cylindrorum rectorum se decussantium Sectiones ad Geometriam fornicum relatae. Commentatt. Soc. Götting Vol. X.

124. Exempel. III. Die Durchſchnittslinie eines ſenkrechten Kegels und eines circulären Paraboloids zu finden, deren Axe in dem gemeinſchaftlichen Scheitelpuncte ſenkrecht auf einander ſtehen.

Den Scheitelpunct nehme man zum Anfangspuncte der Coordinaten; die Axe des Kegels ſey die Axe der x; die Höhe verhalte ſich zum Halbmeſſer der Grundfläche wie 1:m, ſo iſt die Gleichung für die Kegelfläche (35.)

$$y^2 + z^2 = m^2x^2,$$

und für die Fläche des Paraboloids (87.)

$$x^2 + z^2 = ay,$$

weil hier x und y mit einander zu vertauſchen ſind, da die Axe der y hier die Axe des Paraboloids iſt. Die Elimination von z giebt für die Projection auf die Ebene der x, y die Gleichung,

$$y^2 + ay = (m^2 + 1)x^2.$$

Sie iſt alſo eine Hyperbel, deren Hauptaxe = a, und Parameter $= \frac{a}{m^2+1}$ iſt. Ihre Hauptaxe liegt in der Axe der y, und der eine Scheitelpunct liegt in dem Anfangspuncte der Coordinaten.

Die Elimination von x giebt die Gleichung für die Projection auf die Ebene der y, z, nämlich

$$m^2ay - y^2 = (m^2 + 1)z^2.$$

Dieſe iſt alſo eine Ellipſe, worin $m^2 a$ die große Axe, und $\frac{m^2 a}{m^2+1}$ der Parameter iſt. Die Ordinaten y werden auf der großen Axe von dem Scheitel an genommen. Die Gleichung für eine Ellipſe, wenn die Abſciſſen auf der kleinen Axe genommen werden, hat zwar eben die Form, aber der Coefficient von z^2 iſt dann kleiner als die Einheit.

Die Gleichung für die Projection auf die Ebene der x, z iſt

$$x^4 + z^4 + 2x^2 z^2 + a^2 z^2 - m^2 a^2 x^2 = 0.$$

125. Exempel. IV. Die Gleichungen für die Durchſchnittslinie einer Kugel und eines Kegels zu finden.

Der Mittelpunct der Kugel ſey zugleich derjenige der Grundfläche des Kegels, und auch der Anfang der gemeinſchaftlichen Coordinaten. Die Coordinaten zu dem Scheitelpuncte des Kegels ſeyn a, b, c; der Halbmeſſer ſeiner Grundfläche $= r$; der Kugel $= R$. Es iſt nun die Gleichung für die Kegelfläche (30.)

$$\left(\frac{az-cx}{c-z}\right)^2 + \left(\frac{bz-cy}{c-z}\right)^2 = r^2,$$

und für die Kugelfläche (72.)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Jene entwickelt iſt

$$(a^2 + b^2 - r^2)\,z^2 + c^2 y^2 + c^2 x^2 - 2acxz \\ - 2bcyz + 2cr^2 z - c^2 r^2 = 0.$$

Man nehme $b = 0$, welches nichts anders iſt, als die Axe der x durch den Grundpunct des Scheitels legen, und es iſt die Gleichung für die Kegelfläche,

$$(a^2 - r^2)\,z^2 + c^2 y^2 + c^2 x^2 - 2acxz \\ + 2cr^2 z - c^2 r^2 = 0.$$

Da $y^2 + x^2 = R^2 - z^2$, ſo iſt für die Projection auf die Ebene der x, z die Gleichung

$$(a^2 - c^2 - r^2)\,z^2 - 2acxz + 2cr^2 z \\ + c^2 (R^2 - r^2) = 0.$$

D

Da in dieſer Gleichung das Quadrat der einen veränderlichen Größe fehlt, ſo gilt ſie für eine Hyperbel, deren Abſciſſenlinie die eine Aſymptote iſt. (Krumme Linien der erſten Claſſe, 33.).

Die Gleichungen für die Projectionen auf die Ebenen der x, y und y, z ſteigen auf den vierten Grad.

Abwickelung krummer Flächen.

126. Von der Abwickelung krummer Flächen iſt ein Beyſpiel an dem Kegel, beſonders dem ſchiefen, ſchon in dem Artikel, Kegel, vorgekommen, auch an dem Cylinder. An dem letzten beſteht die Oberfläche aus einer ſtetigen Folge gerader parallelen Linien, an dem erſtern aus einer ſolchen Folge von geraden, die in demſelben Puncte zuſammen kommen. Darin liegt der Grund, warum ſie ſich abwickeln und in eine ebene Fläche, ohne Dehnung oder Zuſammenziehung, ausbreiten laſſen. Es geſchieht hier daſſelbe, was bey einer nicht ſtetigen Folge von geraden, deren je zwey nächſte eine Ebene begränzen, von welchen aber je drey nicht in einer Ebene liegen, wohl aber je zwey, wenn dieſe nämlich entweder einander parallel ſind, oder ſich in einem gegebenen Puncte ſchneiden. Verwandelt man die ſtumpfen Winkel, welche je zwey an einander ſtoßende Ebenen mit einander machen, in zwey rechte, ſo breiten ſich die gegen einander geneigten Ebenen in eine einzige Ebene aus, die denſelben Flächenraum behält, ſo fern die geraden ihre Längen behalten.

127. Man laſſe den Durchſchnittspunct je zweyer auf einander folgenden geraden veränderlich ſeyn, ſo bleibt doch die Abwickelbarkeit der krummen Fläche.

128. Die Puncte A, B, C, D ... (Fig. 87.) ſeyn die Durchſchnittspuncte der geraden PA, AQ; QB, BR; RC, CS; SD, DT ...., welche alle in einer Ebene liegen. Nun gebe man der Winkelfläche QBR eine Neigung gegen die PAQ, und eben ſo der Winkelfläche RCS gegen QBR; der SDT gegen RCS..... Die Durchſchnittspuncte der geraden bleiben dabey auf dieſen unverrückt, da die Winkelflächen ſich bloß um den ei-

nen Schenkel drehen; allein eben dieſe Puncte bleiben nun nicht mehr in derſelben Ebene. Die beiden erſten, A, B, bleiben noch in der anfänglichen Ebene PAQ, weil QB darin bleibt; allein C liegt nicht mehr in jener Ebene, da die gerade RBC dieſelbe bloß in B trifft. Eben ſo liegt D nicht in der Ebene QBR; u. ſ. f. Je zwey nächſte Winkelflächen haben nur zwey dieſer Durchſchnittspuncte gemein. Man vermehre die Anzahl der geraden Linien ohne Ende, indem ihre Winkel ohne Ende vermindert werden, ſo daß die Folge der geraden Linien eine ſtetige ſey, die nach irgend einem Geſetze beſtimmt werde, und es entſteht eine krumme abwickelbare Fläche. Die Durchſchnittspuncte zweyer nächſten in der ſtetigen Folge liegen auf einer gedoppelt krummen Linie, deren berührende alle in der krummen Fläche liegen.

129. Wird dieſe gedoppelt krumme Linie nach einem gewiſſen Geſetze beſtimmt, ſo wird dadurch die krumme Fläche gegeben. Sie iſt der Ort der berührenden an dieſer gedoppelt krummen Linie.

130. Sind die geraden PA, QB, RC, SD.... Normalen an eine gedoppelt krumme Linie, ſo iſt der Ort der Durchſchnittspuncte je zweyer nächſten Normalen in ihrer ſtetigen Folge eine gedoppelt krumme Linie, eine Evolute höherer Art, zu welcher jene als evolvirende (abwickelnde) gehört. Die Normalen, welche bey einfach krummen Linien in derſelben Ebene bleiben, bilden hier eine krumme Fläche Dieſe Normalen liegen jede in der Krümmungs-Ebene (Krumme Linien von gedoppelter Krümmung, 20.) für jeden Punct der gedoppelt krummen Linie. So wie eine einfach krumme Evolute die Scheidung des ebenen Raums macht, worin die Normalen einer einfach krummen Linie liegen, ſo iſt eine durch die gedoppelt krumme Evolute gelegte cylindriſche Fläche die Scheidewand des Raums, worin die von den Normalen gebildete krumme Fläche liegt. — Monge nennt die gedoppelt krumme Evolute eine Arête de rebrouſſement, weil er ſie mit dem Rückkehrpuncte an einer einfach krummen Linie vergleicht. Die von mir gemachte Vergleichung

ſcheint mir angemeſſener. Das Wort Arête oder Kante bedeutet jede der auf den krummen Flächen, von welchen hier die Rede iſt, gezogene gerade, als Durchſchnittslinie zweyer Ebenen, die einen unendlich kleinen Winkel mit einander machen.

131. Man gedenke ſich (Fig. 87.) auf jede der verſchiedenen Ebenen, PAQ, QBR, RCS... durch die Schenkel der Winkel PA, QB, RC... ſenkrechte Ebenen auf die Winkelflächen, durch PA auf PAQ, durch QB auf QBR, u. ſ. f. Die Durchſchnittslinien dieſer Ebenen, als Ap, Bq, Cr, Ds... bilden eine neue aus Winkelflächen zuſammengeſetzte Fläche. Nämlich die Durchſchnittslinien Ap, Bq liegen beide in der durch BQ ſenkrecht auf QBR geſetzten Ebene; die Bq und Cr beide in der durch CR auf RCS ſenkrechten Ebene, u. ſ. f. Die Durchſchnittspuncte dieſer Linien ſind andere als die Puncte A, B, C, D.... Wird nun die Anzahl der Puncte A, B, C, D... und der Linien PA, QB, RC... unendlich, indem ſie eine ſtetige Folge bilden, ſo fallen die Durchſchnittspuncte der Ap, Bq, Cr, Ds... in die gleichſtelligen A, B, C, D...

132. Dieſe krumme Fläche läßt ſich durch Abwickelung in eine ebene verwandeln. Denn man nehme zuerſt wieder die nicht ſtetige Folge von Puncten, A, B, C, D... Die Ebene PAp werde durch die Drehung um Ap in die Ebene QBq gebracht, oder der ſtumpfe Winkel derſelben werde in zwey rechte verwandelt. Die Ebene QBq, mit der darauf gelegten PAp, werde auf gleiche Art durch die Drehung um Bq in die Ebene RCr gebracht; dieſe mit den darauf befindlichen beiden Ebenen in die SDs, u. ſ. f. So wird die vielkantige Fläche in eine ebene verwandelt. Nimmt man auf AP einen Punct P willkürlich, und BQ = AP + AB; CR = AP + AB + BC; u. ſ. f. ſo wird bey der Abwickelung aus der unebenen Fläche, worauf die geraden AP, BQ, CR... liegen, eine ebene vielſeitige, aus gleichſchenklichten Dreyecken zuſammengeſetzte, ebene Figur gebildet. Nun laſſe man die Folge der Puncte A, B, C, D... eine ſtetige

ſeyn, ſo läßt ſich dieſe auf gleiche Art, wie die vielkantige, abwickeln, und die krumme Fläche, worauf die berührenden an der gedoppelt krummen Linie liegen, wird in eine ebene, durch eine krumme Linie begränzte, Figur verwandelt, wenn man nämlich die Lage des auf AP angenommenen Punctes unverrückt läßt.

133. Alle abwickelbare Flächen können durch eine ſtetige Folge von berührenden an einer gedoppelt krummen Linie, oder die Normalen an einer ſolchen, gebildet werden. Daher kann durch jeden Punct auf einer ſolchen Fläche eine gerade gezogen werden, die ganz in ſie fällt; und zwey ſolche, in der ſtetigen Folge einander nächſte gerade, ſind in einer Ebene, ſo daß ſie entweder ſich parallel ſind, oder ſich ſchneiden. Andere krumme Flächen, die auch durch gerade Linien gebildet werden, wie die in (49—59) betrachteten, laſſen ſich nicht abwickeln.

134. Die krummen Flächen, welche durch Bewegung einer geraden Linie erzeugt werden, auf welchen aber je zwey nächſte gerade nicht in einer Ebene liegen, heißen im Franzöſiſchen surfaces gauches, nach Meusnier in Mém. présentés, T. X. p. 509. Im Deutſchen möchte man ſie windſchiefe nennen.

* * *

Die Unterſuchung der gedoppelt krummen Linien und der krummen Flächen im Allgemeinen iſt von Clairaut begründet worden: denn vor ihm betraf alles hieher gehörige nur beſondere Fälle. Recherches sur les Courbes à double courbure, à Paris 1731. 4to. 119 S. ohne Namen des Verfaſſers. Dieſer iſt 1713 geboren, war alſo bey der Abfaſſung dieſes Originalwerks 16 bis 17 Jahr alt. Es kommen darin auch Unterſuchungen über krumme Flächen vor, vermittelſt ihrer Darſtellung durch Gleichungen.

Euler lieferte eine kurze, aber ſehr lehrreiche Abhandlung über die krummen Flächen, in dem Anhange zu der Introductio in Analysin Infinitorum. Darin insbeſondere über Flächen des zweyten Grades, deren Gattun-

gen er vollſtändig aufzählt. Dieſe liegt auch bey den neueſten Unterſuchungen zum Grunde. Die Abwickelung krummer Flächen unterſuchte er theils an den ſchiefen Kegeln, auch ſolchen, deren Grundfläche kein Kreis iſt; Commentt. novi Acad Petrop. T. I. a. a. 1747, und Nova Acta T III. a. a. 1785, und ganz allgemein in den Comm. novis Petrop. T. XVI. a. a. 1771. Er ſtellt die abwickelbaren Flächen durch zwey Gleichungen mittelſt irgend einer veränderlichen Größe dar. Dieſe heiße φ; und P, Q, R, S ſeyn irgend welche Functionen von φ, ſo doch, daß $\frac{\partial S}{\partial Q} = \frac{\partial R}{\partial P}$ ſey. Dann iſt

$$y = P + Qx; \quad z = R + Sx,$$

wo x, y, z die Coordinaten an die Fläche ſind. Schafft man die Größe φ heraus, ſo wird eine Gleichung für die abwickelbare Fläche erhalten.

Monge übergab der franzöſiſchen Akademie der Wiſſenſchaften im J. 1775 ein Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la Théorie des ombres et pénombres. Mém. présentés, T. IX. Die Abhandlung iſt auch wegen der aus geometriſchen Betrachtungen hergeleiteten Auflöſungen zweyer ſchweren rein analytiſchen Aufgaben wichtig. Die allgemeine Aufgabe über Schatten und Halbſchatten beſteht darin, zwey krumme abwickelbare Flächen zu finden, welche zwey krumme Oberflächen ringsherum berühren, es ſey, daß die beiden Körper immer auf derſelben Seite oder auf verſchiedenen liegen. Auf dieſe Betrachtung hat auch Euler eine ſeiner Auflöſungen über die Abwickelbarkeit gegründet. Noch eine Abhandlung von Monge iſt ſchon im J. 1771 der Akademie übergeben, aber erſt in den X. Band der Mém. présentés eingerückt. Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les différens genres d'inflexions des courbes à doubles courbure. Erweiterung des Begriffs von Evoluten. Auf zwey nächſte be-

rührende an einer einfach krummen Linie werden Ebenen ſenkrecht in den Berührungspuncten gezogen. Auf ihrer Durchſchnittslinie liegt nicht allein der eigentliche Mittelpunct der Krümmung, ſondern jeder Punct derſelben iſt auch ein ſolcher. Einige analytiſche Entwickelungen über Lagen gerader Linien. Vielerley Aufgaben über gedoppelt krumme Linien, von ihrem Krümmungshalbmeſſer, und von den verſchiedenen Arten der Wendungspuncte an ihnen. Von demſelben Verfaſſer iſt noch eine hieher gehörige Abhandlung: Mémoire sur l'expression analytique de la génération des surfaces courbes. Mém. de l'Acad. des Sciences, 1784.

Solution de quelques problêmes relatifs à la théorie des surfaces courbes, et des courbes à double courbure, par M. Tinseau. Mém. présentés. T. IX.

Sur quelques propriétés des solides renfermés par des surfaces composées de lignes droites, par le même, ib.

Mémoire sur la courbure des surfaces, par M. Meusnier. Mém. présentés. T. X.

Feuilles d'Analyse appliquée à la Géométrie, à l'usage de l'école polytechnique, par Gaspard Monge. Paris, An 9. 3 pl. 34 Nummern von halben Bogen groß Format. Ein ſehr tiefſinniges Werk, welches einen großen Begriff von der Lehranſtalt erweckt, für welche es beſtimmt iſt. Die zweyte der vorher genannten Abhandlungen ſeines Verfaſſers iſt darin faſt ganz in den drey letztern Nummern enthalten. Die erſtere iſt auf andere Art darin verwebt. Sonſt noch viele Unterſuchungen über die Natur krummer Flächen, zur Einleitung in ein analytiſches Syſtem über die Lagen gerader Linien. Da dieſes Werk vielleicht zum Unterricht zu ſchwer und umſtändlich gefunden worden iſt, ſo iſt zu dieſem Zweck eine kleinere Schrift abgefaßt, welche den Titel hat:

Application de l'Algèbre à la Géométrie. Des Surfaces du premier et second degré, à l'usage de

l'école polytechnique, par M. M. Monge et Hachette. Paris. XIII. (1805). 52 pag 4. 1 pl.

Essai de Géométrie analytique, appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre, par J. B. Biot. Seconde édit. à Paris, 1805. 300 p. 8. 6 pl.

Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes: (Elémens de Géométrie descriptive.) par S. F. Lacroix, seconde édit.) à Paris An X — 1802. 120 pag. 10 pl. Die Projection gerader und krummer Linien wird darin geometriſch gewieſen.

In dem Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral par Lacroix giebt das V. Capitel einen guten und deutlichen Unterricht von krummen Flächen und gedoppelt krummen Linien, nach der Theorie von Monge. Man ſehe auch Cousin Traité du Calc. diff. etc. p. 181 — 190. und Principia calc diff. et integr. auct. L'Huilier Cap. XV.

Krümmung iſt überhaupt ein gewiſſes Maaß der Abweichung des Krummen von der geraden Linie oder ebenen Fläche, an dem Puncte, wo eine krumme Linie oder krumme Fläche, jene von einer geraden Linie, dieſe von einer Ebene berührt wird. Wir haben dreyerley Krümmungen zu betrachten, an einfach krummen Linien, an gedoppelt krummen Linien, und an krummen Flächen.

1. Die Krümmung eines Bogens einer einfach krummen Linie iſt dem Winkel, welchen die berührenden an den Endpuncten des Bogens mit einander machen, deſto genauer proportional, je kleiner die gleichen Bogen, deren Krümmung verglichen wird, genommen werden. Da der Begriff, Krümmung, eine Beſchaffenheit des Ausgedehnten betrifft, ſelbſt keine Größe iſt, ſo muß derſelbe durch eine mit dieſer Beſchaffenheit verbundene Größe dargeſtellt werden. Es iſt nun die hier gegebene Erklärung als die angemeſſenſte zu rechtfertigen.

2. Daß man gleich große Bogen bey der Vergleichung der Krümmung nehmen müſſe, erhellt ſogleich das

her, weil ein größerer Bogen von der geraden berührenden mehr abweicht als ein kleinerer. Daß es zweytens auf die Lage der an den Endpuncten des Bogens berührenden hier ankommt, ergiebt ſich daher, weil der Punct, durch deſſen Bewegung man eine krumme Linie beſchreiben laſſen kann, ſeine Richtung mehr oder weniger geändert hat, nachdem der Winkel jener berührenden größer oder kleiner iſt, daher die krumme Linie an dieſer Stelle krümmer oder flächer iſt. Allein ein endlicher Winkel der berührenden an einem endlichen Bogen iſt die Summe unendlich vieler unendlich kleinen, in ſtetiger Reihe folgenden Veränderungen der Richtung. Sind nun die Veränderungen der Richtung bey gleichen endlichen Bogen nicht gleich groß, ſo hängt das Verhältniß der Ablenkungswinkel zugleich von der Größe der Bogen ab, indem für denjenigen Bogen, wo die Krümmung mehr zunimmt, der Ablenkungswinkel bey einer größern Länge der gleichen Bogen auch größer wird, als er bey gleichmäßiger Zunahme in Vergleichung mit dem andern geworden ſeyn würde, ſo wie er im entgegengeſetzten Falle kleiner wird. Darum iſt es nothwendig, die Bogen unendlich klein zu nehmen, das iſt, die Länge muß auf die Beſtimmung der Krümmung keinen Einfluß haben. Man ſucht die Krümmung an einem Puncte der Curve, nicht die Summe unendlich vieler unendlich kleinen Ablenkungen.

3. Da bey unendlich kleinen Bogen auch die Ablenkungswinkel der berührenden unendlich klein ſind, ſo iſt es nöthig, endliche Größen zu ſuchen, die dieſen unendlich kleinen Winkeln proportional ſind. An dem Kreiſe ändert der beſchreibende Punct ſeine Richtung durchgehends auf einerley Art. Daher kann man bey Vergleichung der Krümmung verſchiedener Kreiſe endliche Bogen und Winkel gebrauchen. Kann man einen Kreis finden, der mit einem Bogen einer Curve an einem Puncte einerley Krümmung hat, ſo kann man mittelſt der Krümmungen an ſolchen Kreiſen die Krümmung zweyer Bogen an derſelben oder an verſchiedenen Curven vergleichen.

4. Mit den Halbmeſſern AC, BC (Fig. 88.) ſeyn

die gleich großen Bogen AD, BE beſchrieben. Die berührenden in A und D ſchneiden ſich unter dem Winkel DFf, die berührenden an B und E unter dem Winkel EGg. Dieſe Winkel ſind den Winkeln der Halbmeſſer, ACD, BCE gleich. Der Halbmeſſer CD ſchneide den Bogen BE in H, ſo iſt AD : BH = AC : BC, und BH : BE = W. BCH : W. BCE; (Ähnlichkeit, Th. I. S. 15. und Kreis, 10.). Daher wird das Verhältniß der Bogen AD : BE aus den Verhältniſſen der Halbmeſſer AC : BC und der Winkel BCH : BCE, zuſammengeſetzt. Da die Bogen ſich gleich ſind, ſo verhalten ſich die Halbmeſſer umgekehrt wie die zugehörigen Winkel. Die Krümmungen zweyer Kreiſe verhalten ſich alſo umgekehrt wie ihre Halbmeſſer.

5. Die Krümmung einer krummen Linie an irgend einem Puncte verhält ſich daher umgekehrt wie der Halbmeſſer des Kreiſes, der dieſelbe Krümmung mit der krummen Linie an dieſem Puncte hat. Wie dieſer Kreis gefunden werde, zeigt der folgende Artikel.

6. Man kann die Krümmung einer krummen Linie auch unmittelbar mit der Krümmung einer einfachern vergleichen, welche ſich ihr unter allen ihrer Art am meiſten nähert. Man ſehe, was in dem Artikel, berührende Linie, 38, von den paraboliſchen Linien als oſculirenden an einem Bogen einer Curve bemerkt iſt. Insbeſondere dient für höhere krumme Linien die Vergleichung mit dem, als unendlich klein anzuſehenden, Bogen einer höhern Parabel.

7. Es ſey AS (Fig. 89.) ein Bogen einer krummen Linie, M ein Punct derſelben, an welchem TMt die berührende, und ML die darauf ſenkrechte iſt. Von dem Puncte N ſeyn die ſenkrechten NP und Nn auf ML und Mt gezogen. Beſchreibt man durch M und N eine Parabel, deren Are in ML fällt, ſo hat ſie in N dieſelbe Abweichung Nn von der berührenden wie die krumme Linie, und die Krümmungen beider nähern ſich einander deſto mehr, je kleiner der Bogen MN iſt. An der gemei-

nen Parabel iſt der Quotient $\frac{PN^2}{MP}$ eine endliche Grö‑ße, nämlich ihr Parameter. Giebt die Gleichung für die Curve zwiſchen den Coordinaten MP und PN, wenn dieſe unendlich klein genommen werden, eine Gleichung von der Form, $at = u^2$, ſo iſt die Krümmung der Curve in dem Puncte M dieſelbe mit derjenigen einer Parabel, deren Parameter = a iſt, an ihrem Scheitel. Hätte aber die Gränzgleichung die Form, $at^m = u^n$, ſo iſt die‑ſes ſo viel als in jener Gleichung den Parameter a unend‑lich groß oder unendlich klein ſetzen. Die Krümmung der Curve an dem Puncte M kann alsdann nur mit der an ei‑ner höhern Parabel verglichen werden.

8. Die Vergleichung mit der Krümmung einer Pa‑rabel führt zugleich auf die Vergleichung mit einem Kreiſe. Denn wenn PM als Ordinate an einem Kreiſe betrachtet wird, ſo iſt der Quotient $\frac{PN^2}{MP}$ deſto näher der Durchmeſ‑ſer des Kreiſes, je kleiner der Bogen iſt. Alſo iſt der Durchmeſſer des Kreiſes von gleicher Krümmung mit der Curve gleich dem Parameter der gemeinen Parabel, welche die gleiche Krümmung am Scheitel hat. S. Krüm‑mungskreis, 12.

9. D'Alembert wirft in dem Dictionnaire encycl. Partie des Mathem. Art. Courbure die Frage auf, ob man nicht auch ſagen könne, daß ähnliche Bogen ungleicher Kreiſe gleiche Krümmung haben. Das Anfangs geſagte wird das Gegentheil darthun.

Krümmungs‑Halbmeſſer (radius osculi) iſt der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes, ſ. den folgenden Artikel.

Krümmungskreis (circulus curvaturae, osculator) iſt ein Kreis, welcher gleiche Krümmung mit einer krummen Linie an einem gegebenen Puncte derſelben hat. Wenn an die krumme Linie in dieſem Puncte eine

berührende gezogen, und auf dieſe in eben dem Puncte eine ſenkrechte errichtet wird, ſo berührt jeder Kreis, der aus einem Puncte dieſer Normale, als Mittelpunct, durch den Berührungspunct gezogen wird, die krumme Linie. Ein Theil dieſer Kreiſe geht zwiſchen der Curve und der berührenden durch; ein Theil aber liegt dieſſeits der Curve nach dem Mittelpuncte hin. Derjenige Kreis, welcher den Übergang von jenen Kreiſen zu dieſen macht, iſt derjenige, welcher ſich am wenigſten von der Curve entfernt, deſſen Krümmung alſo mit der Krümmung der Curve übereinkommt. Die erſtern, jenſeits der krummen Linie, ſind flächer, die andern dieſſeits ſind krümmer.

1. An der krummen Linie AMS (Fig. 90.) ſey der Winkel der Normale MR mit der Abſciſſenlinie AX, nämlich AGM $= \omega$, der Bogen AM $= s$, der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes $= r$: es iſt $r = \frac{\partial s}{\partial \omega}$.

Man nehme zwey Puncte der krummen Linie, M, N, in einer endlichen Entfernung von einander, ziehe die berührende TMt, VNv, die ſich in m ſchneiden; ſetze auf dieſe die Normalen MR, NR, welche ſich in R begegnen, und die Abſciſſenlinie in G, H ſchneiden. Aus R als Mittelpunct beſchreibe man durch M einen Kreisbogen (hier nicht gezeichneten), welcher entweder dieſſeits oder jenſeits von N die Normale NR trifft. Der Winkel der berührenden an M und N, nämlich TMV iſt gleich dem Winkel MRN, da der Nebenwinkel jenes, nämlich MmN mit MRN zwey rechte ausmacht. Der Winkel der berührenden an dem Kreisbogen in M und N iſt ebenfalls $=$ MRN. Die Ablenkung der Richtungen an dem einen Endpuncte dieſer Bogen von der Richtung an dem andern iſt alſo an der krummen Linie und dem Kreiſe dieſelbe. Da aber dieſe Ablenkung zugleich auf die Länge von MN ankommt, ſo iſt MR nicht der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes, welcher von der Länge des Bogens unabhängig ſeyn muß, um die Krümmung in M bloß durch die zu dieſem Puncte gehörigen Größen anzugeben.

(Krümmung, 2.). Man ſetze AGM $= \omega$; AHN $= \omega + \Delta\omega$, wo ω und $\Delta\omega$ Kreisbogen bedeuten, die mit der Einheit als Halbmeſſer beſchrieben ſind, als Stellvertreter der Winkel. Das Zeichen Δ bedeutet eine endliche Differenz. Es iſt MRN $= \Delta\omega$. Der Bogen MN ſey $= \Delta s$, der Kreisbogen durch M zwiſchen den Normalen ſey $= u$, iſt MR $= \frac{u}{\Delta\omega}$. Es iſt nämlich $\Delta\omega : u = 1 : MR$.

Wenn N näher an M rückt, ſo verrückt ſich der Durchſchnittspunct der Normale NR mit MR, und MR nähert ſich einer gewiſſen Gränze, welche nicht von der Größe des Bogens abhängt. Für dieſe Gränze wird MR $=$ NR, da bey derſelben N in M fällt; und der Bogen MN der krummen Linie wird dem Kreisbogen zwiſchen M und N gleich. Die Gränze von MR ſey $= r$, ſo iſt $r = \frac{\partial s}{\partial\omega}$. Denn da $\frac{\partial s}{\partial\omega}$ die Gränze von $\frac{\Delta s}{\Delta\omega}$, und die von $\frac{u}{\Delta s} = 1$ iſt, ſo iſt die Gränze von $\frac{u}{\Delta\omega}$, das iſt, von $\frac{u}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta\omega}$ der Quotient $\frac{\partial s}{\partial\omega}$. Dieſer Werth von r iſt nun der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes. Ein Kreis aus irgend einem andern Puncte der Normale MR als dem Mittelpuncte dieſes Kreiſes beſchrieben, ſchneidet die Normale NR unter einem ſchiefen Winkel, und geht daher über oder unter N weg, entfernt ſich alſo mehr der von krummen Linie, als der mit dem Halbmeſſer r beſchriebene.

2. Es ſey für die krumme Linie AMS (Fig. 90.) die Abſciſſe AP $= x$; die ſenkrechte Ordinate PM $= y$, der Bogen AM $= s$, der Quotient $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes $= r$; es iſt $r = -(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial p}$.

Es iſt PG die Subnormale für den Punct M, alſo $PG = \frac{y \partial y}{\partial x}$ (berührende Linie, 42.). Da $\tang \omega = \frac{MP}{PG}$ iſt, ſo iſt $\tang \omega = \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{p}$. Nun iſt $\partial \omega = \frac{\partial \tang \omega}{1 + \tang \omega^2}$ (Different. Formeln, 38.), und $\partial \tang \omega = -\frac{\partial p}{pp}$, alſo iſt $\partial \omega = -\frac{\partial p}{1+pp}$. Ferner iſt $\frac{\partial s^2}{\partial x^2} = 1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} = 1 + pp$. Daher $\frac{\partial s}{\partial \omega} = -(1+pp)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial p}$. Da $r = \frac{\partial s}{\partial \omega}$ iſt, ſo iſt $r = -(1+pp)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial p}$.

3. Wenn der Winkel ω und mit demſelben $\tang \omega$ zunimmt, von M nach S hin genommen, ſo nimmt p ab, und ∂p iſt in Beziehung auf ∂x negativ. Daher iſt r poſitiv. In dieſem Falle iſt die krumme Linie gegen die Abſciſſenlinie concav, und der Halbmeſſer der Krümmung hat die Lage wie in der Fig. 90. Iſt die krumme Linie gegen die Axe der Abſciſſen convex, ſo nimmt ω ab, wenn x wächſt, und ∂p iſt poſitiv in Beziehung auf ∂x, (ſ. Concav u. Convex). Der Halbmeſſer der Krümmung iſt negativ, das heißt, er fällt jenſeits der Curve in Beziehung auf die Abſciſſenlinie.

4. Die gefundene Beſtimmung des Krümmungskreiſes beruht darauf, daß ein Kreis durch die Lage zweyer Normalen und den Endpunct auf einer derſelben gegeben wird. Denn ein Kreis wird durch zwey berührende gerade und einen Punct ſeines Umfanges beſtimmt. (Kreis, 85.). Ein Kreis wird aber auch durch drey Puncte ſeines Umfanges gegeben. Nimmt man nun drey Puncte einer Curve in endlichen Abſtänden von einander, ſo entfernt ſich der Kreis durch dieſe Puncte deſto weniger von

der Curve, je näher ſich dieſelben kommen, alſo am wenigſten, wenn ſie ſich unendlich nahe ſind. Nun werden durch drey Puncte die Verhältniſſe der erſten Unterſchiede der Coordinaten und des zweyten gegeben. Sucht man daher die Werthe derſelben unabhängig von der Größe der Unterſchiede ſelbſt, ſo muß ſich daraus der Werth des Halbmeſſers ohne Rückſicht auf die Lage des Mittelpunctes gegen die Axen der Coordinaten herleiten laſſen. Werden die erſten und zweyten Differentialverhältniſſe an dem Kreiſe und der Curve einander gleich geſetzt, ſo haben beide an dem zugehörigen Puncte einerley Krümmung.

5. Es ſey (Fig. 91.) C der Mittelpunct eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer CM = r iſt. Die Abſciſſenlinie ſey AX, und AP = x; die ſenkrechte Ordinate PM = y. Von C ſey BC ſenkrecht auf AX, und CR auf PM. Man ſetze AB = a, BC = b, ſo iſt

$$(a-x)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Die Differentiation giebt hieraus

$$(a-x)\partial x = (y-b)\partial y.$$

Quadrirt man beide Theile, ſo iſt

$$(a-x)^2\partial x^2 = (y-b)^2\partial y^2.$$

Da $r^2\partial x^2 = (a-x)^2\partial x^2 + (y-b)^2\partial x^2$,

$$r^2\partial y^2 = (a-x)^2\partial y^2 + (y-b)^2\partial y^2,$$

ſo iſt

$$r^2\partial x^2 = (y-b)^2(\partial x^2 + \partial y^2),$$
$$r^2\partial y^2 = (a-x)^2(\partial x^2 + \partial y^2).$$

Man differentire die Differentialgleichung noch einmahl, ſo wird

$$(a-x)\partial^2 x - \partial x^2 = (y-b)\partial^2 y + \partial y^2,$$

oder

$$(a-x)\partial^2 x - (y-b)\partial^2 y = \partial x^2 + \partial y^2.$$

Man multiplicire dieſe Gleichung mit $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, und ſetze für $a-x$ und $y-b$ ihre Werthe aus jenen Gleichungen, ſo iſt

$$r(\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y) = (\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}},$$

oder, wenn dieſe Gleichung durch dx^3 dividirt wird,

$$r\left(\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \left(1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Setzt man in dieſe Gleichung für die Differentialquotienten die Werthe derſelben aus der Gleichung für eine Curve LMN, welche mit dem Kreiſe den Punct M gemein hat, ſo kommen dieſe und der Kreis einander ſo nahe als es nur möglich iſt, das iſt, der Kreis mit dem Halbmeſſer r iſt der Krümmungskreis.

6. Die in (5.) gefundene Formel für r kommt mit der in (2.) überein. Denn da $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ iſt, ſo iſt

$$\frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial x^2} = \partial p; \text{ alſo } - r.\frac{\partial p}{\partial x} = (1 + p^2)^{\frac{3}{2}},$$

oder $r = -(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial p}$.

7. Man ſetze $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial s^2$, ſo iſt ∂s das Differential des Bogens s von der Anfangsordinate an genommen. Die Differentialgleichung vom zweyten Grade iſt daraus

$$\partial s \partial^2 s = \partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y.$$

Durch die Subſtitutionen aus dieſen beiden Gleichungen erhält man folgende Formeln für den Halbmeſſer der Krümmung,

$$r = \frac{\partial s^3}{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y}.$$

$$r = \frac{\partial y \partial s^2}{\partial s \partial^2 x - \partial x \partial^2 s}.$$

$$r = \frac{\partial x \partial s^2}{\partial y \partial^2 s - \partial s \partial^2 y}.$$

8. Nimmt man ∂x unveränderlich, ſo daß x ſich gleichförmig verändert, ſo iſt $\partial^2 x = 0$, und

$$r = -\frac{\partial s}{\partial x}\,\frac{\partial s^2}{\partial^2 y} = -\frac{\partial y}{\partial x}\,.\,\frac{\partial s^2}{\partial^2 s}.$$

9. Nimmt man ∂y unveränderlich, ſo iſt

$$r = \frac{\partial s}{\partial y}\,.\,\frac{\partial s^2}{\partial^2 x} = \frac{\partial x}{\partial y}\,.\,\frac{\partial s^2}{\partial^2 s}.$$

10. Setzt man ∂s unveränderlich, ſo iſt

$$r = \frac{\partial y \partial s}{\partial^2 x} = -\frac{\partial x \partial s}{\partial^2 y}.$$

11. Wenn $r = 0$ iſt, ſo iſt die Krümmung größer als an jedem endlichen Kreiſe; iſt $r =$ unendlich groß, ſo iſt die Krümmung kleiner als an jedem endlichen Kreiſe. Das erſte kommt an der Cykloide in ihrem Anfangspuncte vor, Cykloide, XII. Das zweyte an dem Wendungspuncte, wo ein ſolcher vorhanden iſt.

12. An der Parabel den Halbmeſſer der Krümmung anzugeben.

Es ſey AM (Fig. 90.) ein Bogen der Parabel AMS; AX die Axe; die Abſciſſe $AP = x$; die ſenkrechte Ordinate $PM = y$. Ihre Gleichung, $ax = yy$, giebt $a\partial x = 2y\partial y$, alſo $p = \frac{a}{2y}$, und $1 + pp = \frac{aa + 4yy}{4yy} = \frac{a + 4x}{4x}$. Ferner $\partial p = -\frac{a\partial y}{2yy} = -\frac{aa\partial x}{4y^3} = -\left(\frac{a}{y}\right)^3 . \frac{\partial x}{4a} = -\left(\frac{a^2}{y^2}\right)^{\frac{3}{2}} . \frac{\partial x}{4a} = -\left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{3}{2}} . \frac{\partial x}{4a}$. Die Formel für den Halbmeſſer des Krümmungskreiſes iſt $r = -(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} . \frac{\partial x}{\partial p}$, alſo iſt

$$r = (a + 4x)\sqrt{\frac{a + 4x}{4a}}.$$

Am Scheitel iſt der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes $= \frac{1}{2} a$, dem halben Parameter. Dieſes iſt zur Zeichnung dieſer Linie nützlich, da am Scheitel die Krümmung am ſtärkſten und veränderlichſten iſt.

13. Den Krümmungs-Halbmeſſer an einer Ellipſe zu beſtimmen.

Es ſey ADB (Fig. 92.) eine halbe Ellipſe, deren halbe große Axe $AC = BC = a$; halbe kleine $CD = b$, Abſciſſe $CP = x$; Ordinate $PM = y$. Die Gleichung iſt (Ellipſe, 4.),

$$a^2 b^2 - b^2 x^2 = a^2 y^2.$$

Daraus iſt die Differentialgleichung,

$$- b^2 x \partial x = a^2 y \partial y,$$

alſo $p = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ und $1 + p^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^4 y^2}$ $= \frac{b^2 (a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2)}{a^4 y^2}$. Ferner iſt $\partial p = -$ $\frac{b^2 (y \partial x - x \partial y)}{a^2 y^2} = - \frac{b^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2) \partial x}{a^4 y^3} =$ $- \frac{b^4 \partial x}{a^2 y^3}$. Dadurch iſt der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes,

$$r = \frac{(a^4 - (a^2 - b^2) x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}.$$

14. Setzt man $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2$, ſo iſt

$$r = \frac{(a^2 - e^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

15. Am Scheitel der Ellipſe iſt $x = a$, alſo $r = \frac{bb}{a} =$ dem halben Parameter, wie an der Parabel. Daſſelbe gilt auch für die Hyperbel. An dem End-

puncte der kleinen Axe D iſt $x = o$, alſo $r = \frac{aa}{b} =$ dem zu der kleinen Axe gehörigen Parameter. Die Halbmeſſer der Krümmungskreiſe an den Endpuncten der großen und kleinen Axe verhalten ſich wie $b^3 : a^3$, die Krümmungen wie $a^3 : b^3$.

16. In der Geographie wird die Lage eines Ortes auf einem elliptiſchen Meridian nicht durch Abſciſſe und Ordinate, ſondern durch die Breite, das iſt, den Winkel der Normale mit der großen Axe (dem Durchmeſſer des Äquators) angegeben. Deßhalb muß der Krümmungs-Halbmeſſer auch durch eine Function dieſes Winkels ausgedruckt werden. Die Normale (Fig. 92.) ſey MN, welche die große Axe unter dem Winkel $ANM = \omega$ ſchneide. Der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes ſey $MR = r$. Es iſt $\tang \omega = \frac{\partial x}{\partial y}$ (2.), das iſt, $\tang \omega = -\frac{a^2 y}{b^2 x}$,

und $\tang \omega^2 = \frac{a^4 y^2}{b^4 x^2} = \frac{a^4 - a^2 x^2}{b^2 x^2}$; daher

$$x^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2 \tang \omega^2} = \frac{a^4 \cos \omega^2}{a^2 \cos \omega^2 + b^2 \sin \omega^2}.$$

Dadurch iſt $a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2 = \frac{a^4 b^2}{a^2 \cos \omega^2 + b^2 \sin \omega^2}$.

Folglich verwandelt ſich der in (13.) gefundene Werth des Krümmungs-Halbmeſſers in dieſen:

$$r = \frac{a^2 b^2}{(a^2 \cos \omega^2 + b^2 \sin \omega^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Weil $2 \sin \omega^2 = 1 - \cos 2\omega$ iſt, und $2 \cos \omega^2 = 1 + \cos 2\omega$ (Goniometrie, 36.), ſo iſt

$$r = \frac{a^2 b^2}{(\frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

17. Man ſetze $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=n$, und $\frac{a^2b^2}{(\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2)^{\frac{3}{2}}}=f$, welches f der Krümmungs-Halbmeſſer in der Breite von 45° iſt, ſo iſt

$$r=\frac{f}{(1+n\cos 2\omega)^{\frac{3}{2}}}.$$

18. Die Veränderung von r mit der von ω zu vergleichen, differentiire man dieſen Ausdruck. Es iſt $\partial r=\frac{3nf\sin 2\omega}{(1+n\cos 2\omega)^{\frac{5}{2}}}\partial\omega$. Die Zunahme des Krümmungs-Halbmeſſers iſt am größten, wenn $\omega=45°$ iſt, weil für dieſen Winkel der Zähler des Differential-Factors am größten, und der Nenner am kleinſten iſt. Hier iſt ſie auch am gleichförmigſten, da $\sin 2\omega$ ſich wenig ändert, wenn ω ſich auch ſchon merklich von 45° entfernt. Daher kommt der Halbmeſſer der Krümmung in der Breite von 45° dem mittlern ſehr nahe.

19. Verwandelt man den Werth von r in eine Reihe, ſo iſt (binomiſcher Lehrſatz, 8, 12.)

$$r=f\left(1-\frac{3}{2}n\cos 2\omega+\frac{15}{8}n^2\cos 2\omega^2-\frac{105}{48}n^3\cos 2\omega^3+\text{etc.}\right).$$

20. Jn dem zuerſt (16.) gefundenen Werthe von $r=\frac{a^2b^2}{(a^2\cos\omega^2+b^2\sin\omega^2)^{\frac{3}{2}}}$, ſetze man für $\cos\omega^2$ ſeinen Werth, $1-\sin\omega^2$, ſo iſt

$$r=\frac{a^2b^2}{(a^2-(a^2-b^2)\sin\omega^2)^{\frac{3}{2}}}.$$ Es ſey $\frac{a^2-b^2}{a^2}=e^2$, ſo iſt

$$r=\frac{bb}{a}\cdot\frac{1}{(1-e^2\sin\omega^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dieſer Ausdruck in eine Reihe entwickelt giebt

$$r = \frac{bb}{a}\left(1 + \frac{3}{2} e^2 \sin\omega^2 + \frac{15}{8} e^4 \sin\omega^4 + \frac{105}{48} e^6 \sin\omega^6 + \text{etc.}\right)$$

Beide Formeln, dieſe und die vorhergehende, laſſen ſich in Coſinus der geraden Vielfachen von ω auflöſen. Goniometrie, 137 u. 141.

21. Man ſieht aus denſelben, welche Geſtalt eine Reihe haben müſſe, die einer irregulären Curve, welche, wie die Meridiane der Erde, von einer Ellipſe wenig abweicht, angemeſſen ſeyn ſoll. Sie iſt

$$r = A + B\sin\omega^2 + C\sin\omega^4 + \text{etc.}$$

oder

$$r = A - B\cos 2\omega + C\cos 3\omega - \text{etc.}$$

wo ſo viele Werthe von r gegeben werden müſſen, als Coefficienten beſtimmt werden ſollen. Ein Beyſpiel von den Gradmeſſungen ſehe man in dem aſtronom. Jahrbuche für 1788.

22. Wenn a und b wenig von einander verſchieden ſind, ſo iſt $r = f(1 - \frac{3}{2} n \cos 2\omega)$ nahe, oder $r = f(1 - \frac{3}{2} n + 3n \sin\omega^2)$ nahe. Der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes im Scheitel der großen Axe iſt $= f(1 - \frac{3}{2} n)$ nahe. Der Unterſchied dieſes und desjenigen für den Winkel ω iſt $3nf\sin\omega^2$ nahe, oder dem Quadrat des $\sin\omega$ proportional.

Setzt man $b = a - \delta$, ſo iſt $bb = a^2 - 2a\delta$ nahe, und $e^2 = \frac{2\delta}{a}$ nahe, wenn δ gegen a klein iſt. Dadurch wird die Formel in (20.)

$$r = a - 2\delta + 3\delta\sin\omega^2 + \text{etc.}$$

wo die Potenzen von δ weggelaſſen ſind.

23. Aus dem Verhältniſſe zweyer Krümmungs-Halbmeſſer und aus den zugehörigen Winkeln mit der großen Axe das Verhältniß der beiden Axen herzuleiten.

Die Halbmeſſer der Krümmung ſeyn r und ϱ; die zugehörigen Winkel α und β; das Verhältniß $a : b = 1 : m$, oder $b = ma$. Für b ſetze man in dem erſtern Werthe von r (16.) dieſen Werth, ſo wird allgemein

$$r = \frac{m^2 a}{(\cos\omega^2 + m^2 \sin\omega^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für den gegebenen Winkel α bleibe die Bezeichnung des Krümmungs-Halbmeſſers durch r, ſo iſt

$$r = \frac{m^2 a}{(\cos\alpha^2 + m^2 \sin\alpha^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\varrho = \frac{m^2 a}{(\cos\beta^2 + m^2 \sin\beta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Man ſetze $\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{\frac{2}{3}} = q$, ſo iſt

$$q = \frac{\cos\beta^2 + m^2 \sin\beta^2}{\cos\alpha^2 + m^2 \sin\alpha^2}.$$

Hieraus ergiebt ſich

$$m^2 = \frac{q\cos\alpha^2 - \cos\beta^2}{\sin\beta^2 - q\sin\alpha^2}.$$

Iſt m gefunden, ſo wird durch einen der Krümmungs-Halbmeſſer a bekannt, und daraus b.

23*. Die Anwendung von dieſen Formeln iſt in der Geographie bey der Beſtimmung der Geſtalt der Erde. Die Halbmeſſer der Krümmung können zwar nicht unmittelbar gemeſſen, aber doch mit einander, vermittelſt der Bogen von einerley Weite verglichen werden. Es iſt $r = \frac{\partial s}{\partial \omega}$ (1.). Dieſe Gleichung gilt auch noch nahe für kleine endliche Bogen, und endliche Veränderungen der Breite. Oder es iſt $r = \frac{\Delta s}{\Delta \omega}$ nahe. Nimmt man für zwey verſchiedene Bogen $\Delta\omega$ gleich groß, ſo verhalten ſich

die zugehörigen Krümmungs-Halbmeſſer wie die Länge der Bogen. Bey der Anwendung der Formel in 23.) nimmt man die zu einem Bogen gehörige Breite auf der Mitte deſſelben.

24. Eine abgekürzte Formel iſt

$$\frac{a-b}{a} = \frac{r-\rho}{3(r\sin\alpha^2 - \rho\sin\beta^2)}.$$

Denn aus den beiden Formeln in (23.) folgt, wenn für $\cos\alpha^2$ der Werth, $1-\sin\alpha^2$, geſetzt wird,

$$r(1-(1-mm)\sin\alpha^2)^{\frac{3}{2}} = \rho(1-(1-mm)\sin\beta^2)^{\frac{3}{2}}$$

Entwickelt nach dem binomiſchen Lehrſatze, mit Weglaſſung der Potenzen von $\sin\alpha^2$ und $\sin\beta^2$, wird daraus

$$r(1-\tfrac{3}{2}(1-mm)\sin\alpha^2) = \rho(1-\tfrac{3}{2}(-mm)\sin\beta^2.)$$

Da $1-mm = 1-\frac{bb}{aa} = \frac{aa-bb}{aa} = \frac{(a+b)(a-b)}{aa}$,

und $\frac{a+b}{a}$ nahe $= 2$ iſt, ſo iſt $\frac{1}{2}(1-mm) = \frac{a-b}{a}$ nahe. Mittelſt dieſer Subſtitution ergiebt ſich die aufgeſtellte Formel. Sie iſt von Maupertuis in den Mém. de l'Acad. des Sc. 1737 pag. 465. vorgetragen, in der Abhandlung über die Gradmeſſung am Polarkreiſe, in dem beſondern Abdrucke, p. 147.

25. Es iſt $x = a\cos\omega\sqrt[3]{\frac{ar}{bb}}$.

Denn aus dem Beweiſe (16.) iſt

$$x^2 = \frac{a^4\cos\omega^2}{a^2\cos\omega^2 + b^2\sin\omega^2};\ \text{und}$$

$$r = \frac{a^2b^2}{(a^2\cos\omega^2 + b^2\sin\omega^2)^{\frac{3}{2}}}.$$ Jener Gleichung gebe man die Form

$$x^3 = \frac{a^6\cos\omega^3}{(a^2\cos\omega^2 + b^2\sin\omega^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und verbinde ſie mit der zweyten, ſo wird

$$x^3 = \frac{a^4 r \cos\omega^3}{bb},$$

das iſt $x = a\cos\omega \sqrt[3]{\frac{ar}{bb}}$.

26. Aus (20.) iſt $\frac{ar}{bb} = 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin\omega^2 + \text{etc.}$

Setzt man $b = a - \delta$, ſo iſt $e^2 = \frac{2\delta}{a}$ nahe, wenn δ gegen a klein iſt. Daher iſt $\frac{ar}{bb} = 1 + \frac{3\delta}{a} \sin\omega^2$ nahe, und $x = a\cos\omega\,(1 + \frac{\delta}{a} \sin\omega^2)$ nahe.

27. Auf gleiche Art iſt $y = b\sin\omega \sqrt[3]{\frac{br}{aa}}$. Denn vermittelſt der Gleichung für die Ellipſe, $a^2b^2 - b^2x^2 = a^2y^2$, iſt $y^2 = \frac{b^4 \sin\omega^2}{a^2\cos\omega^2 + b^2\sin\omega^2}$, worauf die übrige Rechnung jener ganz ähnlich iſt.

28. Es ſeyn A und B die Halbmeſſer der Krümmung an den Scheiteln der großen und kleinen Axe, ſo iſt $A = \frac{bb}{a}$, und $B = \frac{aa}{b}$ (15.), alſo iſt

$$x = a\cos\omega . \sqrt[3]{\frac{r}{A}}; \qquad y = b\sin\omega . \sqrt[3]{\frac{r}{B}}.$$

29. Der Halbmeſſer der Krümmung verlängert ſchneide die kleine Axe in Q (Fig. 92.); es iſt $MQ = a\sqrt[3]{\frac{ar}{bb}}$.

Denn man ziehe ML parallel mit AC, ſo iſt $ML = PC = x$, und $MQ = \frac{ML}{\cos\omega}$; das iſt, $MQ = a\sqrt[3]{\frac{ar}{bb}} = a\sqrt[3]{\frac{r}{A}}$.

30. Sie ſchneide die große Axe in N; es iſt CN $= \frac{a^2 - b^2}{a} \cos\omega \sqrt[3]{\frac{r}{A}}$.

Denn es iſt $PN = y \cot\omega = b \cos\omega . \sqrt[3]{\frac{r}{B}}$, und $CP = a \cos\omega . \sqrt[3]{\frac{r}{A}}$; alſo $CP : PN = a \sqrt[3]{\frac{r}{A}} : b \sqrt[3]{\frac{r}{B}}$. Da $A : B = b^3 : a^3$, ſo iſt $CP : PN = aa : bb$. Daraus iſt $CP : CN = aa : aa - bb$, und CN $= \frac{aa - bb}{aa} . CP$. Für CP oder x der Werth geſetzt, wird der angegebene Werth für CN erhalten. Vergl. Ellipſe, 33.

31. Hieraus iſt $CQ = \frac{a^2 - b^2}{b} \sin\omega . \sqrt[3]{\frac{r}{B}}$.

Denn es iſt $CQ = CN \operatorname{tang}.\omega = \frac{a^2 - b^2}{a} \sin\omega \sqrt[3]{\frac{r}{A}}$. Man multiplicire vor dem Wurzelzeichen mit $\frac{a}{b}$, und unter dem Wurzelzeichen mit $\frac{b^3}{a^3}$, ſo iſt $CQ = \frac{a^2 - b^2}{b} \times \sin\omega \sqrt[3]{\frac{b^3 r}{a^3 A}} = \frac{a^2 - b^2}{b} \sin\omega \sqrt[3]{\frac{r}{B}}$.

32. Man ziehe von dem Puncte M nach dem Mittelpuncte C die gerade MC, ſo iſt $\operatorname{tang} MCA = \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \operatorname{tang}\omega . \sqrt[3]{\frac{A}{B}}$, oder $\operatorname{tang} MCA = \frac{bb}{aa} \operatorname{tang}\omega$.

33. In der mathematiſchen Geographie und in der Aſtronomie wird von dieſen Sätzen Gebrauch gemacht. Es iſt MQ die Richtung der Schwere, MC der Halbmeſſer für den Ort M, und ML der Halbmeſſer ſeines

Parallelkreiſes. Bey den Gradmeſſungen auf einem ſolchen Kreiſe wird die Formel 25, und ihre Abkürzung, 26, gebraucht. Es iſt nämlich die Abſciſſe x gleich dem Halbmeſſer des Parallelkreiſes für den Ort M.

34. Die Differentialgleichung für eine krumme Linie ſey $P\partial x = Q\partial y$, ſo iſt $p = \frac{P}{Q}$, und $1 + p^2 = \frac{P^2 + Q^2}{Q^2}$. Auch iſt $\partial p = \frac{Q\partial P - P\partial Q}{Q^2}$. Solchergeſtalt iſt

$$r = -\frac{(P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{Q} \cdot \frac{\partial x}{Q\partial P - P\partial Q}.$$

Man ſieht aus dieſer Formel, daß die Berechnung des Krümmungs-Halbmeſſers oft ſehr weitläufig werden muß.

Die Beſchaffenheit der Krümmung an irgend einem Puncte einer krummen Linie zu beurtheilen, iſt ein bequemes Mittel, die Normale zur Abſciſſenlinie zu nehmen, und den Anfang der Abſciſſen in die Curve ſelbſt zu legen, wie jetzt gezeigt werden wird.

35. Es iſt AMV (Fig. 93.) eine krumme Linie, deren rechtwinklichte Coordinaten ſind AP und PM. Der Anfang der Abſciſſen mag, wie es ſich verſteht, auch in jedem andern Puncte genommen ſeyn. In irgend einem Puncte N ſey die Normale NO, welche zur neuen Abſciſſenlinie dienen ſoll, ſo wie die darauf ſenkrechte MS als Ordinate. Aus der Gleichung für die krumme Linie wird die Subnormale QO, oder ihr Verhältniß zu QN, alſo auch das von NO zu NQ durch die Coordinaten AQ, QN, und die unveränderlichen Größen gegeben. Durch den Grundpunct S der Ordinate MS ziehe man RT parallel mit AP, ſo werden, mittelſt der gegebenen Verhältniſſe in dem Dreyeck NQO, durch NS und MS in den mit NQO ähnlichen Dreyecken NRS, STM die RS, RN, ST, TM ausgedruckt. Nun iſt $AP = AQ + RS + ST$, und $MP = NQ + MT - NR$. Solcherge-

ſtalt kann man die Gleichung zwiſchen x und y in eine zwiſchen den Coordinaten t, u verwandeln.

36. Es ſey $AP = x$; $PM = y$; $AQ = x'$; $QN = y'$; $QO = py'$; $NO = qy'$, wobey $q^2 = 1 + p^2$ iſt. Ferner ſey $NS = t$; $MS = u$, ſo iſt

$$RS = \frac{p}{q}t; \quad NR = \frac{1}{q}t;$$

$$ST = \frac{1}{q}u; \quad MT = \frac{p}{q}u.$$

Daraus iſt nun

$$x = x' + \frac{pt + u}{q};$$

$$y = y' + \frac{pu - t}{q}.$$

Setzt man dieſe Werthe von x und y in die Gleichung zwiſchen denſelben, ſo wird eine Gleichung zwiſchen t und u erhalten, von der Form,

$$0 = At + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + \text{etc.}$$

Erſtlich kann kein unveränderliches Glied Statt haben, weil t und u zugleich $= 0$ ſind. Auch ein Glied Bu kann nicht vorhanden ſeyn. Denn die Tangente des Winkels einer berührenden mit der Abſciſſenlinie NO iſt $= \frac{\partial u}{\partial t}$ (berührende Linie, 14). Nun iſt, wenn ein Glied Bu vorhanden iſt, die Differentialgleichung,

$$0 = A\partial t + B\partial u + 2Ct\partial t + Du\partial t + Dt\partial u + \text{etc.}$$

Alſo iſt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{A}{B} - \frac{2C}{B}t - \frac{D}{B}u - \frac{D}{B}\cdot\frac{t\partial u}{\partial t} - \text{etc.}$$

Für $t = 0$ iſt die berührende in N ſenkrecht auf NO als

die Normallinie, alſo $\frac{\partial u}{\partial t}$ unendlich groß, da doch dieſe Gleichung einen endlichen Werth gäbe.

37. Für unendlich kleine Coordinaten t und u wird die Gleichung dieſe, $o = At + Eu^2$, wo A und E entgegengeſetzte Beſchaffenheit haben müſſen. Die Glieder Ct^2 und Dtu verſchwinden gegen At. Die oſculirende Curve in N iſt eine Parabel, deren Parameter iſt $-\frac{A}{E}$, oder ein Kreis, der dieſen Durchmeſſer hat.

38. Wird durch eine Annahme von x′ und y′ der Coefficient $E = o$, und A bleibt endlich, ſo erhält die Gränzgleichung die Form, $o = At + Mu^3$, da alle Glieder, die Producte von t und u enthalten, gegen At verſchwinden, ſo wie alle höhere Potenzen von u gegen u^3. Die Curve hat in dem Puncte, wo ſich dieſes ereignet, einen Wendungspunct, ſo daß ſie nach A hin bey N eine der nach V hin ganz entgegengeſetzte Lage hat, bey welcher t und u negativ werden, in Beziehung auf poſitive NS und MS. Der Halbmeſſer der Krümmung wird hier unendlich groß. Er iſt nämlich $\frac{MS^2}{2NS}$, das iſt . . . .

$$= -\frac{uu}{2Mu^3 : A} = -\frac{A}{2Mu}.$$

39. Wäre auch der Coefficient von u^3 Null, ſo wird die Gränzgleichung, $o = At + Nu^4$. Die Curve liegt nun in N bloß auf der einen Seite der berührenden, und auf beiden Seiten von NO. Der Halbmeſſer der Krümmung iſt wieder unendlich groß. Es ſind in N zwey Bögen, die ſich daſelbſt berühren, weil die Gleichung zwey quadratiſche Factoren hat.

40. Iſt $A = o$ geworden, ſo kann der zweyte Theil, nämlich $Ct^2 + Dtu + Eu^2$ nicht die Gränzgleichung geben, da ein verſchwindendes t gegen u unendlich klein iſt, wegen des rechten Winkels der berührenden in N mit der Abſciſſenlinie NO. Es iſt alſo entweder $Ct^2 = Mu^3$,

oder, wenn $C = 0$ wäre, $Dtu = Mu^3$, das iſt $Dt = Mu^2$.

41. Überhaupt erhält die Gränzgleichung die Form $Mt^m = Nu^n$, wo dreyerley Fälle möglich ſind, erſtlich, wenn m ungerade und n gerade iſt; zweytens, wenn beide Exponenten ungerade ſind; drittens, wenn m gerade und n ungerade iſt. Der Fall, da beide Exponenten gerade wären, fällt weg, weil derſelbe mittelſt der Diviſion durch 2, oder durch eine Potenz von 2, auf einen der drey Fälle zu bringen iſt. In allen drey Fällen iſt n größer als m, da t gegen u in der Gränzgleichung verſchwindet, alſo t^m mit u^m nicht verglichen werden kann, noch weniger mit einer Potenz, u^n, deren Exponent n kleiner als m iſt.

42. In dem erſten Falle, der Punct N mag einfach oder vielfach ſeyn, liegen beide Bogen der Curve NM, Nm auf derſelben Seite der in N berührenden geraden Linie. — In dem zweyten Falle werden Ordinate und Abſciſſe zugleich negativ, und der Bogen Nm liegt auf der andern Seite der berührenden, ſo daß N ein Wendungspunct iſt. — In dem dritten Falle ſind für entgegengeſetzte t die Ordinaten gleichnamig; daher liegen die Bogen NM und Nm auf verſchiedenen Seiten der berührenden, aber auf derſelben Seite der Abſciſſenlinie, ſo daß eine Spitze in N vorhanden iſt.

43. Außer dem Falle, da $Mt = Nu^2$ iſt, iſt der Halbmeſſer der Krümmung entweder unendlich groß, oder unendlich klein, welches beides ſowohl bey einem Wendungspuncte als bey einer Spitze eintreten kann. Da der Halbmeſſer der Krümmung iſt $\frac{MS^2}{2NS}$, ſo iſt er für die oſculirende Curve $= \frac{uu}{2u^{n:m}}\left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{2}u^{\frac{2m-n}{m}} \times \left(\frac{M}{N}\right)^{\frac{2}{m}}$. Iſt $2m > n$, ſo iſt der Krümmungshalbmeſſer unendlich klein; iſt $2m < n$, ſo iſt derſelbe unendlich groß.

44. Daß alle Gleichungen für Coordinaten t und u, wie ſie bisher angenommen ſind, zur Gränzgleichung die zweytheilige $Mt^m = Nu^n$ haben, wo $n > m$ iſt, läßt ſich folgendergeſtalt kurz darthun. Alle höhern Potenzen von t und u verſchwinden in der Gränzgleichung gegen die niedrigſte. Dieſe niedrigſten ſeyn t^m und u^n. Jedes Product, $t^\mu u^\nu$, worin μ größer als m, wenn gleich ν kleiner als n iſt, verſchwindet gegen t^m, da t^μ für ſich ſchon gegen t^m verſchwindet. Setzt man μ kleiner als m, und ν kleiner als n, und nimmt nun an, daß $t^m = \alpha t^\mu u^\nu$ ſey, ſo iſt $t^{m-\mu} = \alpha u^\nu$, und die Gränzgleichung enthält zwey Glieder. Solchergeſtalt dienen die paraboliſchen Linien allgemeiner als der Kreis die Krümmung an jedem Puncte jeder krummen Linie darzuſtellen. Die Gleichungen für transſcendente Curven werden durch Entwicklung in Reihen auf die obige algebraiſche Form gebracht.

Man vergleiche in Euleri Introd. in Anal. Infin. P. II. Cap. XIV. de curvatura linearum curvarum, wo die verſchiedenen Fälle noch mehr aus einander geſetzt werden. Das hier vorgetragene dient ſehr zur Abkürzung. Hieher gehört auch das zwölfte Capitel in Cramers Analyse des courbes algébriques.

Halbmeſſer der Krümmung, wenn die Ordinaten aus einem Puncte gezogen ſind.

45. Es iſt MN (Fig. 94.) ein Bogen einer krummen Linie AMO, an welche aus einem unveränderlichen Puncte C die Ordinaten CM, CN gezogen ſind. Ferner iſt AC eine der Lage nach gegebene gerade Linie durch C, von welcher an die Winkel $ACM = \varphi$; $ACN = \varphi + \Delta\varphi$ gerechnet werden. Die berührenden in M und N ſeyn DMd und ENe, welche ſich in F ſchneiden. Die Normalen in M und N ſind MR, NR, ihr Durchſchnittspunct iſt R. Für den Fall eines nach C hin concaven Bogens liegen die Puncte R und C beide auf derſelben Seite deſſelben, und es iſt, wenn MR und CN ſich in Q ſchneiden,

$$MRN = MQN - QNR,$$ ſo wie
$$MCN = MQN - CMR,$$ daher
$$MRN = MCN - (CNR - CMR)$$ iſt.

Es ſey der Winkel des Radius CM mit der Normale MR, nämlich $CMR = \omega$, ſo iſt $CNR - CMR = \Delta\omega$, indem bey der Angabe einer Differenz immer das vorhergehende Glied einer Folge von Größen von dem nachfolgenden abgezogen wird. So iſt $MRN = \Delta\varphi - \Delta\omega$. Aus dem Puncte R werde mit RM als Halbmeſſer ein Kreisbogen Mn beſchrieben bis an RN, und es ſey $Mn = z$, ſo iſt $MR = \frac{z}{\Delta\varphi - \Delta\omega}$. Es ſind nämlich $\Delta\varphi$, $\Delta\omega$ und z Kreisbogen, die mit der Einheit als Halbmeſſer beſchrieben ſind.

46. Der Winkel MRN iſt gleich dem ſpitzen Winkel DFE der beiden berührenden, und mißt die Krümmung in M deſto genauer, je kleiner dieſer Winkel iſt, daher auch MR deſto genauer der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes wird. Der Halbmeſſer ſelbſt muß, wie anfangs gezeigt worden, von der Größe des Winkels MRN und des Bogens z unabhängig ſeyn. Man drucke den Werth von MR folgendergeſtalt aus: $MR = \frac{z : \Delta s}{\Delta\varphi : \Delta s - \Delta\omega : \Delta s}$. Die Gränze von MR werde, wie oben, durch r bezeichnet. Setzt man dieſe anſtatt MR, ſo müſſen in dem Werthe deſſelben auch die Gränzen der Quotienten geſetzt werden. Dieſe ſind 1; $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$; $\frac{\partial\omega}{\partial s}$, und ſo iſt $r = \frac{1}{\partial\varphi : \partial s - \partial\omega : \partial s}$, das iſt

$$r = \frac{\partial s}{\partial\varphi - \partial\omega}.$$

47. Wenn der Bogen nach C hin convex iſt, ſo iſt $\Delta\omega = MCN + MRN$, wofern auch hier ω den ſpitzen Winkel der CM mit der Normale bedeutet. Für ei-

nen concaven Bogen iſt gefunden $\Delta\omega = MCN - MRN$. Da wir den letztern Fall zum Grunde der Rechnung gelegt haben, ſo iſt MRN in demſelben poſitiv, alſo MRN in dem Falle eines convexen Bogens negativ. Eben ſo iſt daher die Beſchaffenheit der Krümmungshalbmeſſer.

48. Man beſchreibe aus dem Mittelpuncte C mit dem Halbmeſſer CM den Kreisbogen Mm, ſo iſt der Winkel NMm (d. i. der W. dMm) $= CMR = \omega$. Man ſetze $CM = u$, ſo iſt der Bogen $Mm = u\Delta\varphi$, und die Gränze von $\Delta s : u\Delta\varphi$ iſt ſowohl $\partial s : u\partial\varphi$ als $1 : \cos\omega$. Folglich iſt $\partial s . \cos\omega = u\partial\varphi$. Ferner iſt die Gränze von $\Delta s : \Delta u$ ſowohl $\partial s : \partial u$, als $1 : \sin\omega$, und daher $\partial s . \sin\omega = \partial u$. Folglich iſt

$$\partial s^2 = u^2\partial\varphi^2 + \partial u^2.$$

49. Da $\sin\omega = \dfrac{\partial u}{\partial s}$, ſo iſt $\partial\omega . \cos\omega$ $= \dfrac{\partial s\partial^2 u - \partial u\partial^2 s}{\partial s^2}$; und da $\cos\omega = \dfrac{u\partial\varphi}{\partial s}$, ſo iſt $\partial\omega = \dfrac{\partial s\partial^2 u - \partial u\partial^2 s}{u\partial s\partial\varphi}$. Hieraus ergiebt ſich vermittelſt (46.)

$$r = \frac{u\partial s^2\partial\varphi}{u\partial s\partial\varphi^2 - \partial s\partial^2 u + \partial u\partial^2 s}.$$

50. Auf gleiche Art wird auch eine Formel erhalten, worin die zweyten Differentiale von s und φ enthalten ſind. Es iſt $\cos\omega = \dfrac{u\partial\varphi}{\partial s}$, alſo $-\sin\omega . \partial\omega =$

$$= \frac{\partial s\partial u\partial\varphi + u\partial s\partial^2\varphi - u\partial\varphi\partial^2 s}{\partial s^2}.$$

Da $\sin\omega = \dfrac{\partial u}{\partial s}$, ſo iſt $-\partial\omega =$ $\dfrac{\partial s\partial u\partial\varphi + u\partial s\partial^2\varphi - u\partial\varphi\partial^2 s}{\partial u\partial s}$. Daher

$$r = \frac{\partial u\partial s^2}{2\partial u\partial s\partial\varphi + u\partial s\partial^2\varphi - u\partial\varphi\partial^2 s}.$$

51. Es iſt noch übrig, eine Formel für r zu ſuchen, in welcher die zweyten Differentiale von u und φ vorkommen. Die Formel (48.), $\partial s^2 = u^2 \partial \varphi^2 + \partial u^2$ verhilft dazu. Sie wird differentiirt dieſe,

$$\partial s \partial^2 s = u \partial u \partial \varphi^2 + u^2 \partial \varphi \partial^2 \varphi + \partial u \partial^2 u,$$

worin die zweyten Differentiale von allen drey Größen s, u, φ vorkommen. Setzt man in den Formeln 49, 50. für eines der zweyten Differentiale den Werth durch die beiden andern aus dieſer Differentialgleichung, ſo läßt ſich, bey gehöriger Auswahl, die geſuchte Formel erhalten. Man multiplicire die Formel für r (49.) im Zähler und Nenner durch ∂s, ſo wird durch den Werth von $\partial u \partial s \partial^2 s$ der Nenner $= u \partial s^2 \partial \varphi^2 - \partial s^2 \partial^2 u + u \partial u^2 \partial \varphi^2 + u^2 \partial u \partial \varphi \partial^2 \varphi + \partial u^2 \partial^2 u$. Da $\partial s^2 - \partial u^2 = u^2 \partial \varphi^2$, ſo iſt der Nenner =

$$2 u \partial u^2 \partial \varphi^2 + u^3 \partial \varphi^4 + u^2 \partial u \partial \varphi \partial^2 \varphi - u^2 \partial^2 u \partial \varphi^2,$$

und der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes,

$$r = \frac{\partial s^3}{2 \partial u^2 \partial \varphi + u^2 \partial \varphi^3 + u \partial u \partial^2 \varphi - u \partial^2 u \partial \varphi}.$$

52. In allen dieſen drey Formeln iſt kein Differential unveränderlich genommen. Läßt man φ gleichförmig wachſen, ſo iſt

$$r = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial s^2}{2 \partial u \partial s - u \partial^2 s}$$

oder

$$r = \frac{\partial s}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial s^2}{2 \partial u^2 + u^2 \partial \varphi^2 - u \partial^2 u}.$$

53. Man laſſe die Area ACM gleichförmig wachſen, ſo iſt aus (50.)

$$r = - \frac{\partial u \partial s^2}{u \partial \varphi \partial^2 s}.$$

Denn das letzte Verhältniß der Zunahme der Area MCN und des Kreisſectors MCm iſt das der Gleichheit. Folg:

Aa

lich iſt das Differential der Area $= \frac{1}{2} u^2 \partial \varphi$. Iſt dieſes unveränderlich, ſo iſt das Differential dieſes Differentials $= 0$, das iſt, $u \partial u \partial \varphi + \frac{1}{2} u^2 \partial^2 \varphi = 0$, oder $2 \partial u \partial \varphi + u \partial^2 \varphi = 0$.

Dieſe Formel wird in der Aſtronomie gebraucht, da die Flächenräume in einem Kegelſchnitte den Zeiten auf den Bogen proportional ſind, und die Zeit als gleichförmig wachſend angenommen wird.

54. Man ziehe von C (Fig. 94.) die ſenkrechte CD auf die in M berührende DM d. Da $CMD = 90° - CMR = 90° - \omega$ iſt, ſo iſt $\sin CMD = \cos \omega$, und $CD = u \cos \omega$, oder $CD = \frac{u^2 \partial \varphi}{\partial s}$, aus (48.).

55. Es ſey $CD = t$, ſo iſt der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes, $r = \frac{u \partial u}{\partial s}$.

Denn, da $t = \frac{u^2 \partial \varphi}{\partial s}$, ſo iſt $\partial t =$

$$(2u \partial u \partial s \partial \varphi + u^2 \partial s \partial^2 \varphi - u^2 \partial \varphi \partial^2 s) : \partial s^2.$$

Dieſes iſt aus (50.) der Werth von $\frac{u \partial u}{r}$. Alſo iſt $r = \frac{u \partial u}{\partial t}$.

56. Aus dem Werthe des Krümmungshalbmeſſers für parallele Ordinaten wird derſelbe für convergirende folgendergeſtalt hergeleitet. Es iſt LMN (Fig. 95.) ein Bogen einer krummen Linie, an welcher die rechtwinklichten Coordinaten $AP = x$; $PM = y$ ſind. Auf der Abſciſſenlinie nehme man einen beſtimmten Punct C, und ziehe $CM = u$, wozu der Winkel $ACM = \varphi$ ſey. Man ſetze $AC = a$, ſo iſt

$$a - x = u \cos \varphi ; \qquad y = u \sin \varphi.$$

Alſo iſt

$$\partial x = u \sin\varphi . \partial\varphi - \cos\varphi . \partial u,$$

$$\partial y = u \cos\varphi . \partial\varphi + \sin\varphi . \partial u;$$

woraus ferner iſt

$$\sin\varphi . \partial x + \cos\varphi . \partial y = u \partial\varphi,$$

$$\sin\varphi . \partial y - \cos\varphi . \partial x = \partial u;$$

und hieraus

$$\sin\varphi . \partial^2 x + \cos\varphi . \partial^2 y = 2\partial u \partial\varphi + u \partial^2\varphi,$$

$$\sin\varphi . \partial^2 y - \cos\varphi . \partial^2 x = - u \partial\varphi^2 + \partial^2 u.$$

Dieſe Gleichungen ſind ganz allgemein, da keine unveränderliche Größe darin vorkommt.

Nun iſt für parallele Ordinaten (7.)

$$r = \frac{\partial s^3}{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y}.$$

Mittelſt der beiden Differentialgleichungen vom erſten Grade iſt

$$\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y = (\cos\varphi . \partial^2 x - \sin\varphi . \partial^2 y) u \partial\varphi$$
$$+ (\sin\varphi . \partial^2 x + \cos\varphi . \partial^2 y) \partial u.$$

Vermittelſt der Differentialgleichungen vom zweyten Grade iſt der zweyte Theil dieſer Gleichung

$$(u \partial\varphi^2 - \partial^2 u) u \partial\varphi + (2\partial u \partial\varphi + u \partial^2\varphi) \partial u.$$

Folglich iſt

$$r = \frac{\partial s^3}{2\partial u^2 \partial\varphi + u^2 \partial\varphi^3 + u \partial u \partial^2\varphi - u \partial^2 u \partial\varphi}.$$

Dieſes iſt die Formel (51.), woraus die beiden andern Formeln folgen.

57. Exempel. An der **archimedeiſchen Spirale** iſt $u = \frac{a\varphi}{2\pi}$, ſo daß $u = 0$ für $\varphi = 0$, und $= a$ nach einem Umlaufe, wenn $\varphi = 2\pi$ iſt, überhaupt dem Winkel mit oder ohne mehrere Umläufe proportional

iſt. Man ſetze zur Abkürzung $\frac{a}{2\pi} = b$, ſo iſt $u = b\,\varphi$. Hier iſt $\partial u = b\,\partial\varphi$. Läßt man φ gleichförmig wachſen, oder nimmt $\partial^2\varphi = 0$, ſo iſt auch $\partial^2 u = 0$. Daher giebt die zweyte Formel (52.) hier $r = \frac{\partial s}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial s^2}{2\,\partial u^2 + u^2\,\partial\varphi^2}$. Es iſt $\partial s^2 = \partial u^2 + u^2\,\partial\varphi^2$ (48.), alſo $\frac{\partial s^2}{\partial u^2} = \frac{b^2 + u^2}{b^2}$, und $\frac{\partial s^2}{\partial\varphi^2} = b^2 + u^2$. Durch die Subſtitution dieſer Werthe wird
$$r = \frac{b^2 + u^2}{2b^2 + u^2} \sqrt{(b^2 + u^2)}.$$
Für $u = 0$, iſt $r = \frac{1}{2} b = \frac{a}{4\pi}$, ſo daß dieſe Spirale gleich mit einer endlichen Krümmung anfängt.

58. Exempel. An der logarithmiſchen Spirale iſt $\varphi = m \log. nat. \frac{u}{a}$. Hieraus iſt $\partial\varphi = \frac{m\,\partial u}{u}$ (Differentialformel, 14.) Läßt man φ gleichförmig wachſen, ſo iſt $0 = u\,\partial^2 u - \partial u^2$, alſo $\partial u^2 = \frac{\partial u^2}{u}$. Ferner iſt $\partial s^2 = \partial u^2 + u^2\,\partial\varphi^2 = (1 + m^2)\,\partial^2 u$. Durch die Subſtitution dieſer Werthe wird die zweyte Formel (52.),
$$r = u \sqrt{\frac{1 + mm}{mm}}.$$
Im Anfange der krummen Linie iſt $r = 0$, und die Krümmung unendlich groß.

Da $\tang CMR = \cot CMD$ (Fig. 94), ſo iſt $\tang CMR$ oder $\tang \omega = \frac{\partial u}{u\,\partial\varphi}$ (54.), und in dem ge-

genwärtigen Falle, $\tang \omega = \frac{1}{m}$. Daher iſt $\partial \omega = 0$,

ſo daß $r = \frac{\partial s}{\partial \varphi}$ (46.) iſt. Dieſes giebt den vorher gefundenen Werth von r noch auf eine etwas leichtere Art.

$$\text{Es iſt } \partial r = \partial u \sqrt{\frac{1+mm}{mm}} = \frac{\partial s}{m}.$$

Die Krümmung der logarithmiſchen Spirale verändert ſich gleichförmig mit dem beſchreibenden Radius oder dem beſchriebenen Bogen.

59. Exempel. Für die Conchoide iſt die Gleichung, wenn die Ordinaten aus dem Pole derſelben gezogen werden,

$$(u - a) \cos\varphi = b.$$

Man ſehe Th. I. S. 530, und Tab. V. Fig. 78., wo AB oder AD = a; CA = b; CM = u; BCM = φ iſt. Um die ganze Conchoide, die untere wie die obere, durch die Drehung des Radius u beſchreiben zu laſſen, muß man für die obere den Winkel φ von 0 bis 90° und von 270° bis 360°, dabey u poſitiv nehmen; dagegen für die untere Conchoide φ von 90° bis 270° geht, und u negativ iſt. In dem Falle, da b kleiner iſt als a, wie in Fig. 79. a. a. O. iſt u für den Knoten CHDGC poſitiv. Alles dieſes verhält ſich an u eben ſo wie an den Secanten der Winkel durch den ganzen Umfang des Kreiſes, (Goniometrie, 10.).

Das Differential ∂φ ſey Conſtant. Es iſt $\cos\varphi = \frac{b}{u-a}$, alſo $\sin\varphi . \partial\varphi = \frac{b\,\partial u}{(u-a)^2}$. Hieraus iſt

$\cos\varphi . \partial\varphi^2 = \frac{b\,\partial^2 u}{(u-a)^2} - \frac{2b\,\partial u^2}{(u-a)^3}$, und mittelſt

der erſten Gleichung, $\partial\varphi^2 = \frac{\partial^2 u}{u-a} - \frac{2\,\partial u^2}{(u-a)^2}$. Da

$\sin\varphi.\partial\varphi = \frac{\cos\varphi.\partial u}{u-a}$, ſo iſt $\frac{\partial u}{u-a} = \tan\varphi.\partial\varphi$, und $\partial^2 u = (u-a)(1+2\tan\varphi^2)\partial\varphi^2$. In der Formel,

$$r = \frac{\partial s^3}{\partial\varphi(2\partial u^2 + u^2\partial\varphi^2 - u\partial^2 u)},$$ wird durch die Subſtitutionen für ∂u und $\partial^2 u$ der Nenner

$$= (au - 2a(u-a)\tan\varphi^2)\partial\varphi^3.$$

Ferner iſt $\partial s^2 = u^2\partial\varphi^2 + \partial u^2 =$ $(u^2 + (u-a)^2\tan\varphi^2)\partial\varphi^2$. Folglich iſt

$$r = \frac{(u^2 + (u-a)^2\tan\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{a(u-2(u-a)\tan\varphi^2)},$$

wo u durch $\cos\varphi$, oder auch $\tan\varphi$ durch u ausgedruckt werden kann.

Der Halbmeſſer der Krümmung wird unendlich groß, wenn $\tan\varphi^2 = \frac{u}{2(u-a)}$ iſt. Da $\tan\varphi^2 = \frac{1-\cos\varphi^2}{\cos\varphi^2}$, und $(u-a)\cos\varphi = b$ iſt, ſo entſteht durch Wegſchaffung von u, zur Beſtimmung der Lage des Radius durch den Wendungspunct, die cubiſche Gleichung,

$$a\cos\varphi^3 + 3b\cos\varphi^2 - 2b = 0.$$

Dieſe Gleichung hat drey mögliche Wurzeln, ſo fern $\cos\varphi$ als eine abſolute Zahl betrachtet wird, wie ſich (Gleichung, 70.) zeigt, wenn das zweyte Glied weggeſchafft worden iſt. Allein damit φ ein möglicher Winkel ſey, muß $\cos\varphi$ kleiner als die Einheit ſeyn. Das ſchränkt die Anzahl der brauchbaren Wurzeln auf zwey oder eine ein, auf zwey in dem Falle, Fig. 78. Tab. V. auf eine in dem Falle Fig. 79. Siehe auch Th. I. S. 536. f. Die Gleichung für y daſelbſt iſt dieſelbe mit der für $\cos\varphi$ hier, weil $y = a\cos\varphi$ iſt. Es iſt dort gefunden, daß die Gleichung, $2b^2 = a^2$, die Scheidungsgränze der Fälle angiebt, in welchen die Gleichung für y drey mögliche Wurzeln oder nur eine hat. Man nehme $2b^2 = a^2$, ſo iſt

$\cos\varphi^3 + 3\cos\varphi^2 \sqrt{\tfrac{1}{2}} - 2\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0$. Es ergiebt ſich ſogleich, daß hier $\cos\varphi = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ iſt. Alſo iſt $\tan\varphi = 1$, und $u = 2a$. Wenn alſo Fig. 79. a. a. O. $AB : AC = \sqrt{2} : 1$ iſt, und $CF = 2AB$ genommen wird, ſo iſt F der Wendungspunct.

Halbmeſſer der Krümmung an gedoppelt krummen Linien.

60. I. Gedoppelt krumme Linien haben an jedem Puncte ihren Krümmungs-Halbmeſſer in der Ebene, in welcher drey nächſte ſtetige Puncte, oder zwey nächſte Elemente derſelben liegen, das iſt in der Krümmungs-Ebene (krumme Linien von gedopp. Krümmung, 22.). Dieſe Ebene wird durch die Formeln für die Winkel η und ϑ, und die Länge h auf der Axe der x, a. a. O. beſtimmt. Zu der gegenwärtigen Rechnung iſt es noch nöthig, den Werth von $\cot\vartheta$, eben ſo wie daſelbſt $\tan\eta$ ausgedruckt iſt, durch die erſten und zweyten Differentiale von x, y, z darzuſtellen.

II. Man ſetze zur Abkürzung

$$(\partial x.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 x)^2 + (\partial y.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 y)^2 = N^2,$$

ſo folgen aus der Formel,

$$\tan\eta = \frac{\partial y.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 y}{\partial x.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 x},$$

die Formeln,

$$\cos\eta = \frac{\partial x.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 x}{N}$$

$$\sin\eta = \frac{\partial y.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 y}{N}.$$

III. Dieſe Werthe ſetze man in die Formel (22.)

$$\cot\vartheta = \frac{\partial y}{\partial z}.\cos\eta - \frac{\partial x}{\partial z}\sin\eta.$$

Allein da N eine Wurzelgröße iſt, ſo ſuche man den Werth von $\cot\vartheta^2$. So ergiebt ſich, mittelſt gewöhnlicher Reductionen,

$$\cot\vartheta = \frac{\partial y . \partial^2 x - \partial x . \partial^2 y}{N}.$$

IV. Auf der Krümmungs-Ebene nehme man nun den Punct, deſſen Coordinaten in Beziehung auf die drey Ebenen der x, y, z, dieſelben ſind mit denen des Punctes der gedoppelt krummen Linie, für welchen der Krümmungs-Halbmeſſer geſucht wird. Die Coordinaten auf der Ebene ſelbſt ſeyn t und u. Die Abſciſſen t werden auf der Durchſchnittslinie mit der Ebene der x, y, von der Axe der x genommen; die u ſind ſenkrecht auf dieſe Linie. Es iſt (krumme Fläche, 15.)

$$t = \frac{\tan\eta}{\tan\vartheta} z + \frac{x - h}{\cos\eta}, \text{ und } u = \frac{z}{\sin\vartheta}.$$

V. Nach der erſten Formel (oben 7.) iſt der Halbmeſſer der Krümmung $r = \frac{\partial s^3}{\partial u . \partial^2 t - \partial t . \partial^2 u}$. Hier ſetze man für die Differentiale von t und u ihre Werthe durch x und z, und ſchaffe die Winkel η und ϑ weg, mittelſt der Werthe von $\tan\eta$ und $\cot\vartheta$, ſo erhält man den Krümmungs-Halbmeſſer für eine einfach krumme Linie, welche drey ſtetige Puncte mit der gedoppelt krummen gemein hat, alſo den geſuchten Krümmungs-Halbmeſſer. Denn durch die mittelſt der Formeln für $\tan\eta$ und $\cot\vartheta$ beſtimmte Lage der Ebene gehören drey ſtetige Ordinaten z ſowohl der gedoppelt krummen Linie als der Ebene zu, und die Endpuncte dieſer Ordinaten z ſind zugleich diejenigen der Ordinaten u.

VI. Die fernere Rechnung hat keine Schwierigkeit. Es iſt

$$\partial t = \frac{\text{tg}\,\eta}{\text{tg}\,\vartheta}\,\partial z + \frac{1}{\cos\eta}\,\partial x;$$

$$\partial^2 t = \frac{\text{tg}\,\eta}{\text{tg}\,\vartheta}\,\partial^2 z + \frac{1}{\cos\eta}\,\partial^2 x;$$

$$\partial u = \frac{1}{\sin\vartheta}\,\partial z; \quad \partial^2 u = \frac{1}{\sin\vartheta}\,\partial^2 z.$$

Daraus

$$\partial u . \partial^2 t = \frac{\mathrm{tg}\,\eta}{\mathrm{tg}\,\vartheta . \sin\vartheta}\,\partial z . \partial^2 z + \frac{1}{\cos\eta . \sin\vartheta}\,\partial z . \partial^2 x$$

$$\partial t . \partial^2 u = \frac{\mathrm{tg}\,\eta}{\mathrm{tg}\,\vartheta . \sin\vartheta}\,\partial z . \partial^2 z + \frac{1}{\cos\eta . \sin\vartheta}\,\partial x . \partial^2 z.$$

Alſo iſt

$$\partial u . \partial^2 t - \partial t . \partial^2 u = \frac{\partial z . \partial^2 x - \partial x . \partial^2 z}{\cos\eta . \sin\vartheta},$$

und $r = \dfrac{\cos\eta . \sin\vartheta . \partial s^3}{\partial z . \partial^2 x - \partial x . \partial^2 z}$,

wo nur noch $\cos\eta$ und $\sin\vartheta$ durch die Differentiale von x, y, z auszudrucken ſind.

VII. Es iſt $\sin\vartheta^2 = \dfrac{1}{1 + \cot\vartheta^2} =$

$\dfrac{N^2}{N^2 + (\partial y\ \partial^2 x - \partial x . \partial^2 y)^2}$, und

$\cos\eta^2 = \dfrac{(\partial x . \partial^2 z - \partial z . \partial^2 x)^2}{N^2}$. Alſo iſt

$$\cos\eta^2 . \sin\vartheta^2 = \frac{(\partial x . \partial^2 z - \partial z . \partial^2 x)^2}{N^2 + (\partial y . \partial^2 x - \partial x . \partial^2 y)^2}.$$

Folglich iſt, wenn für N^2 der Werth geſetzt wird, $r =$

$$\frac{\partial s^3}{\sqrt{[(\partial x . \partial^2 z - \partial z \partial^2 x)^2 + (\partial y . \partial^2 z - \partial z . \partial^2 y)^2 + (\partial y . \partial^2 x - \partial x . \partial^2 y)^2 .]}}$$

Hier iſt noch kein Differential als unveränderlich angenommen.

VIII. Das Differential ∂s iſt $= \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)}$. Denn die Chorde eines endlichen Bogens iſt $= \sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}$. Das Element eines Bogens und die Chorde deſſelben haben das Verhältniß der Gleichheit. — Oder man ſuche den Werth von $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2)}$ aus den Differentialwerthen, $\partial x = \cos\eta . \partial t - \sin\eta \times \cos\vartheta . \partial u$; $\partial y = \sin\eta . \partial t + \cos\eta . \cos\vartheta . \partial u$; $\partial z = \sin\vartheta . \partial u$, die aus den endlichen Gleichungen für x, y, z (krumme Fläche, 15.) folgen. Eine leichte

Rechnung ergiebt, daß $\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \partial t^2 + \partial u^2$. Es iſt aber $\partial t^2 + \partial u^2 = \partial s^2$, wenn ∂s das Element des Bogens in der ebenen Curve bedeutet.

61. Durch eine andere Rechnung findet la Croix dieſe Formel, Tr. du Calc diff. et intégral. T. I. nr. 353. Monge in den Feuilles d'Analyse, Nr. 34. beſtimmt die Lage des Mittelpuncts der Krümmung an gedoppelt krummen Linien folgendergeſtalt. Man ziehe zwey nächſte Normal-Ebenen auf die Curve, und ziehe von dem einen der Puncte auf den Durchſchnitt dieſer Ebenen eine ſenkrechte, ſo giebt dieſe den Mittelpunct der Krümmung. Auch vergleiche man noch la Grange in der Theorie der analytiſchen Functionen, Nr. 141. ff.

62. Exempel. 1. An einer cylindriſchen Spirale, die mit den Seiten des Cylinders einen gegebenen Winkel macht, den Halbmeſſer der Krümmung zu finden.

Der Halbmeſſer des Cylinders ſey $= a$. Auf dem Halbmeſſer durch den Anfangspunct der Spirale in dem Grundkreiſe nehme man die Abſciſſe x von dem Mittelpuncte aus, darauf die ſenkrechte Ordinate an den Grundkreis $= y$, und durch deren Endpuncte die Ordinate an die Spirale $= z$. Es iſt alſo I. $x^2 + y^2 = a^2$. Das Differential des Kreisbogens iſt $= \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$. Wegen des gegebenen Winkels der Spirale mit der Seite des Cylinders iſt $\partial z : \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = 1 : m$ ein gegebenes Verhältniß, wo m die Tangente jenes Winkels iſt. Es iſt alſo II. $\partial x^2 + \partial y^2 = m^2 \partial z^2$, die zweyte Gleichung für unſere Curve, eine differentielle ſtatt einer endlichen. Aus I. folgt III. $x\partial x + y\partial y = 0$. Aus dieſen drey Gleichungen ergeben ſich

$$\text{IV.}\quad a\partial x = -\, m y \partial z,$$

$$\text{V.}\quad a\partial y = +\, m x \partial z.$$

Die Vorzeichen deuten an, daß die Veränderungen von z und x ungleichnamig, von z und y aber gleichnamig ſind, und mußten dem zufolge ſo genommen werden. Das Differential ∂z ſey conſtant, ſo verändert ſich auch der

Bogen der Spirale gleichförmig. Es iſt nun

$$\text{VI.}\quad a\partial^2 x = -m\partial y\partial z,$$

$$\text{VII.}\quad a\partial^2 y = +m\partial x\partial z.$$

Daraus iſt $a\partial z.\partial^2 x = -m\partial y\partial z^2$; auch $a\partial z.\partial^2 y = +m\partial x\partial z^2$; und $a\partial y.\partial^2 x - a\partial x\partial^2 y = -m\partial y^2\partial z - m\partial x^2\partial z = -m^3\partial z^3$. Dadurch wird in der Formel für den Halbmeſſer der Krümmung der Differentialausdruck unter dem Wurzelzeichen $= \frac{m^2}{a^2} \times (\partial y^2 + \partial x^2)\partial z^4 + \frac{m^6}{a^2}\partial z^6 = \frac{m^4}{a^2}(1+m^2)\partial z^6$.

Der Nenner iſt $= \frac{m^2}{a}(1+m^2)^{\frac{1}{2}}\partial z^3$.

Da $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = (m^2+1)\partial z^2$ iſt (60. VIII.), ſo iſt $\partial s^3 = (m^2+1)^{\frac{3}{2}}\partial z^3$. Der Halbmeſſer an der Krümmung der Spirale iſt daher $= \frac{m^2+1}{m^2}a$.

Der Winkel der Spirale mit der Seite des Cylinders ſey $= \alpha$, ſo iſt der Halbmeſſer der Krümmung $= \frac{a}{\sin\alpha^2}$.

63. Exempel. 2. Die Gleichungen für die gedoppelt krumme Linie ſeyn I. $ax = yy$, und II. $yy + zz = aa$. Sie iſt der Durchſchnitt eines circularen und paraboliſchen Cylinders. (Krumme Linien von gedopp. Krümmung, 4). Aus jenen Gleichungen iſt

$$\text{III.}\quad a\partial x = 2y\partial y;\quad \text{IV.}\quad 2y\partial y + 2z\partial z = 0,$$

oder

$$\text{III.}\quad \partial y = \frac{a}{2y}\partial x;\quad \text{IV.}\quad \partial z = -\frac{a}{2z}\partial x.$$

Man ſetze ∂x conſtant, ſo iſt

$$\text{V. } \partial^2 y = -\frac{a\,\partial x\,\partial y}{2yy} = -\frac{a^2}{4y^3}\,\partial x^2.$$

$$\text{VI. } \partial^2 z = +\frac{a\,\partial x\,\partial z}{2zz} = -\frac{a^2}{4z^3}\,\partial x.$$

Dadurch iſt

$$\partial x.\partial^2 z = -\frac{a^2}{4z^3}\,\partial x^3; \quad \partial x.\partial^2 y = -\frac{a^2}{4y^3}\,\partial x^3.$$

In dem Nenner der Formel für den Krümmungshalbmeſſer iſt

$$(\partial x.\partial^2 z)^2 + (-\partial x.\partial^2 y)^2 = \frac{a^4}{16y^6z^6}(y^6 + z^6)\,\partial x^6.$$

Der übrige Theil daſelbſt iſt

$$(\partial y.\partial^2 z - \partial z.\partial^2 y)^2 = \left(-\frac{a^3}{8y^3z^3}(y^2+z^2)\,\partial x^3\right)^2 = \left(-\frac{a^5}{8y^3z^3}\,\partial x^3\right)^2$$

$$= \frac{a^{10}}{64y^6z^6}\,\partial x^6.$$

Die Differentialgröße unter dem Wurzelzeichen im Nenner iſt alſo

$$\frac{a^4}{64y^6z^6}(a^6 + 4y^6 + 4z^6)\,\partial x^6,$$

und der Nenner ſelbſt =

$$\frac{a^2}{8y^3z^3}(a^6 + 4y^6 + 4z^6)^{\frac{1}{2}}\,\partial x^3.$$

Ferner iſt $\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2$

$$= \left(1 + \frac{a^2}{4y^2} + \frac{a^2}{4z^2}\right)\partial x^2 = \frac{a^4 + 4y^2z^2}{4y^2z^2}\,\partial x^2;$$

und $\partial s^3 = \dfrac{(a^4 + 4y^2z^2)^{\frac{3}{2}}}{8y^3z^3}\,\partial x^3.$

Alſo iſt der Halbmeſſer der Krümmung

$$= \frac{(a^4 + 4y^2z^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2(a^6 + 4y^6 + 4z^6)^{\frac{1}{2}}}.$$

Die krumme Linie iſt auf jeder Seite des paraboliſchen Cylinders eine in ſich zurücklaufende Linie. In dem von der Ebene der x, y entfernteſten Puncte iſt $z = a$ und $y = o$, alſo der Halbmeſſer der Krümmung daſelbſt $= \frac{a}{\sqrt{5}}$. Eben ſo groß iſt derſelbe in dem von der Ebene der y, z entfernteſten Puncte, wo $y = a$ und $z = o$ iſt.

Man bemerke noch, daß $y^6 + z^6 = (y^2 + z^2)(y^4 - y^2z^2 + z^4) = a^2(a^4 - 3y^2z^2)$ iſt. Durch dieſe Umwandlung iſt der Halbmeſſer der Krümmung $= \frac{(a^4 + 4y^2z^2)^{\frac{3}{2}}}{a^3(5a^4 - 12y^2z^2)^{\frac{1}{2}}}$. Der Werth deſſelben iſt am größten, wenn $2yz$ am größten iſt. Da $\frac{2yz}{aa}$ der Sinus des gedoppelten Winkels iſt, welchen der Halbmeſſer durch die Projection eines Punctes der Curve mit der Axe der y macht, ſo iſt $2yz$ am größten, wenn $\frac{y}{a}$ der Sinus von 45° iſt, oder für $y = z$. Dieſes giebt $4y^2z^2 = a^4$, und der größte Halbmeſſer der Krümmung an der Curve iſt $= 2a$. Der kleinſte iſt der vorher gefundene $= a\sqrt{\frac{1}{5}}$.

Halbmeſſer der Krümmung an krummen Flächen.

63. Die Krümmung einer krummen Fläche läßt ſich nicht mit der Krümmung einer Kugelfläche vergleichen, wie die Krümmung einer Curve mit der eines Kreiſes. Auf einer Kugelfläche ſind alle Schnitte, welche durch eine auf dieſelbe ſenkrechte gerade Linie, das iſt, durch ihren Durchmeſſer geführt werden, gleich große Kreiſe, und die Krümmung iſt daher nach allen Richtungen dieſelbe. Auf andern krummen Flächen ſind die Schnitte durch eine Normale entweder alle verſchieden, oder nur einige kommen mit einander überein. Bloß an denen Körpern, die durch Drehung entſtehen, läßt ſich die Krümmung an den Po-

len mit der an einer Kugelfläche vergleichen. Man kann alſo nichts anders hier leiſten, als für einen beſtimmten Schnitt die Krümmung auf der Curve des Schnittes in dem gegebenen Puncte angeben, und dann noch diejenigen Puncte ſuchen, in welchen die Krümmung am größten oder kleinſten iſt, nebſt dem Maaße dieſer größten oder kleinſten Krümmung.

64. Eine krumme Fläche hat entweder eine einfache oder doppelte Krümmung. Die erſte Art iſt, wenn alle Schnitte durch eine Normale nach derſelben Gegend hin convex oder concav ſind; die andere, wenn ſie theils convex, theils concav ſind, wie an eingebogenen Flaſchen oder Satteln. Von der erſtern Art der Krümmung iſt hier nur die Frage. Die Möglichkeit einer berührenden Ebene iſt leicht begreiflich. Wie ihre Lage an einer krummen Fläche gefunden wird, iſt in dem Artikel, krumme Fläche, 112—114. gezeigt. Eine berührende Ebene hat entweder nur einen Punct oder eine gerade Linie mit der krummen Fläche gemein. Die auf die berührende Ebene in dem Berührungspuncte ſenkrechte gerade iſt die Normale auf die Fläche. Wie dieſe aus der Gleichung für die berührende Ebene beſtimmt wird, zeigt der Artikel, Linie, 42. Auf einer Kugelfläche geht die Normale durch ihren Mittelpunct. Nimmt man auf der Normale einer krummen Fläche irgend einen Punct zum Mittelpuncte einer Kugel, die durch den Punct der Fläche in der Normale geht, ſo berührt dieſe die Fläche nach allen Richtungen ihrer großen Kreiſe durch den gemeinſchaftlichen Punct, weil beide Flächen nach allen Richtungen auf der berührenden Ebene gemeinſchaftliche berührende gerade haben. Übrigens können einige Kreiſe auf der Kugel zwiſchen der krummen Fläche und der berührenden Ebene durchgehen, andere nicht; oder für alle Kreiſe findet nur das eine oder das andere Statt. Es iſt die Aufgabe, diejenige Kugel zu finden, welche nicht allein eine krumme Fläche in einem gegebenen Puncte berühre, ſondern auch durch ihren Halbmeſſer die Krümmung in einem gegebenen Schnitte durch jenen Punct meſſe.

65. Dieſe Aufgabe aufzulöſen iſt es nöthig, für eine Kugelfläche eine Differentialgleichung vom zweyten Grade zu ſuchen, die von allen zufälligen Beſtimmungen der Lage der Coordinaten frey ſey, alſo außer dem Halbmeſſer nichts anders als die Differentialquotienten des erſten und zweyten Grades enthalte, auf gleiche Art, wie es (5.) für den Kreis geſchehen iſt. Setzt man nun in dem Werthe des Halbmeſſers, der durch dieſe Quotienten ausgedruckt iſt, ihre Werthe aus der Gleichung für eine krümme Fläche, ſo wird der Kugelſchnitt, für welchen die Quotienten gelten, mit dem Schnitte der krummen Fläche in dem Berührungspuncte möglichſt genau übereinkommen, wie ein Krümmungskreis mit einem Bogen einer krummen Linie, und der Halbmeſſer des Kugelſchnittes iſt der Halbmeſſer der Krümmung in dem Schnitte der krummen Fläche an dem mit der Kugel gemeinſchaftlichen Puncte.

66. Die allgemeinſte Gleichung für eine Kugelfläche zu finden, iſt es noch vorher nöthig, die allgemeine Gleichung für eine krumme Fläche durch die Differentialquotienten des erſten und zweyten Grades aufzuſtellen. Es ſey z eine Function von x und y, ſo daß

$$\partial z = P \partial x + Q \partial y$$

iſt, wo P und Q Functionen von x und y ſind, auch von z, ſo fern z eine ungeſonderte Function (functio implicita) von x und y wäre (Function, 7.), oder wenn ∂z in eine Function von z multiplicirt war, die durch die Diviſion abgeſondert iſt. Mit einem andern Ausdruck iſt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Der Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ dient zur Modification des partiellen Differentialquotienten. (Differentialgleichung, 14.). Der Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ iſt als vollſtändig und unabhängig zu

betrachten, weßwegen er auch nicht in Klammern einge-ſchloſſen iſt.

67. Ferner ſey

$$\partial P = p\partial x + q\partial y,$$
$$\partial Q = q'\partial x + r\partial y,$$

ſo iſt $q' = q$ (a. a. O.). Setzt man alſo q ſtatt q', ſo iſt

$$\partial^2 z = p\partial x^2 + 2q\partial x\partial y + r\partial y^2$$
$$+ P\partial^2 x + Q\partial^2 y,$$

wo noch kein Differential als conſtant angenommen iſt. Oder in den Bezeichnungen für partielle Differentiale,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\cdot\frac{\partial y^2}{\partial x^2}$$
$$+ \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

68. Die Coordinaten an die Oberfläche einer Kugel, deren Halbmeſſer $= a$ iſt, ſeyn x, y, z; die Coordinaten an den Mittelpunct ſeyn α, β, γ, ſo iſt (krumme Fläche, 40.)

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = a^2.$$

Hieraus iſt die Differentialgleichung des erſten Grades,

$$(x-\alpha)\partial x + (y-\beta)\partial y + (z-\gamma)\partial z = 0.$$

Alſo iſt $P = -\dfrac{x-\alpha}{z-\gamma}$; $Q = -\dfrac{y-\beta}{z-\gamma}$.

69. Die Differentialgleichung des zweyten Grades iſt

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 + (x-\alpha)\partial^2 x + (y-\beta)\partial^2 y$$
$$+ (z-\gamma)\partial^2 z = 0,$$

oder, wenn $x-\alpha$ und $y-\beta$ durch $z-\gamma$ ausgedruckt werden,

$$\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 - (P\partial^2 x + Q\partial^2 y - \partial^2 z)(z-\gamma)$$
$$= 0.$$

Setzt man ∂x conſtant (zufolge Differentialrechnung,

15.), und ſchreibt zur Abkürzung u ſtatt $\frac{\partial y}{\partial x}$, ſo iſt

$$1 + u^2 + (P + Q u)^2 + (p + 2 q u + r u^2)(z - \gamma) = 0,$$

wo noch ſtatt des Factors $z - \gamma$ der Halbmeſſer einzuführen iſt.

70. In der endlichen Gleichung für den Kreis ſetze man ſtatt $x - \alpha$ und $y - \beta$ ihre Werthe durch $z - \gamma$, ſo iſt

$$(P^2 + Q^2 + 1)(z - \gamma)^2 = a^2.$$

Dadurch wird die geſuchte Gleichung für eine Kugelfläche,

$$\frac{a}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}} = - \frac{1 + u^2 + (P + Q u)^2}{p + 2 q u + r u^2}.$$

71. Es iſt $p = - \frac{1 + P^2}{z - \gamma}$; $q = - \frac{P Q}{z - \gamma}$; $r = - \frac{1 + Q^2}{z - \gamma}$. Denn p iſt das partielle Differential von P in Beziehung auf x durch ∂x dividirt. Um es zu erhalten, muß in dem Werthe von P, nämlich $- \frac{x - \alpha}{z - \gamma}$, entweder für $z - \gamma$ deſſen Werth geſetzt werden, oder es wird daſſelbe auf gewöhnliche Art differentiirt, und für $\frac{\partial z}{\partial x}$ der partielle Werth geſetzt. Nach dem letztern Verfahren iſt $\partial P = - \frac{\partial x}{z - \gamma} + \frac{(x - \alpha)\partial z}{(z - \gamma)^2}$, und

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = p = - \frac{\partial x}{z - \gamma} - \frac{(x - \alpha)^2}{(z - \gamma)^3} = - \frac{1 + P^2}{z - \gamma}.$$

72. In der Formel für a (70.) gehören die Quotienten, P, Q, p, q, r, zu einem gegebenen Puncte, und werden durch die Lage deſſelben beſtimmt. Aber der Quotient u oder $\frac{\partial y}{\partial x}$ hängt von der Lage zweyer nächſten

Puncte, oder um es geometriſcher auszudrucken, von der Lage der berührenden geraden ab. Nämlich ſo wie für eine ſchneidende gerade Linie an einer Kugelfläche oder jeder andern krummen die Verhältniſſe $\Delta x : \Delta y : \Delta z$ beiderſeits übereinkommen, ſo ſind für eine berührende die Differentialverhältniſſe $\partial x : \partial y : \partial z$ dieſelben wie für die krumme Fläche. Werden alſo die Quotienten P, Q und einer der p, q, r (die beiden andern werden durch jenen, und durch P und Q beſtimmt,) gegeben, nebſt einem Puncte der Kugel und der Lage der berührenden an demſelben, ſo iſt dadurch der Halbmeſſer der Kugel beſtimmt.

73. Die Coordinaten für den Mittelpunct der Kugel werden, wenn der Halbmeſſer a beſtimmt iſt, durch folgende Gleichungen gefunden:

$$x - \alpha = - \frac{a P}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

$$x - \beta = - \frac{a Q}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

$$x - \gamma = + \frac{a}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}.$$

Denn aus der Gleichung, $(1 + P^2 + Q^2)(z - \gamma)^2 = a^2$ (70.), iſt $z - \gamma = \frac{a}{\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}}$. Daraus folgen die beiden andern Gleichungen, indem blos $z - \gamma$ durch $x - \alpha$ oder $y - \beta$ ausgedruckt wird. Nimmt man $z - \gamma$ negativ, ſo bekommen $x - \alpha$ und $y - \beta$ das Vorzeichen $+$.

74. Es ſey nun eine krumme Fläche durch ihre Gleichung gegeben, aus welcher die Quotienten, P, Q, p, q, r, hergeleitet werden. Dieſe ſind in der Form von den gleichnamigen an einer Kugel zwar verſchieden, doch laſſen ſich die beiden, P und Q, nebſt einem von den dreyen, p, q, r, der Größe nach, mittelſt der willkürlichen, α, β, γ, an der Kugel und der krummen Fläche gleich groß ſetzen. Für die beiden andern bleibt zwar keine freye Größe übrig, al-

lein das Aggregat, $p + 2qu + ru^2$, im Nenner von a, läßt ſich für die Kugel eben ſo groß nehmen, als für die krumme Fläche. Die Quotienten P und Q müſſen aber für beide Flächen auch einzeln dieſelben ſeyn, weil von dieſen die Lage der berührenden Ebene an dem gemeinſchaftlichen Puncte abhängt, welche an beiden Flächen dieſelbe ſeyn muß (krumme Fläche, 113.). Der Quotient u oder $\frac{\partial y}{\partial x}$ iſt derſelbe für beide Flächen, und gehört zugleich zu irgend einer berührenden geraden, die in der berührenden Ebene durch den gegebenen Punct der krummen Fläche gezogen wird. Legt man durch dieſe gerade irgend eine Ebene, außer der berührenden, ſo ſchneidet dieſe die Kugelfläche mit dem Halbmeſſer a, deren Mittelpunct in der Normale an die krumme Fläche genommen wird, in einem Kreiſe, größern oder kleinern, die krumme Fläche aber in einer krummen Linie, zu welcher jener Kreis als Krümmungskreis gehört, weil der Halbmeſſer der Kugel ſo beſtimmt iſt, daß die Differentialquotienten des erſten Grades einzeln übereinſtimmen, die von dem zweyten Grade aber daſſelbe Aggregat, $p + 2qu + ru^2$, geben, wobey auch u in derſelben berührenden geraden übereinkommt.

Für die Kugel kann u jeden Werth erhalten, ohne daß der Halbmeſſer a ſich ändert; allein an der krummen Fläche verändert ſich a mit der Veränderung von u, oder der berührenden geraden, weil die Werthe von p, q, r, einzeln betrachtet, nicht dieſelben für beide Flächen ſind.

75. Anſtatt des Quotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder u, der von der Lage der berührenden geraden abhängt, führe man die Lage der ſchneidenden, durch dieſe berührende gelegten Ebene ein, und zwar derjenigen, welche zugleich durch die Normale geht. Dieſe Lage wird durch zwey Winkel gegeben, denjenigen, unter welchem ſie die Axe der x ſchneidet, und durch ihren Neigungswinkel gegen die Ebene der x, y, oder, um bergmänniſch zu reden, durch ihr Streichen und

Fallen. Der Durchſchnittspunct mit der Axe der x kommt hier nicht in Rechnung, weil dafür die Bedingung eintritt, daß die Ebene durch einen gegebenen Punct gehen ſoll. Die Bedingung, daß die ſchneidende Ebene durch die Normale gehen ſoll, hat zur Folge, daß der Mittelpunct des Krümmungskreiſes in die ſchneidende Ebene zu liegen kommt. Man könnte den Krümmungskreis zwar auch als einen kleinern Kreis betrachten; allein es wäre ein beſchwerlicher Umweg, aus dem zugehörigen Halbmeſſer der Kugel den Halbmeſſer dieſes kleinern Kreiſes herzuleiten.

76. Die Gleichung für die ſchneidende Ebene ſey

$$Ax' - By' + Cz' - D = o,$$

wo die Coordinaten zum Unterſchiede von denen an der krummen Fläche durch Strichelchen ausgezeichnet ſind. In dem Durchſchnitte beider iſt $x' = x$; $y' = y$; $z' = z$, und daher

$$A\partial x - B\partial y + C\partial z = o.$$

An der krummen Fläche iſt $\partial z = P\partial x + Q\partial y$. Daher iſt $P\partial x + Q\partial y = \frac{1}{C}(B\partial y - A\partial x)$. Setzt man $C = 1$, das iſt, wenn man die Quotienten, $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$, durch A und B bezeichnet, ſo iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A + P}{B - Q}.$$

Die Durchſchnittslinie der ſchneidenden Ebene und der Ebene der x, y mache mit der Axe der x den Winkel η, und jene ſey gegen dieſe unter dem Winkel ϑ geneigt, ſo iſt, (Krumme Fläche, 5.), $\frac{A}{B} = \tang \eta$; $A = \sin\eta . \tang\vartheta$; $B = \cos\eta . \tang\vartheta$, nämlich wenn $C = 1$ genommen wird. Dadurch iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin\eta . \tang\vartheta + P}{\cos\eta . \tang\vartheta - Q}.$$

77. Da die ſchneidende Ebene durch den Mittelpunct der Kugel gehen ſoll, ſo findet noch eine Relation zwiſchen den Coefficienten, A, B, C und den Functionen, P, Q, Statt. Es iſt nämlich, da die Coordinaten für den Mittelpunct ſind α, β, γ,

$$A\alpha - B\beta + C\gamma - D = 0,$$

und daher

$$A(x-\alpha) - B(y-\beta) + C(z-\gamma) = 0.$$

Nun iſt $\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = -P$, und $\frac{y-\beta}{z-\gamma} = -Q$, (68.), alſo iſt, wenn wiederum $C = 1$ geſetzt wird,

$$AP - BQ = 1,$$

und

$$P\sin\eta . \tan\vartheta - Q\cos\eta . \tan\vartheta = 1.$$

Die Winkel η und ϑ werden nun einer durch den andern mittelſt der Functionen, P, Q, beſtimmt. Wenn der Schnitt nicht durch den Mittelpunct geführt wird, ſind beide Winkel unabhängig.

78. Die Gleichung für die berührende Ebene iſt (krumme Fläche, 113.)

$$Px + Qy - z = E,$$

wo P und Q als unveränderliche Größen zu betrachten ſind, und E eine Conſtante von der Integration der Gleichung, $P\partial x + Q\partial y - \partial z = 0$, welche durch die Coordinaten in dem Berührungspuncte beſtimmt wird. Da $AP - BQ - 1 = 0$ iſt (77.), ſo iſt der Winkel der ſchneidenden Ebene und der berührenden ein rechter Winkel (Linie, 48.). Jene geht alſo durch die Normale auf die krumme Fläche. Die Kugelfläche hat dieſelbe berührende Ebene, wie die krumme Fläche, weil ihre Differentialgleichung dieſelbe wie für jene iſt, nach den Annahmen in (68. u. 74). Beide krumme Flächen berühren alſo einander (64.).

79. Nun ſetze man in der Formel (70.) für den Halbmeſſer der berührenden Kugel den Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder

u durch die Winkel η und ϑ. Zur Abkürzung ſey $1 + u^2 + (P + Qu)^2 = M$, und $p + 2qu + ru^2 = N$; ſo daß $a = -\frac{M}{N}\sqrt{(1 + P^2 + Q^2)}$ ſey. Es iſt

$$M = 1 + \frac{(\sin\eta . \operatorname{tang}\vartheta + P)^2}{(\cos\eta . \operatorname{tang}\vartheta - Q)^2} + \frac{(P\cos\eta + Q\sin\eta)^2 \operatorname{tang}\vartheta^2}{(\cos\eta . \operatorname{tang}\vartheta - Q)^2}.$$

Entwickelt man dieſe Brüche, und nimmt ſie mit der Einheit zuſammen, ſo iſt, mit Zuziehung der Gleichung zwiſchen P, Q, η, ϑ in (77.)

$$M = \frac{(1 + P^2 + Q^2)(1 + \operatorname{tang}\vartheta^2)}{(\cos\eta . \operatorname{tang}\vartheta - Q)^2}.$$

Ferner iſt

$$N = [p(\cos\eta . \operatorname{tang}\vartheta - Q)^2 + r(\sin\eta \operatorname{tang}\vartheta + P)^2 + 2q(\sin\eta . \operatorname{tang}\vartheta + P)(\cos\eta . \operatorname{tang}\vartheta - Q)] : (\cos\eta . \operatorname{tang}\vartheta - Q)^2.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner durch $\cos\vartheta^2$, ſo wird

$$a = -(1 + P^2 + Q^2)^{\frac{3}{2}} : [p(\cos\eta . \sin\vartheta - Q\cos\vartheta)^2 + r(\sin\eta . \sin\vartheta + P\cos\vartheta)^2 + 2q(\sin\eta . \sin\vartheta + P\cos\vartheta)(\cos\eta . \sin\vartheta - Q\cos\vartheta)].$$

Dieſes iſt der Werth des Halbmeſſers der Krümmung in dem Schnitte, der durch die Winkel η und ϑ beſtimmt wird (74.).

80. Wenn die ſchneidende Ebene, welche durch den Mittelpunct der Kugel geht, zugleich ſenkrecht auf die Ebene der x, y iſt, ſo iſt

$$a = \frac{-(1 + P^2 + Q^2)^{\frac{3}{2}}}{p\cos\eta^2 + r\sin\eta^2 + 2q\sin\eta . \cos\eta}.$$

Der Winkel η iſt nun ein beſtimmter Winkel, wie es die Natur der Bedingung ergiebt; da durch die Normale und

den Mittelpunct der berührenden Kugel nur eine Ebene gelegt werden kann, wenn der Mittelpunct nicht in der Normale ſelbſt liegt. In dieſem Falle ſind die Ordinaten α, β für den Mittelpunct der Kugel zugleich Coordinaten an die Durchſchnittslinie der ſchneidenden Ebene mit der Ebene der x, y. Daher iſt $A(x-\alpha) - B(y-\beta) = 0$, weil für dieſe Linie $z = 0$ iſt, und die Conſtante in dem Unterſchiede der Gleichungen für die Coordinaten x, y und α, β, heraus geht. Da an der Kugelfläche $P = -\frac{x-\alpha}{z-\gamma}$, und $Q = -\frac{y-\beta}{z-\gamma}$ iſt, ſo iſt $AP - BQ = 0$. Der Winkel η, welchen die gerade Linie, deren Coordinaten α, β ſind, mit der Axe der x macht, wird durch die Gleichung, $\tan\eta = \frac{y-\beta}{x-\alpha}$, beſtimmt, und daher iſt $\tan\eta = \frac{A}{B}$, alſo auch $\tan\eta = \frac{Q}{P}$.

Daraus iſt $\cos\eta = \frac{P}{\sqrt{(P^2+Q^2)}}$,

und $\sin\eta = \frac{Q}{\sqrt{(P^2+Q^2)}}$.

81. Setzt man in (80.) für $\sin\eta$ und $\cos\eta$ dieſe Werthe, ſo iſt

$$a = -\frac{(P^2+Q^2)(1+P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{P^2p+Q^2r+2PQq}.$$

82. Da die Coordinaten-Ebenen willkürlich genommen werden können, ſo nehme man, durch gehörige Veränderung der Coordinaten, die Ebene der x, y ſenkrecht auf die Normale in dem gegebenen Puncte der krummen Fläche, oder parallel mit der berührenden Ebene. Dann iſt in der Formel (80.) der Winkel η ein unabhängiger, welcher jeden Werth erhalten kann. Die Ordinate z iſt in dieſem Falle ein Größtes oder Kleinſtes. Daher iſt in der Projection des Schnittes auf die Ebene der x, z der

partielle Quotient $\frac{\partial z}{\partial x} = o$, eben ſo in der auf die Ebene der y, z der Quotient $\frac{\partial z}{\partial y} = o$, das iſt, $P = o$, $Q = o$. Es iſt alſo, wenn die Normale zugleich ſenkrecht auf die Ebene der x, y iſt,

$$a = \frac{-1}{p \cos \eta^2 + r \sin \eta^2 + 2 q \sin \eta . \cos \eta}.$$

83. Hieraus wird ſehr bequem der größte und kleinſte Werth von a hergeleitet. Dieſe haben zugleich Statt mit dem kleinſten und größten Werthe des Nenners. Da $2 \cos \eta^2 = 1 + \cos 2 \eta$, und $2 \sin \eta^2 = 1 - \cos 2 \eta$, auch $2 \sin \eta . \cos \eta = \sin 2 \eta$ iſt, ſo iſt das Differential des Nenners $= (-p \sin 2 \eta + r \sin 2 \eta + 2 q \cos 2 \eta) \partial \eta$. Dieſes $= o$ geſetzt, ergiebt ſich

$$\tang 2 \eta = \frac{2 q}{p - r}.$$

Es gehört $\tang 2 \eta$ zu zwey Winkeln (Goniometrie, 8.). Nennt man den ſpitzen Winkel ζ, ſo iſt der andere $= 180^\circ + \zeta$, und η iſt ſowohl $= \frac{1}{2} \zeta$ als $= 90^\circ + \frac{1}{2} \zeta$. Der Unterſchied iſt $= 90^\circ$. Folglich ſchneiden ſich die Krümmungskreiſe, deren einer den größten, der andere der kleinſten Halbmeſſer hat, einander unter einem rechten Winkel. Dieſes iſt ein merkwürdiger Fall in der Lehre vom Größten und Kleinſten.

84. Es ſey $2 \eta = \zeta + \varphi$, wo η jeden Werth bekommen kann, und $\tang \zeta = \frac{2 q}{p - r}$ iſt. Der Nenner des Werthes von a in (82.) iſt $= \frac{1}{2}(p + r) + \frac{1}{2}(p - r) \times \cos 2 \eta + q \sin 2 \eta$, durch die in (83.) gebrauchten Subſtitutionen. Setzt man für 2η den Werth durch ζ und φ, ſo wird dieſer Nenner $= \frac{1}{2}(p + r) + \frac{1}{2}(p - r) \times (\cos \zeta . \cos \varphi - \sin \zeta . \sin \varphi) + q (\sin \zeta . \cos \varphi + \cos \zeta . \sin \varphi)$. Da $p - r = 2 q . \cot \zeta = \frac{2 q \cos \zeta}{\sin \zeta}$

iſt, ſo iſt der Nenner $= \frac{1}{2}(p+r) + q\left(\frac{\operatorname{cof}\zeta^2 . \operatorname{cof}\varphi}{\sin\zeta}\right.$ $\left.+ \sin\zeta . \operatorname{cof}\varphi\right) = \frac{1}{2}(p+r) + \frac{q}{\sin\zeta}\operatorname{cof}\varphi$. Folglich iſt der Halbmeſſer der Krümmung bey der Lage des Schnittes nach (82.)

$$a = -\frac{2\sin\zeta}{(p+r)\sin\zeta + 2q\operatorname{cof}\varphi}.$$

Dieſe Formel iſt ebenfalls ſehr merkwürdig, weil ſie zeigt, daß die Krümmung eines Elements einer Fläche ganz von der größten und kleinſten Krümmung abhängt, und dadurch für jeden Winkel φ völlig beſtimmt wird.

85. Exempel. An einem Sphäroid durch Umdrehung in dem Schnitte durch einen gegebenen Punct den Halbmeſſer der Krümmung zu finden.

Es ſey in Fig. 80. an dem daſelbſt abgebildeten Segment eines Sphäroids $AC = f$, $AB = AD = g$, wo f größer oder kleiner als g ſeyn mag. Jenes giebt ein längliches, dieſes ein gedrucktes Sphäroid um die Axe CE. Die Coordinaten an einen Punct der Oberfläche ſeyn $AP = x$, $PQ = y$, $QR = z$. Nun iſt $PM^2 = \frac{g^2}{f^2}(f^2 - x^2)$, und, weil MRN ein Kreisbogen iſt, $y^2 + z^2 = PM^2$, alſo $f^2(y^2 + z^2) = g^2(f^2 - x^2)$, oder

$$g^2x^2 + f^2y^2 + f^2z^2 = f^2g^2.$$

Zur Abkürzung ſey $\frac{g^2}{f^2} = m$, ſo iſt

$$mx^2 + y^2 + z^2 = g^2.$$

Die erſte Differentialgleichung iſt

$$mx\partial x + y\partial y + z\partial z = 0,$$

alſo $P = -\frac{mx}{z}$; $Q = -\frac{y}{z}$. Hieraus werden die partiellen Differentialquotienten p, q, r auf glei-

che Art, wie in (71) für die Kugelfläche hergeleitet. Es iſt nach dem Verfahren in (71.) $\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) = p =$ $-\frac{m}{z} + \frac{mx}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{m}{z} - \frac{m^2x^2}{z^3}$. Ferner iſt $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = q = -\frac{mxy}{z^3}$. Drittens $\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = r = -\frac{1}{z} - \frac{y^2}{z^3}$.

Oder $p = -\frac{m(g^2 - y^2)}{z^3}$; $q = -\frac{mxy}{z^3}$; $r = -\frac{(y^2 + z^2)}{z^3}$.

86. Nimmt man den Punct, durch welchen der Krümmungskreis gezogen werden ſoll, in dem Schnitte CBE, ſo iſt $y = 0$, alſo $P = -\frac{mx}{z}$; $Q = 0$; $p = -\frac{mg^2}{z^3}$; $q = 0$; $r = -\frac{1}{z}$. Daher iſt (79.) der Halbmeſſer der Krümmung

$$a = \frac{-(1 + P^2)^{\frac{3}{2}}}{p\,(\operatorname{coſ}\eta . \sin\vartheta)^2 + r(\sin\eta . \sin\vartheta + P\operatorname{coſ}\vartheta)^2}.$$

Durch die Werthe von P, p, r wird

$$a = \frac{(z^2 + m^2x^2)^{\frac{3}{2}}}{mg^2 . \operatorname{coſ}\eta^2 . \sin\vartheta^2 + (z\sin\eta . \sin\vartheta - mx\operatorname{coſ}\vartheta)^2}.$$

Aus (77.) iſt für dieſen Fall $\operatorname{tang}\vartheta = \frac{1}{P\sin\eta}$ $= -\frac{z}{mx\sin\eta}$, oder $\sin\eta = -\frac{z}{mx}\cot\vartheta$.

87. Wenn die Ebene des Krümmungskreiſes durch CBE gelegt wird, ſo iſt $\eta = 0$, $\vartheta = 90°$, und

$a = (z^2 + m^2x^2)^{\frac{3}{2}} : mg^2$. Da in dieſem Falle $z^2 = g^2 - mx^2 = \frac{g^2}{f^2}(f^2 - x^2)$ iſt, wegen $m = \frac{g^2}{f^2}$, ſo iſt

$$a = \frac{(f^4 - (f^2 - g^2)x^2)^{\frac{3}{2}}}{f^4 g},$$

welches der in (13.) gefundene Werth des Krümmungs-Halbmeſſers an einer Ellipſe iſt. Daſelbſt kann auch a die kleine und b die große Axe bedeuten, wenn die Abſciſſe x auf der kleinen Axe genommen, oder x mit y vertauſcht wird.

88. Setzt man $\eta = 90°$, ſo iſt $\tang \vartheta = -\frac{z}{mx}$, und $\sin \vartheta^2 = \frac{z^2}{m^2x^2 + z^2}$. Der Nenner des Werthes von a in (86.) iſt $= (z \sin \vartheta - mx \cos \vartheta)^2 = (z - mx \cot \vartheta)^2 \sin \vartheta^2 = \left(z + \frac{m^2x^2}{z}\right)^2 \cdot \frac{z^2}{z^2 + m^2x^2} = z^2 + m^2x^2$. Folglich iſt $a = (z^2 + m^2x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Der Halbmeſſer des Parallelkreiſes in M iſt $= z$. Dieſer geht aber nicht durch die Normale in M, oder durch den Mittelpunct der berührenden Kugel.

89. Den größten und kleinſten Krümmungs-Halbmeſſer an einer Ellipſe zu finden.

Der Diviſor in dem Werthe von a (86.) iſt $= mg^2 \cos \eta^2 . \sin \vartheta^2 + (z . \sin \eta . \sin \vartheta - mx \cos \vartheta)^2$. Nun iſt $\sin \eta = -\frac{z}{mx} \cot \vartheta$, alſo der erſte Theil des Diviſors $= mg^2 \sin \vartheta^2 - \frac{g^2 z^2}{mx^2} . \cos \vartheta^2 = mg^2 - \frac{g^2}{mx^2}(m^2x^2 + z^2) \cos \vartheta^2$. Der zweyte Theil deſſelben

iſt $= \frac{(z^2 + m^2 x^2)^2}{m^2 x^2} \cos \vartheta^2$. Folglich iſt der Diviſor $=$ $m g^2 + \frac{z^2 + m^2 x^2}{m^2 x^2} (z^2 + m^2 x^2 - m g^2) \cos \vartheta^2$. Da $z^2 = g^2 - m x^2$ iſt, ſo iſt derſelbe $= m g^2 + \frac{(1 - m) z^2}{m^2 x^2} (z^2 + m^2 x^2) \cos \vartheta^2$. Iſt m kleiner als 1 (für ein länglichtes Sphäroid), ſo iſt der Werth des Diviſors am kleinſten, wenn $\vartheta = 90°$, alſo $\eta = 0$ iſt, und der größte Krümmungs-Halbmeſſer, oder die kleinſte Krümmung gehört zu der Ellipſe CBE. Iſt aber m größer als 1 (für ein gedrucktes Sphäroid), ſo iſt der Diviſor am größten, wenn $\vartheta = 90°$ iſt, und der kleinſte Krümmungs-Halbmeſſer oder die größte Krümmung gehört zu der Ellipſe CBE. Der Schnitt der größten Krümmung in jenem Falle und der kleinſten in dieſem ſteht ſenkrecht auf CBE durch die Normale in M.

90. Den größten Werth, welchen $\cos \vartheta$ haben kann, erhält derſelbe für $\eta = 90°$; wodurch $\cos \vartheta^2 = \frac{m^2 x^2}{m^2 x^2 + z^2}$ wird. Denn aus (86.) iſt $\tang \vartheta = - \frac{z}{m x \sin \eta}$. Folglich iſt der Winkel ϑ am kleinſten, wenn $\eta = 90°$ iſt, wodurch $\cos \vartheta$ am größten iſt.

91. Der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes an der Ellipſe CBE iſt $= \frac{(z^2 + m^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{m g^2}$, nach (87.). Für den auf dieſe ſenkrechten Schnitt iſt $\eta = 90°$ (Ebene, 22), alſo der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes $= (z^2 + m^2 x^2)^{\frac{1}{2}}$, (88.). Es verhält ſich alſo jener zu dieſem, wie $z^2 + m^2 x^2 : m g^2$, oder wie $z^2 + m^2 x^2 : m^2 f^2$.

An dem Scheitelpuncte C iſt $z = 0$, und $x = f$, alſo ſind hier beide Krümmungs-Halbmeſſer einander gleich.

ſo wie alle zwiſchen ihnen liegenden. An dem Puncte B iſt $x = 0$, und $z = g$, daher das Verhältniß $= 1 : m = f^2 : g^2 = \frac{f^2}{g} : g$. Hier iſt $\frac{f^2}{g}$ der Krümmungs-Halbmeſſer an der Ellipſe in B (15), da g der Halbmeſſer des auf CBE ſenkrechten Kreiſes iſt.

92. Dieſe Unterſuchung findet ihre Anwendung in der höhern mathematiſchen Geographie. Wenn die Länge eines Bogens von einem Grade oder ſonſt eines beſtimmten Winkels, ſowohl auf dem elliptiſchen Meridian, als in einem darauf ſenkrechten Bogen in der Ebene durch die Normale gemeſſen wird, ſo läßt ſich daraus das Verhältniß der beiden Axen herleiten.

93. Wenn nämlich ſtatt der Coordinaten x und z die geographiſche Breite ω des Ortes eingeführt wird, ſo iſt $z^2 = \frac{g^4}{g^2 + f^2 \operatorname{tang} \omega^2}$, zufolge der Rechnung in (16.), wenn die Bezeichnungen gehörig vertauſcht werden, da a, b, x, y dort hier g, f, z, x ſind. Setzt man für g^2 den Ausdruck $m f^2$, ſo iſt $z^2 = \frac{m^2 f^2}{m + \operatorname{tang} \omega^2}$. Da $m x^2 = g^2 - z^2$ iſt, ſo iſt

$$z^2 + m^2 x^2 = m g^2 + (1 - m) z^2 = m^2 f^2 + \frac{(1 - m) m^2 f^2}{m + \operatorname{tang} \omega^2} = \frac{m^2 f^2 (1 + \operatorname{tang} \omega^2)}{m + \operatorname{tang} \omega^2},$$

und das Verhältniß der beiden Halbmeſſer der Krümmung auf der Ellipſe CBE und dem darauf ſenkrechten Schnitte iſt $= 1 + \operatorname{tang} \omega^2 : m + \operatorname{tang} \omega^2$. Iſt jenes Verhältniß durch Meſſung bekannt, ſo wird m dadurch beſtimmt.

Geſchichte dieſer Lehre.

94. Über den Durchſchnittspunct zweyer Normalen an den Kegelſchnitten hat Apollonius in dem 5ten Buche ſeines Werks über dieſe Linien Unterſuchungen angeſtellt. Doch kann er nur die Winkelfläche angeben, in welcher dieſer Punct liegt, 40ſter Satz. Er zeigt (49. S.),

daß von einem Puncte der Axe, der um weniger als den halben Parameter von dem Scheitel entlegen iſt, keine Normalen (rectae minimae) unter einem ſpitzen Winkel an einen Kegelſchnitt ſich ziehen laſſen. Dieſes würde darauf führen, daß derjenige Punct auf der Axe, welcher um den halben Parameter von dem Scheitel abſteht, die Gränze der Durchſchnittspuncte der Normalen mit der Axe iſt.

In der Lehre von der Evolution der krummen Linien, welche Huygens zuerſt vorgetragen hat, lag der Grund zur Beſtimmung des Halbmeſſers der Krümmung, da die Evolute der geometriſche Ort der Mittelpuncte der Krümmungskreiſe iſt. Huygens zeigte zwar, oder vielmehr ſuchte zu zeigen, wie zu jeder krummen Linie die Evolute gefunden wird, Horol. oscill. P. III. Prop. XI. Allein er findet nichts allgemeines, ungeachtet er auf neun Seiten ſich darüber verbreitet.

Jakob Bernoulli iſt, ſo viel ich finden kann, der Erfinder unſerer Formeln für den Krümmungs-Halbmeſſer. In einem Aufſatze in den Actis Erud. Ian. 1691; Opp. T. I. Nr. 41. Specimen calculi differentialis, handelt er von der Abwickelung der krummen Linien, und giebt daſelbſt folgende Formel für den Halbmeſſer der Krümmung, worin x die Abſciſſe, y die Ordinate, q die Subtangente iſt: $r = \frac{(y\partial y + q\partial x)\sqrt{(qq+yy)}}{y\partial q - q\partial y}$. Man bemerke, daß $q = \frac{y\partial x}{\partial y} = \frac{y}{p}$, und $\partial q = \frac{p\partial y - y\partial p}{pp}$ iſt, ſo wird $r = -\frac{(p\partial y + \partial x)\sqrt{(1+pp)}}{\partial p} = -(1+pp)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\partial x}{\partial p}$. Im J. 1694. A. E. Jun. Opp. T. I. Nr. 58. gab er bequemere Formeln, gerade die (8. 10.), die er auf eine leichte Art findet. Zugleich liefert er eine Formel für Ordinaten, die aus einem Puncte gezogen ſind, ſo fern eines der Differentiale, ∂x, ∂y, ∂s

conſtant geſetzt wird. Es iſt x ein Kreisbogen, der zur Abſciſſe dient. Dieſe giebt er als eine neue an, welche auch ſeinem Bruder noch nicht bekannt ſey. Cramer, der Herausgeber von Jak. Bernoulli's Werken, hat einen Beweis beygefügt, der aber ſehr lang und ermüdend iſt. Bernoulli gebraucht neben dem Ausdruck, radius circuli osculatoris, auch den, longitudo fili evolventis.

Den Gedanken, die Krümmung einer Curve durch den Kreis zu meſſen, hat Leibnitz zuerſt gehabt. In dem Aufſatze, de natura anguli contactus et osculi, A. Er. 1686; Opp. T. III. Nr. 18. ſagt er, ſo wie die gerade Linie die geſchickteſte iſt, die Richtung einer Curve in einem Puncte zu beſtimmen, ſo ſey der Kreis am geſchickteſten, die Krümmung (flexuram) zu beſtimmen, weil der Kreis allenthalben dieſelbe Krümmung hat. Ein Kreis osculire eine Curve, wie er es nenne, wenn der Berührungswinkel am allerkleinſten (minimus) iſt. Denn unter den unendlich vielen Kreiſen, welche eine krumme Linie, die mit ihr nach derſelben Gegend hin hohl iſt, berühren, gebe es immer einen, welcher jener Linie am gleichartigſten iſt (assimilatur) und am längſten bey ihr bleibt, oder, um geometriſch zu reden, ihr ſo nahe kommt, daß zwiſchen dieſem Kreiſe und der Curve kein anderer Kreisbogen durch den gegebenen Punct gezogen werden möge. Dieſen allerkleinſten Berührungswinkel nenne er den angulus osculi, ſo wie der kleinſte Winkel einer geraden Linie mit einer Curve der angulus contactus genennet werde. Er erwähnt ſogar ſchon der Oſculationen höherer Grade, als die von einem Kreiſe. Darin irrte der weit ſehende Mann, daß er die einfache Oſculirung als eine Vereinigung von vier Durchſchnittspuncten anſah, und ſo auch bey höhern Oſculationen die Anzahl der zuſammenfließenden Durchſchnittspuncte in gerader Zahl annahm. Jakob Bernoulli machte dagegen Erinnerungen, A. Er. 1692. Mart. Opp. T. I. Nr. 47, wogegen Leibnitz einiges erwiederte, Opp. T. I. Nr. 38. Bald darauf aber erkannte er ſein Verſehen, welches er in einem Briefe an Joh. Bernoulli bezeugte (Comm. epist. T. I.

p. 83), und auch in den Act. Erud. 1695. Aug. p. 371 gelegentlich anführte.

Die Verlegung der Abſciſſen auf die Normale (35.) gebraucht Jakob Bernoulli, Opp. T. II. Nr. 103. art. 22. Seine Rechnung iſt aber weitläufiger als die meinige.

Die ſchwerere Unterſuchung über die Krümmung krummer Flächen hat Euler zuerſt vorgenommen, in den Mémoires de l'Académie de Berlin, 1760. Seine Methode iſt deutlich, aber weitläufig, da er zuerſt die Gleichung für einen Schnitt der Fläche ſucht, und in dieſer den Halbmeſſer der Krümmung nach der Formel für einfach krumme Linien beſtimmt. Er führt darauf den Winkel ein, welchen irgend ein Schnitt mit demjenigen macht, der durch die Normale auf die Ebene der x ſenkrecht geſtellt iſt. Die merkwürdigen Sätze (83. 84.) hat Euler entdeckt, nur iſt der Weg dazu etwas mühſam.

La Grange behandelt in ſeiner Théorie des fonctions analytiques, nr. 151 — 155. die Unterſuchung nach einer andern Methode, da er die oſculirende Kugel an einer krummen Fläche beſtimmt. Sein Vortrag iſt ſehr kurz, und bedarf noch Erläuterungen. Ich habe zuerſt den Weg eingeſchlagen, den dieſer große Analyſt vorgezeichnet hat, habe aber weiterhin (von 73. an) der Formel für den Halbmeſſer der Krümmung eine bequemere Geſtalt gegeben, und beſonders die Sätze (83. 84.) auf eine leichte Art bewieſen.

Meusnier gab im J. 1776 bey der Pariſer Akademie der Wiſſenſchaften eine Abhandlung über die Krümmung der Flächen ein, welche in den Mémoires préſentés, T. X. befindlich iſt. Er geht von der Idee aus, daß die Krümmung einer Fläche darin beſtehe, daß die Lage der berührenden Ebene von Punct zu Punct ſich ändert; die Krümmung eines Elements der Fläche hänge alſo von der Formel ab, welche die Veränderung der berührenden Ebene in dem Raume (étendue) dieſes Elements ausdruckt; und dieſe Formel von den Differentialgleichungen des erſten und zweyten Grades; eine Fläche berühre alſo eine andere, wenn ſie dieſelbe Gleichung des zweyten Gra-

des wie dieſe hat. Bey dieſen Ausdrücken möchte einiges zu erinnern ſeyn.

Man vergleiche auch noch die Differential- und Integralrechnung von la Croix, Nr. 326. ff. Couſins Werk über dieſelben, Nr. 252. ff. Monge feuilles d'Analyse, Nr. 17.

Zuſatz nach 10. des obigen Artikels.

Die Coordinaten zu dem Mittelpuncte des Krümmungskreiſes durch die erſten und zweyten Differentiale zu beſtimmen.

Die endliche Gleichung, und die beiden Differentialgleichungen ſind:

$$\text{I. } (a-x)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

$$\text{II. } (a-x)\partial x = (y-b)\partial y.$$

$$\text{III. } (a-x)\partial^2 x - \partial x^2 = (y-b)\partial^2 y + \partial y^2.$$

Die Gleichungen II. und III. geben

$$\text{IV. } (a-x)(\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y) = \partial y \partial s^2.$$

$$\text{V. } (y-b)(\partial y \partial^2 x - \partial x \partial^2 y) = \partial x \partial s^2.$$

Oder $$\text{VI. } (a-x).\partial \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial s^2}{\partial y}.$$

$$\text{VII. } (b-y).\partial \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial s^2}{\partial x}.$$

Alſo iſt

$$a = x + \frac{\partial s^2}{\partial y.\partial(\partial x:\partial y)}.$$

$$b = y + \frac{\partial s^2}{\partial x.\partial(\partial y:\partial x)}.$$

Oder

$$a = x - p(1+p^2)\frac{\partial x}{\partial p}.$$

$$b = y + (1+p^2)\frac{\partial x}{\partial p}.$$

Mittelſt der Werthe von $a-x$ und $y-b$ ergiebt ſich der Werth von r.

Kugel iſt ein Körper, auf deſſen Oberfläche alle Puncte gleich weit von einem Puncte innerhalb deſſelben entfernt ſind.

Dieſer Punct heißt der Mittelpunct der Kugel; der Abſtand eines Punctes der Oberfläche heißt der Halbmeſſer der Kugel; die gerade Linie durch den Mittelpunct bis zu zwey entgegengeſetzten Puncten der Oberfläche heißt der Durchmeſſer.

1. Eine Ebene durch den Mittelpunct theilt die Kugel in zwey gleiche und ähnliche Theile, eine andere Ebene in ungleiche, deſto ungleichere, je größer der Abſtand des Mittelpunctes von der Ebene iſt. Alles dieſes iſt den Eigenſchaften des Kreiſes analog.

2. Man laſſe einen Kreis ſich um einen ſeiner Durchmeſſer drehen, bis daß die eine Hälfte in die Lage der andern gekommen iſt, ſo beſchreibt der Umfang des Kreiſes die Oberfläche einer Kugel, deren Durchmeſſer eben derſelbe mit dem des Kreiſes iſt.

3. Der Durchſchnitt der Kugel mit einer Ebene iſt ein Kreis, ein größter, wenn der Schnitt durch den Mittelpunct geführt iſt, ein kleinerer, wenn der Schnitt eine andere Lage hat. — Denn in dem erſtern Falle ſind alle Puncte der Durchſchnittslinie gleich weit von dem Mittelpuncte entfernt, alſo iſt die Figur ein Kreis. In dem andern Falle ziehe man eine ſenkrechte von dem Mittelpuncte auf die ſchneidende Ebene, und irgend einen Halbmeſſer, ſo entſteht zwiſchen dieſen beiden geraden Linien, und der geraden durch den Grundpunct der ſenkrechten und den Punct der Oberfläche, ein rechtwinkliges Dreyeck, welches für jeden Punct der Oberfläche in der Durchſchnittslinie auf der Kugelfläche daſſelbe iſt. Daher iſt dieſe Durchſchnittslinie ein Kreis, deſſen Halbmeſſer die Kathete iſt, welche dem Mittelpuncte gegen über liegt. — Setzt man den Halbmeſſer der Kugel $= a$; die ſenk-

rechte aus dem Mittelpuncte auf die ſchneidende Ebene $= b$, ſo iſt der Halbmeſſer des Schnittes $= \sqrt{(aa - bb)}$.

Umgekehrt, die ſenkrechte auf einen kleinern Kreis durch den Mittelpunct deſſelben geht durch den Mittelpunct der Kugel.

4. Die entgegengeſetzten Puncte eines Durchmeſſers nennt man die **Pole** aller der Kreiſe, deren Ebenen auf den Durchmeſſer ſenkrecht ſind. Sie ſind von dem Umfange des größten unter ihnen jeder gleich weit entfernt, von dem Umfange eines kleinern ungleich. Die Entfernung mag man nach einer geraden Linie nehmen, oder nach einem Kreisbogen, deſſen Ebene durch jenen Durchmeſſer geht.

5. Der Durchmeſſer durch die Pole heißt die **Axe** aller der Kreiſe, auf deren Ebenen dieſer Durchmeſſer ſenkrecht iſt.

6. Die kleinern Kreiſe heißen **Parallelkreiſe** in Beziehung auf den größten Kreis, mit welchem ſie parallel ſind, oder gemeinſchaftliche Pole haben.

Legt man durch die Pole zwey Kreiſe, ſo verhalten ſich die zwiſchen denſelben enthaltenen Bogen des größten und der kleinern auf die Axe ſenkrechten Kreiſe, wie ihre Halbmeſſer. Denn die Winkel der Halbmeſſer durch die Endpuncte der Bogen ſind jeder gleich dem Neigungswinkel der Ebenen der beiden durch die Axe gelegten Kreiſe, da ſie mit derſelben rechte Winkel machen (Ebene, 4.). Bey gleichen Winkeln am Mittelpuncte verhalten ſich aber die Bogen wie die Halbmeſſer.

Man druckt den Satz auch ſo aus: Die Bogen der Parallelkreiſe zwiſchen zwey durch ihre Pole gelegten großen Kreiſen verhalten ſich wie die Sinus ihrer Bogenabſtände von dem Pole, oder wie die Coſinus der Bogenabſtände von ihrem größten Kreiſe.

7. Der Bogen eines größten Kreiſes zwiſchen zwey Puncten auf einer Kugelfläche iſt kleiner als der Bogen eines kleinern Kreiſes zwiſchen denſelben Puncten, wenn beide kleiner als ihre Halbkreiſe ſind.

Dieſes läßt ſich leicht folgendergeſtalt einſehen. Man drehe die Ebene des kleinern Kreiſes um die mit dem Bogen des größten Kreiſes gemeinſchaftliche Chorde, bis ſie in die Ebene des letztern fällt. Dadurch wird die Größe des Bogens auf jenem nicht geändert. Der Bogen des größten Kreiſes liegt nun zwiſchen der gemeinſchaftlichen Chorde und dem Bogen des kleinern Kreiſes, nähert ſich alſo der Chorde mehr als jener, und iſt daher kleiner als derſelbe, da die Chorde die kleinſte unter allen durch die zwey Puncte gezogenen Linien iſt.

Daß von zwey nach einer Gegend hin concaven, durch dieſelben zwey Puncte gezogenen, krummen Linien diejenige, welche von der andern und der geraden durch dieſelben Puncte eingeſchloſſen wird, kleiner iſt als die einſchließende, hat Archimedes als einen Grundſatz angenommen, in dem Vorberichte zu der Abhandlung von Kugel und Cylinder.

Einen andern Beweis kann man darauf gründen, daß an demſelben Kreiſe der größere Bogen zu ſeiner Chorde ein größeres Verhältniß hat, als der kleinere Bogen zu ſeiner Chorde; das iſt, daß der Quotient eines Bogens durch ſeine Chorde größer wird, wenn der Bogen zunimmt. Der Beweis dieſes Satzes wird in dem Artikel, Sinus, vorkommen.

Es ſtellt Fig. 96. einen Theil der Oberfläche einer Kugel vor, auf welcher AMNB ein Bogen eines größten Kreiſes durch die Puncte M, N iſt, und DMN ein kleinerer durch dieſelben gezogener Kreis iſt. Der Mittelpunct des letztern ſey C, innerhalb der Kugel. Aus dieſem beſchreibe man in der Ebene deſſelben mit dem Halbmeſſer CE, welcher demjenigen der Kugel gleich iſt, einen Kreis, der von den geraden CM, CN in E und F geſchnitten wird. Man ziehe die geraden MN, EF. Wegen CM = CN und CE = CF ſind die Dreyecke MCN, ECF ſich ähnlich, und EF iſt parallel mit MN. Wegen der gleichen Mittelpuncts-Winkel ECF, MCN ſind die Bogen EKF, MGN ſich ähnlich, und es iſt MGN : EKF = CM : CE. Nun iſt EKF : EF >

MHN : MN, oder EKF : MHN > EF : MN, das iſt, EKF : MHN > CE : CM. Durch die Zuſammenſetzung der Verhältniſſe in dieſer und der zuerſt gefundenen Proportion iſt MGN : MHN > 1 : 1, das iſt MGN > MHN.

Dieſen Beweis giebt Maginus in ſeinen Erläuterungen des erſten Buchs der Geographie des Ptolemäus.

8. Iſt der Bogen auf der Kugelfläche eine gedoppelt krumme Linie, ſo wird derſelbe von einem Puncte beſchrieben, welche die durch ſeine Richtung und den Mittelpunct der Kugel gelegte Ebene ſtetig ändert, dagegen der Punct, welcher den Bogen eines größten Kreiſes beſchreibt, immer in derſelben Ebene in Beziehung auf den Mittelpunct verharret. Der Weg jenes zwiſchen zwey gegebenen Puncten iſt daher offenbar länger als der Weg des letztern, eben ſo wie eine krumme Linie zwiſchen zwey Puncten länger iſt als die gerade zwiſchen denſelben.

9. Eine Ebene, welche durch einen Punct einer Kugelfläche ſenkrecht auf den Halbmeſſer daſelbſt geſetzt iſt, berührt die Kugel. — Offenbar iſt der Halbmeſſer hier die kürzeſte aller Linien, welche von dem Mittelpuncte an die Ebene gezogen werden.

Umgekehrt, der Halbmeſſer ſteht auf die berührende Ebene in dem Berührungspuncte ſenkrecht.

10. Zwey Ebenen berühren eine Kugel; ihr Winkel wird von der Ebene durch ihre Durchſchnittslinie und den Mittelpunct der Kugel halbirt.

Denn die Ebene durch den Mittelpunct und die Berührungspuncte ſteht ſenkrecht auf beide berührende Ebenen; deren Durchſchnitt alſo ſenkrecht auf jene. Der Winkel beider Ebenen iſt dem Winkel ihrer Durchſchnittslinien mit jener Ebene gleich. Dieſer wird von der geraden aus dem Mittelpuncte an den Winkelpunct halbirt; daher auch der Winkel der Ebenen von der Ebene durch den Mittelpunct und ihre Durchſchnittslinie.

11. Zwey Kugeln, die ſich einander berühren, haben ihre Mittelpuncte mit dem Berührungspuncte in ei-

ner geraden Linie, und in demſelben eine gemeinſchaftliche berührende Ebene.

Die Berührung iſt entweder eine äußere, oder eine innere. In dem erſtern Falle iſt der Abſtand der Mittelpuncte ſo groß als möglich, in dem andern ſo klein als möglich. Daher kann der einzige gemeinſchaftliche Punct nicht außer der Linie durch die Mittelpuncte liegen, ſ. Kreis, 16.

Da die berührende Ebene auf die Halbmeſſer ſenkrecht ſteht, ſo iſt ſie dieſelbe für beide Kugeln.

Lagen der Kreiſe auf einer Kugelfläche gegen einander.

12. Zwey größte Kreiſe auf einer Kugelfläche halbiren ſich einander. Denn da ſie durch den Mittelpunct der Kugel gehen, ſo ſchneiden ſie ſich in einem Durchmeſſer, welcher auch der ihrige iſt.

13. Ein größter und ein kleinerer Kreis, oder zwey kleinere theilen ſich gegenſeitig ungleich.

14. Der Winkel zweyer größten Kreiſe iſt einerley mit dem Neigungswinkel ihrer Ebenen. Denn der Winkel zweyer krummen Linien kann nur durch den Winkel ihrer geraden berührenden an dem Durchſchnittspuncte gemeſſen werden. Dieſe ſtehen hier ſenkrecht auf den gemeinſchaftlichen Durchmeſſer, und liegen jede in der Ebene des zugehörigen Kreiſes; ſie meſſen alſo durch ihren Winkel den Neigungswinkel beider Ebenen (Ebene, 4.), welcher daher mit dem Winkel der Bogen derſelbe iſt.

15. Nimmt man auf den beiden Kreiſen von dem Durchſchnittspuncte an einen Quadranten, ſo ſteht der gemeinſchaftliche Durchmeſſer in den Durchſchnittspuncten ſenkrecht auf die Ebene des größten Kreiſes durch die Endpuncte der Quadranten, und die Durchſchnittspuncte der beiden Kreiſe ſind die Pole dieſes großen Kreiſes. — Der Bogen zwiſchen den Endpuncten der Quadranten iſt das Maaß des Winkels der beiden Kreisbogen. Denn er iſt das Maaß des Winkels, welchen zwey auf den Durchſchnitt ihrer Ebenen ſenkrechte mit einander machen.

z. B. der Winkel des Aequators mit der Ekliptik wird gemeſſen durch den Bogen des Colurus der Sonnenſtillſtandspuncte zwiſchen beiden Kreiſen. Die Nachtgleichenpuncte ſind die Pole dieſes Kreiſes; der Stillſtandspunct iſt 90° von jenen entfernt, und der Punct des Äquators, wo er von dem Colurus geſchnitten wird, ebenfalls.

16. Drey größte Kreiſe, die ſich je zwey in drey verſchiedenen Richtungen ſchneiden, bilden auf der Kugelfläche ein ſphäriſches Dreyeck. Zieht man von den Winkelpuncten die Halbmeſſer, ſo entſteht eine dreykantige Pyramide, deren Grundfläche ein Stück einer Kugelfläche iſt.

In Fig. 97. ſind ABD, ACD zwey Halbkreiſe, deren Mittelpunct O, Durchſchnitt AOD iſt. Durch BO und CO iſt die dritte Kreisebene gelegt, auf welcher BC ein Kreisbogen durch die Puncte B, C iſt. So iſt ABC ein ſphäriſches Dreyeck auf der Oberfläche der Kugel. Die Seiten AB, AC, BC ſind die Maaßen der zugehörigen Winkel, AOB, AOC, BOC, und werden daher durch dieſe Winkel angegeben. Die Winkel BAC, ABC, ACB, unter welchen die Bogen ſich ſchneiden, ſind die Winkel der Ebenen ihrer Kreiſe. Der Halbmeſſer der Kugel ſey welcher es ſey, ſo verändert die Größe deſſelben nichts in der Beſtimmung der Seiten, als Maaßen von Winkeln zweyer geraden Linien, und der Winkel der Bogen oder ihrer Ebenen.

17. Anſtatt des Dreyecks ABC kann man auch das Nebendreyeck DBC nehmen, worin die Lage der Ebenen gegen einander dieſelbe wie in jenem iſt, zwey Seiten aber die Complemente zum Halbkreiſe von den Seiten an A geworden ſind. Auch in dem Dreyecke DBC iſt die Lage der Kreisebenen nicht verändert. Auf der halben Kugelfläche ſind vier Nebendreyecke mit einem gemeinſchaftlichen Winkelpuncte, zwey und zwey mit gleichen Verticalwinkeln, wie die Winkel zweyer geraden ſich ſchneidenden Linien. Auf der andern Hälfte der Kugelfläche ſind eben dieſe Dreyecke vorhanden. — Anſtatt einer Seite kann man auch das Complement zum ganzen Kreiſe nehmen.

In der Aſtronomie kommen häufig ſphäriſche Dreyecke vor, in welchen zwey Seiten größer als ein Halbkreis ſind. Bey der Berechnung zeigt oft die poſitive oder negative Beſchaffenheit der goniometriſchen Größen, wie die Winkel oder Bogen beſchaffen ſind. Es kann aber auch unbeſtimmt bleiben, wie ſie zu nehmen ſind.

18. In rechtwinkligen ſphäriſchen Dreyecken iſt es leicht entſchieden, ob die Winkel ſpitz oder ſtumpf ſind. Es ſey A B C (Fig. 98.) ein bey A rechtwinkliges ſphäriſches Dreyeck, das iſt, der Winkel der Kreisebenen durch A B und A C ſey ein rechter Winkel. Man vollende den Bogen A C zum ganzen Kreiſe A D E F A, und A B zum Halbkreiſe A B E. Ferner nehme man A D gleich einem Quadranten, A D G größer als A D, ſo wie A C kleiner iſt. Die Seite A B mag kleiner oder größer als ein Quadrant ſeyn. Man ziehe die Bogen D B, G B. Da der Durchmeſſer durch D ſenkrecht auf die Ebene von A B E ſteht (Ebene, 25.), ſo iſt der W. A B D ein rechter, (daſ 21.), alſo A B C ſpitz, und A B G ſtumpf. — Folglich iſt in einem rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyeck der Winkel, welcher einer Kathete gegen über liegt, ſpitz, oder ein rechter, oder ſtumpf, nachdem die gegen über ſtehende Kathete kleiner, oder ſo groß, oder größer als ein Quadrant iſt. Umgekehrt gilt der Satz auch.

19. Die Hypotenuſe eines rechtwinkligten ſphäriſchen Dreyecks iſt kleiner als ein Quadrant, wenn beide Katheten kleiner oder größer als ein ſolcher ſind. Sie iſt ein Quadrant, wenn eine der Katheten es iſt. Sie iſt größer, wenn eine Kathete kleiner, die andere größer als ein Quadrant iſt. — Es ſeyn (Fig. 98.) B A C, B A D B A G bey A rechtwinkligte ſphäriſche Dreyecke, in welchen A D ein Quadrant, A C kleiner, A G größer als ein ſolcher iſt. Auch ſey A B kleiner als ein Quadrant. Man lege durch D den Kreis, zu welchem B der Pol iſt. Dieſer ſteht auf die Ebene des Bogens B D ſenkrecht, und geht, da A D B ſpitz iſt, zwiſchen B D und E D durch, trifft alſo den durch B und C darauf gezogenen, und darauf ſenkrechten Kreis jenſeits A D E, den Bogen B G aber

zwiſchen B und G. Folglich iſt BC kleiner als ein Quadrant, und BG größer, ſo wie BD ſelbſt ein Quadrant iſt. Die Hypotenuſe BC gehört zu zwey Dreyecken mit gleichnamigen Katheten, die BG zu zwey Dreyecken mit ungleichnamigen; BD zu Dreyecken, in welchen eine Kathete ein Quadrant iſt.

20. Die ſphäriſchen Dreyecke werden wie die geradlinigen in rechtwinkligte und ſchiefwinkligte unterſchieden. Die Seite, welche dem rechten Winkel gegen über ſteht, heißt auch hier die Hypotenuſe, die beiden anliegenden die Katheten. Wenn eine der Katheten ein Quadrant iſt, ſo iſt ihr einer Endpunct der Pol der andern Kathete, und das Dreyeck hat an dieſer Kathete zwey rechte Winkel. Der gegen über liegende Winkel kann ein ſpitzer, ein rechter, oder ſtumpfer ſeyn. — Auch werden die Dreyecke mit einer Seite, die ein Quadrant iſt, von den andern unterſchieden. — Was gleichſeitige, gleichſchenklige, ungleichſeitige ſphäriſche Dreyecke ſind, ergiebt die Benennung.

21. Ein ſphäriſches Dreyeck wird durch drey Beſtimmungsſtücke, es mögen Seiten oder Winkel ſeyn, gegeben, zwey Fälle ausgenommen.

I. Wenn (Fig. 97.) die Seiten AB, AC, nebſt dem W. BAC gegeben ſind, ſo ſind die Endpuncte des Bogens BC gegeben, das iſt der Winkel BOC, am Mittelpuncte der Kugel, nebſt der Lage der Ebene BOC.

II. Wenn die beiden Winkel A, B nebſt der Seite AB (d. i. der W. AOB) gegeben werden, ſo iſt die Lage der Ebenen AOC, BOC, alſo ihr Durchſchnitt OC, und ihr Winkel C gegeben.

III. Wenn drey Seiten (d. i. die drey Winkel bey O) gegeben werden, ſo ſind die drey Winkel beſtimmt. Denn die Chorden der Seiten machen ein einziges gegebenes Dreyeck aus; daher auch die zugehörigen Bogen. — Euklides zeigt in ſeinen Elementen XI. 23. wie aus drey Flächenwinkeln der körperliche Winkel zuſammen geſetzt wird.

IV. Durch die drey Winkel eines ſphäriſchen Dreyecks ſind auch die Seiten deſſelben beſtimmt; d. i. durch die Winkel dreyer Ebenen werden auch ihre Durchſchnittslinien beſtimmt. Dieſes beruht darauf, daß zwey Ebenen, die mit einer dritten gegebene Winkel machen, den Winkel ihrer Durchſchnittslinien nicht ändern können, ohne ihren Neigungswinkel gegen einander zu ändern, welches weiterhin (32.) gezeigt werden wird.

V. Sind zwey Seiten und der nicht eingeſchloſſene Winkel gegeben, ſo laſſen ſich daraus zwey verſchiedene Dreyecke bilden. Dieſes läßt ſich auf dieſelbe Art wie bey geradlinigen Dreyecken zeigen.

VI. Sind zwey Winkel und eine nicht eingeſchloſſene Seite gegeben, ſo ſind durch dieſe Beſtimmungen auch zwey verſchiedene Dreyecke möglich. Dieſes wird im folgenden (33.) bewieſen. Die Sätze ſollten hier nur zur Überſicht neben einander geſtellt werden.

22. In einem gleichſchenkligen ſphäriſchen Dreyeck ſind die Winkel an der Grundlinie einander gleich und umgekehrt.

Es ſey in dem Dreyecke ABC (Fig. 99.) AB = AC. Man nehme willkürlich AD = AE, und ziehe die Bogen CD, BE, ſo ſind die Dreyecke ABE, ACD einander gleich, daher auch die Dreyecke CBE, BCD. In jenen ſind die Winkel ABE, ACD gleich, in dieſen die Winkel CBE, BCD, woraus die Gleichheit der Winkel ABC, ACB folgt.

23. Sind die Winkel ABC, ACB ſich gleich, ſo nehme man die Bogen BD, CE gleich groß, und es ſind die Dreyecke CBE, BCD ſich gleich, daher die Dreyecke ABE, ACD, woraus die Gleichheit der Seiten AB, AC folget.

24. Zwey Seiten eines ſphäriſchen Dreyecks zuſammen genommen ſind größer als die dritte. — Dieſes beruht darauf, daß die drey den Seiten AB, AC, BC (Fig. 97.) zugehörigen Winkel am Mittelpuncte der Kugel einen körperlichen Winkel bilden. Von dieſen drey Winkeln hat Euklides XI. 20. erwieſen, daß je zwey

zuſammen genommen größer ſind als der dritte. S. Winkel, körperlicher.

25. Die Summe der drey Seiten eines ſphäriſchen Drenecks iſt kleiner als der Umfang des größten Kreiſes. — Euklides hat XI. 21. erwieſen, daß die drey Winkel eines dreykantigen körperlichen Winkels zuſammen kleiner als vier rechte ſind. — Wolf hat in den Elementis Sphaericorum, 62. 63. andere weniger kunſtgerechte Beweiſe gegeben.

26 In jedem ſphäriſchen Dreneck ſteht die größere Seite dem größern Winkel gegen über, und der größere Winkel liegt der größern Seite gegen über. — Der Beweis iſt völlig derſelbe, wie für geradlinichte Dreyecke.

27. In einem ſphäriſchen Dreyeck iſt die Summe zweyer Winkel zwey rechten gleich, wenn die Summe der beiden gegen über ſtehenden Seiten dem Halbkreiſe gleich iſt; jene Summe iſt kleiner oder größer als zwey rechte, wenn die Summe der gegen über ſtehenden Seiten kleiner oder größer als der Halbkreis iſt.

I. In dem Dreyeck ABC (Fig. 100.) ſey $AC + BC =$ dem halben Kreisumfange. Man verlängere AB und AC bis zu ihrem zweyten Durchſchnittspuncte in D, ſo ſind ABD und ACD Halbkreiſe, und es iſt der Winkel $D = A$. Da $CB = CD$ iſt, ſo iſt (22.) $D = CBD$, alſo $A = CBD$, und $A + ABC = 2R$.

II. In dem Dreyeck ABE ſey $AE + EB$ kleiner als der Halbkreis. Da $AE + ED$ gleich iſt dem Halbkreiſe, ſo iſt $EB < ED$. Daher iſt der Winkel $D < EBD$, das iſt, $A < EBD$: folglich $A + EBA < 2R$.

III. In dem Dreyeck ABF ſey $AF + FB$ größer als der Halbkreis. Da $AF + FD$ gleich iſt dem Halbkreiſe, ſo iſt FB größer als FD, und daher $D > FBD$, das iſt $A > FBD$. Folglich iſt $A + ABF > 2R$.

Wenn AF größer als der Halbkreis iſt, ſo iſt der W. ABF größer als zwey rechte. Dieſer Fall braucht nicht betrachtet zu werden, weil in demſelben ſtatt des Bogens

AF ſeine Ergänzung zum ganzen Kreiſe genommen werden kann, wodurch der gegen über liegende Winkel kleiner als zwey rechte wird.

28. Wenn zwey Winkel eines ſphäriſchen Dreyecks ſo groß, oder kleiner, oder größer als zwey rechte ſind, ſo iſt die Summe der gegen über ſtehenden Seiten ſo groß, oder kleiner oder größer als der Halbkreis.

Der Beweis iſt der umgekehrte von dem in 27.

29. In jedem ſphäriſchen Dreyeck, deſſen Winkel jeder kleiner ſind als zwey rechte, iſt die Summe der drey Winkel kleiner als ſechs rechte und größer als zwey rechte.

Denn da jeder der drey Winkel kleiner als zwey rechte iſt, ſo ſind erſtlich alle drey kleiner als ſechs rechte.

Zweytens, es ſeyn zwey Winkel zuſammen größer, oder ſo groß als zwey rechte, ſo iſt die Summe aller drey Winkel größer als zwey rechte.

Drittens, es ſeyn zwey Winkel zuſammen kleiner als zwey rechte, wie EAB und ABE in dem Dreyeck ABE (Fig. 100.). Man ſetze zu ABE noch den Winkel EBC, ſo daß in dem Dreyeck ABC die Summe $A + ABC = 2R$ ſey. Dadurch iſt $AC + BC =$ dem Halbkreiſe, und $EC + BC$ kleiner als der Halbkreis; folglich $CBE + CEB < 2R$ nach (27.). Da $AEB + CEB = 2R$ iſt, ſo iſt $AEB > CBE$. Zufolge der Conſtruction iſt $A + ABE + CBE = 2R$, alſo $A + ABE + AEB > 2R$.

30. Der äußere Winkel in einem ſphäriſchen Dreyeck, der durch die Verlängerung einer der drey Seiten entſteht, iſt kleiner als die Summe der beiden innern entgegengeſetzten. Denn jener macht mit ſeinem Nebenwinkel zwey rechte aus, dieſe beiden aber mit dem dritten übertreffen zwey rechte, und ſind alſo größer als der äußere.

31. In den beiden ſphäriſchen Dreyecken, ABC, ADE (Fig. 101.), die den Winkel A gemein haben, und worin die Winkel B und D ſich gleich ſind, ſind die beiden andern C und E verſchieden.

Denn man verlängere BC, DE bis zu ihrem Durchſchnittspuncte in F, ſo iſt in dem Dreneck BFD, wegen der gleichen Winkel ABC, ADE, die Summe FBD + FDB = 2R, alſo BF + DF = dem Halbkreiſe (28.); daher in dem Dreneck CFE die Summe der Seiten FC + FE kleiner als der Halbkreis, und die Summe der Winkel FCE + FEC kleiner als zwey rechte, oder BCE + AED größer als zwey rechte. Da BCE + ACB = 2R, ſo iſt ACB kleiner als AED.

32. Hieraus folgt, daß die drey Winkel in einem ſphäriſchen Dreyeck daſſelbe völlig beſtimmen. Denn zwey Dreyecke, wie ABC, ADE können wol in den Winkeln A = A; B = D, übereinkommen, aber nicht in dem dritten, wenn nicht D in B fällt. Dieſes iſt der Beweis zu 21. IV.

33. Mit zwey gegebenen Winkeln und einer von ihnen nicht eingeſchloſſenen Seite laſſen ſich zwey verſchiedene ſphäriſche Dreyecke zeichnen.

Es ſey nämlich Fig. 102. ABC ein Dreyeck, worin A und B Winkel von gegebener Größe ſind, und AC auch zu einem gegebenen Winkel am Mittelpuncte gehört. Nun ſey der Bogen CD ſo genommen, daß BC + DC = dem Halbkreiſe iſt, ſo iſt der W. CDB = CBA, und die beiden Dreyecke ABC, ADB kommen in den Winkeln B und D, außer dem gemeinſchaftlichen A überein, desgleichen in der Seite AC. Allein es giebt nicht noch ein Dreyeck, das auf dieſe Art mit ABC übereinſtimmte. Denn wenn AEC ein ſolches wäre, ſo wäre BC + DC = BC + EC = DC + EC, jede Summe nämlich dem Halbkreiſe. Alſo wäre BC = EC und EC = DC, folglich wären die Winkel bey B, D, E rechte; das iſt, C wäre der Pol von AB. Nur in dieſem Falle laſſen ſich unendlich viele Dreyecke zeichnen, die alle in zwey Winkeln und einer Seite übereinkommen.

34. In der Trigonometrie werden die Formeln zur Berechnung aller Fälle gegeben werden, wo auch die Sätze, 21. IV. V. VI. noch insbeſondere ihre Beweiſe aus dieſen Formeln erhalten werden.

35. Die Fläche eines ſphäriſchen Dreyecks läßt ſich ſehr leicht mit der Oberfläche der Kugel vergleichen. Es verhält ſich die Oberfläche der Kugel zu dem Flächenraume des Dreyecks, wie ſich verhalten 720° zu dem Überſchuſſe der drey Winkel des Dreyecks über 180°. Oder, es ſey der Halbmeſſer der Kugel = r, und $\pi : 1$ das Verhältniß des halben Umfanges zum Halbmeſſer, auch ſeyn die Winkel, A, B, C durch die Verhältnißzahlen in Beziehung auf π ausgedruckt, ſo iſt die Fläche des Dreyecks = $r^2 (A + B + C - \pi)$. Es iſt nämlich die Oberfläche der Kugel = $4\pi r^2$.

Der Beweis kann auf eine ſehr leichte Art, ohne beſondere Conſtruction durch bloßes Zuſammennehmen und Abſondern der Theile geführt werden. Albert Girard, deſſen in der Geſchichte der Algebra, Th. I. S. 52. ff. rühmlich gedacht iſt, hat den Satz erfunden, allein den Beweis, nach Montücla's Anzeige, auf eine ſehr mühſame und dunkle Art geführt. Euler hat einen ziemlich faßlichen Beweis gegeben, in der Abhandlung, de mensura angulorum solidorum, Acta Acad. Petr. a. 1778. T. V. P. II. Nur iſt die Figur, weil ſie die ganze Kugelfläche begreift, nicht deutlich genug. Sie enthält ſieben Dreyecke und das entgegengeſetzte auf der andern Halbfläche, welches ſie alle einfaßt. Der folgende Beweis iſt der Euleriſche ſehr vereinfacht. Ausführlich hat noch von dieſer Aufgabe, mit Beyfügung literariſcher Nachrichten, Käſtner gehandelt, in der zweyten Sammlung geometriſcher Abhandlungen, S. 415 — 439.

36. Es iſt ABC (Fig. 103.) die Projection eines ſphäriſchen Dreyecks auf die Kreisfläche ABDEA. Dieſe ſtellt zugleich die Oberfläche der Halbkugel vor, die von dem Kreiſe ABDEA begränzt wird. Sie beſteht aus dem Sector ABDCA, dem Dreyeck ACE, und dem Dreyeck DCE. Das Dreyeck ACE macht mit dem ACB den Sector EBAE aus. Das Dreyeck DCE iſt das Nebendreyeck von einem dem ACB gleichen Dreyeck in dem Sector, der durch die Verlängerung der Bogen CD und CE bis zu ihrem zweyten Durchſchnitt ent-

ſteht. Denn CD und CE ſind die Ergänzungen der Bogen AC, BC zum Halbkreiſe. Man bezeichne den Flächenraum des Dreyecks ABC durch Δ, die Flächen der Sectoren durch A, B, C, die Oberfläche der Kugel durch S, ſo iſt $\frac{1}{2}S = A + (B - \Delta) + (C - \Delta) = A + B + C - 2\Delta$, alſo $\Delta = \frac{1}{2}(A + B + C - \frac{1}{2}S)$.

Bezeichnet man den halben Kreisumfang oder zwey rechte durch π, wenn der Halbmeſſer $= 1$ iſt, und läßt A, B, C die Verhäjtnißzahlen für die Winkel A, B, C in Beziehung auf π ſeyn, ſetzt auch den Halbmeſſer der Kugel $= r$, ſo iſt die Oberfläche der Kugel $= 4\pi r^2$; der Sector $A = \frac{A}{2\pi} \cdot 4\pi r^2 = 2r^2 . A$; alſo der Sector $B = 2r^2 . B$; und der Sector $C = 2r^2 . C$. So wird $\Delta = r^2(A + B + C - \pi)$. Folglich $s : \Delta = 4\pi : A + B + C - \pi$. Drückt man die Winkel A, B, C in Graden aus, ſo kommen 180 Gr. ſtatt π. Dieſes giebt die zuerſt angeführte Proportion.

37. Die Erfindung des Inhalts eines ſphäriſchen Dreyecks durch Rechnung iſt ſchwieriger, da hier eine gedoppelte Integration nöthig iſt. — Es iſt die gerade AB (Fig. 104.) die Projection eines Kreiſes von einer Kugelfläche auf die Ebene des Kreiſes ADB, und CE die Projection eines andern, der jenen unter dem Winkel ACE ſchneidet. Durch D, den Pol von AB, ſey der Quadrant DP gezogen, welcher CE in M ſchneidet. So wird das rechtwinklige ſphäriſche Dreyeck CPM gebildet. Man ziehe einen benachbarten Quadranten Dp, ſo entſteht ein zweytes Dreyeck Cpm, deſſen Unterſchied von CPM, ſo fern dieſer von der Quantität der Veränderungen unabhängig iſt, das Differential des Dreyecks CPM giebt, woraus der Inhalt durch Integration herzuleiten iſt. Dieſer Unterſchied aber iſt ſelbſt ein Theil des Sectors PDp, und muß durch Integration gefunden werden. Zuerſt muß die endliche Gleichung zwiſchen den veränderlichen Kreisbogen CP, PM, die als Coordinaten zu betrachten ſind, und dem gegebenen Winkel PCM be-

kannt ſeyn. Es iſt tang PM = sin CP . tang PCM. (Trigonometrie, ſphäriſche.). Man ſetze den Halbmeſſer der Kugel = 1; den Bogen CP = ω, PM = φ, ſo iſt

$$\tan\varphi = \tan C . \sin\omega,$$

und die Differentialgleichung iſt

$$\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2} = \tan C . \cos\omega . \partial\omega.$$

Das Differential des Flächenraums PMnp iſt Mn × mn, weil das Verhältniß der endlichen Differenz und dieſes Products ſich dem der Gleichheit immer mehr nähert. Da Mn = Pp × cos φ iſt (5.) ſo iſt Mn × mn = cos φ × $\partial\varphi . \partial\omega$, wovon das Integral iſt = sin $\varphi . \partial\omega$, weil $\partial\omega$ für den Sector PDp unveränderlich iſt. Es iſt alſo das Differential des Dreyecks = sin $\varphi . \partial\omega$, ohne eine Conſtante.*) Um dieſes zu integriren, muß φ entweder durch ω, oder $\partial\omega$ durch $\partial\varphi$ und φ ausgedruckt werden. Dieſes giebt aber eine Differentialformel, deren Reduction auf eine Elementarform beſchwerlich iſt. Da in dem Dreyeck aber noch eine veränderliche Größe, der Winkel CMP iſt, ſo verſuche man, ob ſich das Differential des Dreyecks durch dieſes bequemer ausdrucken laſſe.

Es iſt $\sin\varphi . \sin M = \sin\omega . \sin C$,

und $\cos M = \cos\omega . \sin C$;

alſo $\sin\varphi . \partial\omega = \frac{\sin C}{\sin M} \sin\omega . \partial\omega$,

und $\sin M . \partial M = \sin C . \sin\omega . \partial\omega$.

Dadurch iſt $\sin\varphi . \partial\omega = \partial M$, folglich $\int \sin\varphi . \partial\omega = M + \text{Const.}$ Wenn P in C fällt, oder wenn das Dreyeck = 0 iſt, ſo iſt $M = \frac{1}{2}\pi - C$, alſo Const = $C - \frac{1}{2}\pi$. Folglich iſt $\int \sin\varphi . \partial\omega$, oder der Inhalt des rechtwinkligen Dreyecks CPM = $M + C - \frac{1}{2}\pi$.

*) Oder: es iſt (unten 42.) die Fläche der Zone zwiſchen dem Kreiſe, der durch AB ſenkrecht auf ADB ſteht, und dem parallelen durch $M = 2\pi \sin\varphi$; alſo das endliche Segment PMnp = sin $\varphi . \Delta\omega$. Da das letzte Verhältniß von PMnp zu PMmp = 1 : 1 iſt, ſo iſt das Differential des Dreyecks = sin $\varphi . \partial\omega$.

38. Da ein ſchiefwinklichtes Dreyeck in zwey rechtwinklichte ſich zerlegen läßt, ſo iſt, wenn die Winkel deſſelben A, B, C ſind, der Inhalt $= A + B + C - \pi$. Wird der Halbmeſſer $= r$ genommen, ſo iſt der Inhalt des Dreyecks $= r^2 (A + B + C - \pi)$.

39. Der Halbkreis ADB (Fig. 104.) drehe ſich um den Halbmeſſer CD, bis daß A und B jeder in die Stelle des andern kommen. Der Bogen MDM, deſſen Chorde MPM auf CD ſenkrecht iſt, beſchreibt dadurch einen Abſchnitt der Kugelfläche. Es ſey $AC = a$; $DP = x$, ſo iſt dieſe Oberfläche $= 2\pi a x$ (Complanation, Th. I. S. 515.)

40. Die Oberfläche der halben Kugel iſt $= 2\pi a a$, und die Zone zwiſchen den von AB und MM beſchriebenen Kreiſen $= 2\pi a (a - x)$.

41. Eine andere mit MM parallele Chorde ſey NN, welche CD in Q ſchneide. Es ſey $DQ = x'$, ſo iſt die Fläche der Zone zwiſchen dem von M und N beſchriebenen Parallelkreiſen $= 2\pi a (x' - x)$.

42. Es ſey der Winkel $ACM = \varphi$; $ACN = \varphi'$, ſo iſt $\frac{a - x}{a} = \sin\varphi$, und $\frac{a - x'}{a} = \sin\varphi'$. Nun iſt die Fläche der Zone $= 2\pi a a (\sin\varphi - \sin\varphi')$. Oder aus Goniometrie, 27.

die Zone $= 4\pi a a \sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi') . \cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')$

43. Man gebe einem Grade des größten Kreiſes 15 Theile (Meilen), ſo hält der halbe Umfang 2700 Meilen, und es iſt $a = \frac{2700}{\pi}$. Die Zone ſey $= Z$, ſo iſt

$$Z = \frac{2(2700)^2}{\pi} (\sin\varphi - \sin\varphi') =$$

$$\frac{4(2700)^2}{\pi} \sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi') . \cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi').$$

Da

44. Exempel. Es ſey $\varphi = 23^\circ 30'$; $\varphi' = 0$, ſo iſt $Z = 1850578$ Quadratmeilen. Nämlich

$$\log. 2700 = 3{,}4313638$$
$$3{,}4313638$$
$$l \sin \varphi = 9{,}6006997$$
$$\text{Subtr, } l\,\pi = 0{,}4971499$$

$$l\,\tfrac{1}{2} Z = 5{,}9662774$$

$\frac{1}{2} Z = 925289$; $Z = 1850578$.

Ferner ſey $\varphi = 66^\circ 30'$; $\varphi' = 23^\circ 30'$, ſo iſt $Z = 2405460$ Quadratmeilen.

$$l\,\frac{2700^2}{\pi} = 6{,}3655777$$
$$l \sin 21^\circ 30' = 9{,}5640754$$
$$l \cos 45^\circ = 9{,}8494850$$

$$5{,}7791381$$

$\frac{1}{4} Z = 601365$; $Z = 2405460$.

Noch ſey $\varphi = 90^\circ$, $\varphi' = 66^\circ 30'$, ſo iſt $Z = 384921$ Quadratmeilen.

45. Die Oberfläche der ganzen Kugel iſt $= 4\,\pi\,a\,a$, viermahl ſo groß als die Fläche eines ihrer größten Kreiſe. In Quadratmeilen iſt ſie $\frac{29160000}{\pi} = 9281916$, wie man durch die Multiplication mit dem Bruche $\frac{1}{\pi}$ (Cyklotechnie, Th. I. S. 642.) genauer als mittelſt der gemeinen Logarithmen findet. Damit ſtimmt die doppelte Summe der drey berechneten Zonen bis auf einen Unterſchied von 2 in der letzten Ziffer überein.

46. Giebt man der Oberfläche der Kugel 1000 000 Theile, ſo werden die Flächenräume in dem Verhältniſſe $29{,}16 : \pi$ verändert. Die drey Zonen ſind nun I. 199374;

II. 259156; III. 41470. Dieſe Zahlen laſſen ſich leicht unmittelbar durch die Formel $2\pi aa(\sin\varphi - \sin\varphi')$ finden, da $4\pi aa = 1000000$ genommen iſt.

In dem aſtronomiſchen Jahrbuche für 1784. S. 177 ff. iſt eine Tafel der Kugelzonen von halben zu halben Graden enthalten.

47. Der Inhalt des von dem Bogen MDM beſchriebenen Kugelſtücks iſt $= \pi x^2(a - \frac{1}{3}x)$.

Denn es iſt, wenn das Kugelſtück $= Z$, und die Ordinate $MP = y$ iſt, $\partial Z = \pi yy\partial x$ (ſ. Cubirung). Hier iſt $yy = 2ax - xx$, alſo $\partial Z = \pi(2ax - xx)\partial x$ Folglich $Z = \pi x^2(a - \frac{1}{3}x)$, wo die Conſtans $= 0$ genommen wird.

48. Für die Halbkugel iſt $x = a$, alſo ihr Inhalt $= \frac{2}{3}\pi a^3$, und die ganze Kugel $= \frac{4}{3}\pi a^3$. Der Inhalt eines Cylinders, deſſen Halbmeſſer $= a$, und Höhe $= 2a$ iſt, iſt $2\pi a^3$, daher derſelbe ſich zur Kugel verhält wie 3 : 2.

49. Eine Kugel ſo zu theilen, daß das Verhältniß der beiden Abſchnitte einem gegebenen $m:n$ gleich ſey. — Dieſe Aufgabe führt auf eine cubiſche Gleichung für die Abſciſſe x oder DP. Es iſt der zu x gehörige Abſchnitt $= \pi x^2(a - \frac{1}{3}x)$ oder $\frac{1}{3}\pi x^2(3a - x)$. Zieht man dieſen von der ganzen Kugel, $\frac{4}{3}\pi a^3$, ab, ſo iſt der andere Abſchnitt $= \frac{1}{3}\pi(4a^3 - 3ax^2 + x^3)$. Der Forderung gemäß iſt nun

$$3ax^2 - x^3 : 4a^3 - 3ax^2 + x^3 = m:n.$$

Daraus entſteht die cubiſche Gleichung,

$$(m+n)x^3 - 3(m+n)ax^2 + 4ma^3 = 0.$$

Dieſe Gleichung hat der Natur der Aufgabe gemäß nur eine mögliche Wurzel. Sie wird entweder numeriſch, oder durch eine Conſtruction, dergleichen Th. I. S. 138 ff. angegeben iſt, aufgelöſet.

50. Archimedes, der in den zwey Büchern über Kugel und Cylinder bloß durch Hülfe der gemeinen Geometrie die Aufgaben von der Complanation und Cubirung der Kugel aufgelöſet hat, trägt im 2. B. 5. S. auch dieſe

Aufgabe vor, und bringt ihre Auflöſung auf diejenige zweyer andern, welche er am Ende der Schrift mitzutheilen verſpricht, wo ſie aber ſich bald verloren haben. Eutocius fand nach langem Suchen ein Exemplar, worin die Auflöſungen enthalten waren, von der Beſchaffenheit, daß er ſie für ächt erkannte. Er hat ſie in ſeinem Commentar über des Archimedes Schrift aufbewahrt. Zwey ältere Geometer, Dionyſiodorus und Diokles, haben andere Auflöſungen geſucht, welche Eutocius daſelbſt mittheilt. Man ſehe Haubers Ausgabe der archimedeiſchen Schrift, Tübingen 1798. S. 70. ff.

51. Eine Kugel durch eine Ebene ſo zu theilen, daß die Oberflächen ein gegebenes Verhältniß haben, iſt ſehr leicht. Es iſt $(m + n)x = 2ma$. Archimedes hat dieſe Aufgabe auch aufgelöſet, a. a. O. S. 4.

Berührungen einer Kugel mit andern und mit ebenen Flächen.

52. Über die Berührungen einer Kugel mit andern Kugeln oder mit Ebenen kann man eben ſolche Aufgaben machen als über die Berührungen eines Kreiſes mit andern Kreiſen und mit geraden Linien. Fermat, der große Analyſt des ſiebzehnten Jahrhunderts, hat einen Aufſatz de contactibus sphaericis geſchrieben, der in der Sammlung ſeiner Werke, pag. 74—88. anzutreffen iſt Vermuthlich iſt er dazu durch des Vieta Abhandlung über die Berührungen der Kreiſe veranlaßt worden. Der Gang ſeiner Auflöſungen iſt dem von Vieta genommenen ganz gleichſtimmig. Auch bringt er ſeine Auflöſungen über die Kugeln auf die von Vieta für Kreiſe gefundenen. Da die Werke des Fermat ſehr ſelten ſind, und die Auflöſungen, welche er gegeben hat, durch ſinnreiche Einfachheit eine ſehr nützliche geometriſche Übung ſind, ſo will ich einen Auszug aus ſeinem Aufſatze mittheilen. Die Auflöſungen der drey erſten Aufgaben ſind von ihm zu wortreich, ohne darum lichtvoller zu ſeyn, abgefaßt, welches ich zu verbeſſern ſuchen werde.

53. I. Aufg. Zu vier gegebenen Puncten die Kugel zu finden, deren Oberfläche durch dieſelben gehe.

Es ſeyn A, B, C, D (Fig. 106.) die gegebenen Puncte, von welchen man die drey erſten ſich in der Ebene der Zeichnung, den vierten D darüber vorzuſtellen hat. Die Ebene dreyer derſelben, als A, B, C, ſchneidet die Kugelfläche in einer Kreislinie (3.); beſchreibt man alſo durch dieſe drey Puncte einen Kreis, ſo iſt dieſer auf der Oberfläche der Kugel. Der Mittelpunct deſſelben ſey E; durch dieſen Punct ziehe man EF ſenkrecht auf die Ebene des Kreiſes, ſo liegt der Mittelpunct der geſuchten Kugel auf dieſer Linie. Durch irgend einen Punct G der EF ziehe man von dem vierten Puncte D die gerade DGH, welche die Ebene des Kreiſes ABC in H treffe. Die gerade durch E und H ſchneide den Kreis in I und K. Die Ebene der beiden geraden DH, IK geht durch EF. Man ziehe durch die Puncte D, I, K einen Kreis, ſo geht deſſen Ebene durch den Mittelpunct der Kugel, und iſt ein größter Kreis. Folglich ſind ſowohl der Mittelpunct als der Durchmeſſer der geſuchten Kugel gefunden, als welche dieſelben wie für den Kreis DIK ſind.

Die Auflöſung iſt weſentlich dieſelbe mit der von Fermat gegebenen, aber der Beweis iſt ganz abgeändert. Auch gebraucht Fermat ſtatt der hier gezogenen DH eine ſenkrechte von D auf EF, und zieht mit dieſer die IK parallel.

54. II. Zu drey gegebenen Puncten und einer Ebene die Kugel zu finden, welche durch jene Puncte gehe, und dieſe berühre.

Es ſeyn A, B, C (Fig 107.) die drey gegebenen Puncte. Durch dieſe ziehe man einen Kreis, und ſetze auf die Ebene deſſelben durch den Mittelpunct D die ſenkrechte DE, welche die gegebene Ebene in E treffe. In dieſer DE (oder der verlängerten) liegt der Mittelpunct der Kugel. Da die Lage der berührenden Ebene gegeben wird, ſo iſt ſowohl ihre Durchſchnittslinie mit der Ebene des Kreiſes ABC, als ihr Neigungswinkel gegeben, oder

die Lage der auf die Durchſchnittslinie durch den Mittelpunct D ſenkrechten welche FG ſey, und der Winkel FDH der auf die Ebene ſenkrechten DH mit der FG. Die FG ſchneide den Kreis in I, K, und die DH treffe die Ebene in H. Nun ſteht jeder größte Kreis auf eine berührendeEbene in dem Berührungspuncte ſenkrecht, weil der Durchmeſſer der Kugel auf ſie ſenkrecht iſt (9.); der Kreis durch die Puncte I, K, deſſen Ebene durch DE geht, iſt ein größter; alſo ſteht derſelbe ſenkrecht auf die gegebene Ebene, und ſeine Ebene geht durch DH. Da die Kugel von der gegebenen Ebene berührt wird, ſo berührt dieſer Kreis den Durchſchnitt derſelben mit der Ebene des Kreiſes, das iſt, die HE (oder die verlängerte). Folglich iſt die Aufgabe nun auf dieſe gebracht: einen Kreis zu finden, der durch zwey gegebene Puncte (I, K) gehe, und eine gegebene gerade (HE) berühre. Der Mittelpunct dieſes Kreiſes und deſſen Durchmeſſer kommen auch der geſuchten Kugel zu. Die Auflöſung jener Aufgabe iſt in dem Artikel, Kreis, 82. gewieſen.

55. III. Zu drey gegebenen Puncten und einer der Größe und Lage nach gegebenen Kugel diejenige Kugel zu finden, welche durch die drey Puncte gehe, und die Kugel berühre.

Die drey Puncte ſeyn A, B, C (Fig. 108.), der Mittelpunct der gegebenen Kugel D. Durch die drey Pun te ziehe man einen Kreis, und errichte in dem Mittelpuncte E auf die Ebene deſſelben die ſenkrechte EF, ſo liegt in dieſer der Mittelpunct der geſuchten Kugel. Von D ziehe man durch einen Punct der EF die DGH, welche die Ebene des Kreiſes ABC in H treffe. Die (hier) verlängerte EH treffe den Kreis in I, K. Es ſey der Kreis LM ein größter Kreis der gegebenen Kugel, und derjenige deſſen Ebene in die Ebene der geraden EF, IK fällt. In dieſem liegt der Berührungspunct beider Kugeln, ſo wie er auch in dem größten Kreiſe durch EF und IK liegt. Denn der Berührungspunct zweyer Kugeln liegt mit den beiden Mittelpuncten in gerader Linie (11.). Die Aufgabe iſt nun dahin gebracht, durch zwey Puncte

(I, K) einen Kreis zu ziehen, der einen gegebenen Kreis (L M) berühre. (Kreis, 89.).

56. IV. Zu vier gegebenen Ebenen eine Kugel zu finden, welche ſie alle berühre.

Der Winkel zweyer berührenden Ebenen an einer Kugel wird durch die Ebene, welche durch ihren Durchſchnitt und den Mittelpunct geht, halbirt (10.). Hier ſind nun drey halbirende Ebenen gegeben, deren Durchſchnittslinien in dem Mittelpuncte der Kugel zuſammen kommen. Die ſenkrechten von dieſem Puncte auf die berührenden Ebenen geben den Halbmeſſer der Kugel.

57. V. Zu drey gegebenen Ebenen und einem Puncte die Kugel zu finden, welche jene berührt und durch dieſen geht.

Dieſe Aufgabe wird auf die zweyte gebracht. Es wird nämlich gegeben eine gerade DE (Fig. 107.), in welcher der Mittelpunct der Kugel liegt, nämlich die Durchſchnittslinie zweyer halbirenden Ebenen; ferner ein Punct I, dadurch die auf ED ſenkrechte ID, und DK = DI, alſo der Punct K; dann auch noch eine berührende Ebene, welche von den drey gegebenen man nehmen mag.

58. VI. Zu drey Ebenen und einer Kugel diejenige Kugel zu finden, welche beiderley berühre.

Wird auf die Aufgabe V. gebracht.

59. VII. Zu zwey Puncten und zwey Ebenen die Kugel zu finden, welche durch jene gehe und dieſe berühre.

Wird auf die Aufgabe II. gebracht.

60. VIII. Zu zwey Puncten und zwey Kugeln die Kugel zu finden, welche durch jene gehe und dieſe berühre.

Wird auf die Aufgabe III. gebracht.

61. IX. Zu einem Puncte und drey Kugeln diejenige zu finden, welche durch jenen gehe und dieſe berühre.

Wird auf die Aufgabe VIII. gebracht.

62. X. Zu vier Kugeln die ſie alle berührende zu finden.

Wird auf die Aufgabe IX. gebracht.
Die Auflöſung iſt der Vietäiſchen von drey Kreiſen, die einen vierten berühren ſollen, (Kreis 95.) ganz gleichſtimmig. Dort ſind drey Kreiſe, hier vier Kugeln.

63. Außer dieſen Aufgaben ſind noch fünf dieſer Art. Es können nämlich noch ein Punct, mit zwey Ebenen und einer Kugel, oder zwey Ebenen und zwey Kugeln gegeben ſeyn. Die erſtere dieſer Aufgaben wird auf die VII. und die andere auf jene erſtere gebracht. Noch ſind drey Aufgaben übrig, zu deren Auflöſung Fermat einige Lehrſätze gebraucht, welche von Kreiſen und Linien in derſelben Ebene auf Kugeln und auf Linien in verſchiedenen Ebenen übergetragen werden.

64. Die Conſtruction der Aufgabe (53.) läßt ſich ganz in einer Ebene ausführen. Es ſey (Fig. 106.) A B C der Kreis durch drey der gegebenen Puncte, A, B, C. Die ſenkrechte von dem vierten Puncte D auf die Ebene dieſes Kreiſes treffe ſie in L, und die Höhe des Punctes D über der Ebene ſey L D. Dieſe und der Punct L ſind unmittelbar oder mittelbar, durch die Coordinaten des Punctes D gegeben. Die gerade E L (verlängert) ſchneide den Kreis in I und K. Da D L und F H beide ſenkrecht auf die Ebene des Kreiſes ſtehen, ſo ſind ſie einander parallel (Ebene, 10.), und liegen alſo in einer Ebene, und die Ebene der I K und L D geht durch E F, alſo durch den Mittelpunct der geſuchten Kugel. Der Kreis durch die Puncte D, I, K iſt ein größter und der Halbmeſſer deſſelben dem Halbmeſſer der Kugel gleich. Man braucht alſo nur in der Ebene des Kreiſes A B C durch den Grundpunct L von D die ſenkrechte L D auf E L zu ziehen, darauf L D gleich der Höhe des Punctes D zu nehmen, und durch die drey Puncte, I, K, D einen Kreis zu beſchreiben, ſo iſt der Halbmeſſer deſſelben der geſuchte der Kugel.

Auf ähnliche Art wird man die Conſtruction der andern Fälle auf Zeichnungen in einer Ebene bringen können.

65. Um den Zuſammenhang des Halbmeſſers der Kugel mit den gegebenen Puncten zu überſehen, wird folgende Conſtruction dienlich ſeyn.

Es ſeyn A, B, C, D (Fig. 109.) die vier gegebenen Puncte, welche nicht in einer Ebene liegen. Man nehme die Ebene dreyer, als A, B, C zur Grundebene, auf welche der vierte Punct D durch drey gegebene Coordinaten bezogen werde. So wird die Neigung der Ebene ACD gegen die ABC gegeben, zugleich mit der Lage des Punctes D in der Ebene ACD, durch den Punct auf AC, wo die ſenkrechte von D auf AC ſie trifft, und durch die ſenkrechte ſelbſt. Durch die Puncte A, B, C beſchreibe man einen Kreis, deſſen Mittelpunct E ſey; gleichfalls durch A, C, D einen Kreis, deſſen Mittelpunct F ſey. Von E und F ziehe man auf AC ſenkrechte, ſo halbiren dieſe die AC, und treffen ſie in demſelben Puncte G. Der Winkel FGE iſt der Neigungswinkel der beiden Ebenen ABC, ADC. Die Ebene dieſes Winkels ſteht auf dieſe Ebenen ſenkrecht (Ebene, 32.). In derſelben Ebene ziehe man auf GE und GF die ſenkrechten EH, FH, welche ſich in H ſchneiden. Da die Ebene FGEH ſenkrecht auf ABC iſt, und HE ſenkrecht auf GE ſteht, ſo iſt HE ſenkrecht auf die Ebene ABC (Ebene, 25.). Eben ſo iſt HF ſenkrecht auf die Ebene ADC. Dadurch ſind die rechtwinkligen Dreyecke AEH, BEH, CEH ſich gleich, ſo wie die rechtwinkligen Dreyecke, AFH, CFH, DFH. Folglich ſind die HA, HB, HC, HD einander gleich, und H iſt der geſuchte Mittelpunct der Kugelfläche durch A, B, C, D.

Man ſieht nun leicht, wie die ganze Conſtruction in einer Ebene ausgeführt werden kann. Das Dreyeck ACD wird in die Ebene von ABC gelegt, ſo wie das EGH. An dieſes wird das Dreyeck FGH mit dem gehörigen Winkel FGH gefügt. An GE wird eine gerade, die der EA oder EB gleich iſt, geſetzt, ſo wird der Halbmeſſer der Kugel HA oder HB erhalten.

66. Durch Rechnung allein wird der Halbmeſſer der Kugelfläche, welche durch vier gegebene Puncte geht, folgendermaßen gefunden. Es ſeyn die Coordinaten zu einem der Puncte, a, b, c, die correſpondirenden (jenen parallelen) Coordinaten zu dem Mittelpuncte, x, y, z;

der Halbmeſſer der Kugel = R, ſo iſt (krumme Fläche, 40.)

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2 = R^2,$$

oder $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Durch die vier Puncte werden vier ſolcher Gleichungen gegeben, aus welchen ſich die drey unbekannten x, y, z wegſchaffen laſſen, worauf eine Gleichung für R durch gegebene Größen hervorgeht. Iſt R gefunden, ſo werden auch aus den Gleichungen für x, y, z dieſe beſtimmt, welches die Lage des Mittelpunctes giebt. — Durch das Abziehen einer der vier Grundgleichungen von den drey übrigen gehen die Quadrate von x, y, z heraus, und die Gleichungen für dieſelben ſind vom erſten Grade. Die Aufgabe iſt alſo immer eine mögliche.

67. Eine andere Aufgabe über Berührungen der Kugeln iſt, wie viele ſich gleiche Kugeln um eine gegebene Kugel herum gelegt werden können, ſo daß ſie dieſe berühren, und jede zugleich von den um ſie liegenden berührt werde; auch welches das Verhältniß der Halbmeſſer ſey, der innern berührten Kugel und der ſie berührenden. Käſtner hat dieſe Aufgabe aufgelöſet, in den Dissertt. mathem. et physicis, Altenburgi, 1771. Es können entweder 4, oder 6, oder 12 Kugeln ſeyn. Von vier Kugeln berühren ſich je drey einander, von ſechs Kugeln je vier, von zwölf Kugeln je fünf. Die Berührungspuncte bilden in dem erſten Falle ein Tetraedrum, in dem zweyten ein Oktaedrum, in dem dritten ein Dodekaedrum. Die Halbmeſſer der um eine Kugel herumgelegten Kugeln ſind größer als der Halbmeſſer dieſer innern berührten.

68. Es kommt hier darauf an, die Oberfläche einer Kugel in eine Anzahl gleich großer und gleichſeitiger Dreyecke zu theilen, deren Winkelpuncte die Berührungspuncte mit der innern Kugel ſind. Die Abſtände der nächſten Berührungspuncte ſind nämlich alle einander gleich, und bilden alſo lauter gleiche und gleichſeitige Dreyecke. Der Inhalt eines ſolchen Dreyecks muß daher ein völlig meſ-

ſender Theil der ganzen Oberfläche ſeyn, ſo wie die Winkel ein ſolcher Theil von 360 Graden ſeyn müſſen. Jeder der gleichen Winkel ſey $= A$, ſo iſt der Inhalt eines Dreyecks $= 3A - \pi$ für den Halbmeſſer $= 1$ (35.). Die Anzahl der gleichen Dreyecke ſey $= n$, und die Anzahl der Winkel um einen Winkelpunct ſey $= m$, ſo iſt $\frac{4\pi}{3A - \pi} = n$, da 4π die ganze Kugelfläche iſt, und $mA = 2\pi$, wo 2π vier rechte Winkel bedeutet. Daraus iſt $\frac{4m}{6 - n} = n$. Da m nur die Werthe, 3, 4, 5 haben kann, ſo erhält n nur die Werthe 4, 8, 20.

Bey vier Dreyecken liegen drey Winkel, jeder von 120°, um einen Mittelpunct. So ſind 12 Winkel in allen vier Dreyecken vorhanden, von welchem drey zu einem Winkel- oder Berührungspuncte gehören. Die Anzahl dieſer Puncte, das iſt, der berührenden Kugeln iſt alſo vier.

Acht Dreyecke enthalten 24 Winkel, in jedem Winkelpuncte 4; die Anzahl der Winkelpuncte oder berührenden Kugeln iſt alſo ſechs.

Zwanzig Dreyecke enthalten 60 Winkel, in jedem Winkelpuncte 5; die Anzahl der Winkelpuncte oder berührenden Kugeln iſt alſo zwölf.

69. Die Seiten der gleichen Dreyecke ſeyn jede $= a$, die Winkel $= A$, ſo iſt $\cos A = \frac{\cos a - \cos a^2}{\sin a^2}$

$$= \frac{\cos a}{1 + \cos a}$$ (Trigonometrie, ſphäriſche), und

$$1 - \cos A = \frac{1}{1 + \cos a}, \text{ oder } 2\sin\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2\cos\tfrac{1}{2}a^2},$$

das iſt, $\cos\frac{1}{2}a = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}A}$.

70. Der Halbmeſſer einer der berührenden Kugeln ſey $= x$, der innern berührten $= 1$, ſo iſt

$\frac{x}{1+x} = \sin\frac{1}{2}a$, wie man durch eine leichte Zeichnung eines Durchſchnitts durch die Mittelpuncte der innern berührten Kugel und zweyer äußern finden wird. Daher iſt $x = \frac{\sin\frac{1}{2}a}{1-\sin\frac{1}{2}a}$.

Für $n = 4$, iſt $m = 3$; $A = 120°$; $\operatorname{coſ}\frac{1}{2}a = \frac{1}{2\sin 60°} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, und $\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Daher $x = \frac{2}{\sqrt{6}-2} = \sqrt{6}+2 = 4{,}4494\ldots$

Für $n = 8$ iſt $m = 4$; $A = 90°$; $\operatorname{coſ}\frac{1}{2}a = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin\frac{1}{2}a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = 2{,}4142\ldots$

Für $n = 20$ iſt $m = 5$; $A = 72°$; $\operatorname{coſ}\frac{1}{2}a = \frac{1}{2\sin 36°}$. Es iſt $\sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$, nach Goniometrie, 168. Daraus iſt $\sin\frac{1}{2}a^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}$, und $x = \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}-\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$. Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $\sqrt{(5-\sqrt{5})}+\sqrt{(3-\sqrt{5})}$, ſo wird erhalten $x = \sqrt{(5-2\sqrt{5})}+\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) = 1{,}1085$.

71. In dem aſtronomiſchen Jahrbuche für 1805. S. 135. hat Schubert eine Anwendung dieſer Unterſuchung auf die Frage gemacht, wie viel Sterne von jeder Größe vorhanden ſeyn würden, wenn ſie alle gleichen Abſtand von einander hätten, ſo groß als der Abſtand unſerer Sonne von einem der nächſten Fixſterne. Bey dieſer An-

nahme bleiben Lücken, oder man muß eine unbeſtimmte Ungleichheit der Abſtände geſtatten. Die erſte Kugelſchicht um die innerſte Kugel enthält ſolchergeſtalt 14 Kugeln, die zweyte 57, die dritte 130, die vierte 231, die fünfte 362, die ſechste 521. — Die Kugel, wovon unſere Sonne der Mittelpunct iſt, könnte auch eine der um eine Centralkugel herum gelagerten ſeyn.

In Zeughäuſern werden die Kanonenkugeln in Schichten auf einander gelegt, die regelmäßig abnehmen, ſo daß die Haufen eine dreykantige gleichſeitige Pyramide, oder eine vierkantige gleichſeitige, oder ein an den Enden ſchief abgeſchnittenes Prisma bilden. Die Zahlen der Kugeln in den Schichten machen eine arithmetiſche Reihe der zweyten Ordnung aus, daher ſie leicht zu ſummiren ſind. In der dreykantigen Pyramide ſeyn m Schichten, ſo iſt die Anzahl der Kugeln $= \frac{1}{6}m(m+1)(m+2)$. In dem prismatiſchen Haufen ſeyn m Schichten, daher die unterſte Schicht auf der einen Seite m Kugeln enthalte, die Anzahl der Kugeln auf der andern Seite ſey n, ſo iſt die Anzahl der Kugeln in dem Haufen $= \frac{1}{6}m(m+1)(3n-m+1)$. Nimmt man $m = n$, ſo iſt die Anzahl $= \frac{1}{6}m(m+1) \times (2m+1)$, die Menge der Kugeln in der vierkantigen Pyramide.

Kugeldreyeck oder ſphäriſches Dreyeck, ſ. den vorhergehenden Artikel, und wegen der Berechnungen die ſphäriſche Trigonometrie.

Kugelgewölbe mit quadrirbaren Öffnungen, ſ. Florentiniſche Aufgabe.

Kugelzahl, auch Circul- oder Kreiszahl, iſt eine ſolche, deren Potenzen in der letzten Ziffer mit der Zahl übereinkommen. Dieſes iſt eine ganz unnütze Ausſonderung in der ältern Arithmetik.

Kunſtwort iſt eine zum wiſſenſchaftlichen Gebrauche beſtimmte wörtliche Bezeichnung eines allgemeinen

Begriffes. Hier iſt nur von der Bildung der mathematiſchen Kunſtwörter die Rede.

Sparſamkeit in Kunſtwörtern, eine ſolche Bildung derſelben, wodurch ſie ſchon einigermaßen verſtändlich werden, genaue Beſtimmung und Gebrauch in immer ungeänderter Bedeutung, das ſind einige von den Eigenſchaften der mathematiſchen Sprache.

Die alten Geometer nahmen ihre Kunſtwörter ſoviel als möglich aus der gemeinen Sprache her. Die griechiſchen Benennungen von Punct, Linie, Fläche (σημειον, γραμμη, επιφανεια) weiſen auf bezeichnen, ſchreiben, auswendig erſcheinen; Mittelpunct des Kreiſes iſt die Spur eines Stachels; der Cylinder iſt vom Wälzen benannt. Im deutſchen ſind Punct und Linie gelehrte Wörter, und zugleich fremden Urſprungs; der Ausdruck, Fläche, enthält nichts, was auf äußeres Erſcheinen an einem Körper deutete.

Den Kegelſchnitten gaben die Geometer anfangs keine eigene Namen. Weil ſie nur den gleichſeitigen Kegel betrachteten, und die ſchneidende Ebene allemahl auf eine Seite von ihm ſenkrecht ſetzten, ſo war es ihnen genug, die Geſtalten vermittelſt der Beſchaffenheit des Winkels am Scheitel des durch die Axe gelegten Dreyecks zu unterſcheiden: Schnitt des rechtwinkligen, ſtumpfwinkligen, ſpitzwinkligen Kegels. Als man in der Folge ſah, daß die Schnitte des ungleichſeitigen Kegels, nach der Lage der ſchneidenden Ebene, ebenfalls dieſe Linien werden, gab man ihnen beſondere Namen, die aus der gemeinen Sprache genommen wurden, und eine Vergleichung, einen Überſchuß, einen Mangel anzeigen, nachdem das Quadrat der halben Ordinate ſo groß, größer, oder kleiner iſt als das Rechteck aus einer gegebenen geraden in die Abſciſſe vom Scheitel an genommen.

Eigene Namen giebt der Geometer den zuſammengeſetzten Begriffen nur, wenn er ſie ſehr oft gebraucht. Daher bekommen geradlinige Figuren von mehr als vier Seiten nur zweyerley Abtheilungen: ordentliche und unordentliche; ähnliche und unähnliche.

Man ſucht immer mit den wenigſten Kunſtwörtern auszukommen. Darum werden ältere bey Seite gelegt, wenn die Gegenſtände auf eine neue und beſſere Art betrachtet werden. Beyſpiele giebt Euklids X. Buch, beſonders in den zweyten Erklärungen, die nach dem 48. Satze folgen. S. Irrational.

Die Rechenmeiſter des 17ten Jahrhunderts gaben jeder Potenz und jeder Polygonalzahl eigene Namen. Dieſe ſind gegenwärtig veraltet, weil man dieſe Zahlen bloß durch Zahlen unterſcheidet.

Die beſondern griechiſchen Wörter, wodurch Vieta ganz leichte und gewöhnliche Umwandlungen der Gleichungen bezeichnet, ſind gar nicht üblich geworden. So auch nicht die beſondern griechiſchen Benennungen der Logarithmen der trigonometriſchen Linien, welche Nicolaus Kaufmann in ſeiner Ausgabe der trigonometriſchen Tafeln einführen wollte.

In der Kepleriſchen Aſtronomie ſind die Kunſtwörter der Ptolemäiſchen, als Excentricität, excentriſcher Kreis, Apſis u. m. beybehalten, nur ihre Bedeutung iſt geändert, aber ſo, daß ſie gleich klar iſt.

Ich habe dieſe ſehr gut ausgeſuchten Beyſpiele aus einem Aufſatze von Käſtner in Eberhards philoſophiſchem Magazin, 4. Bd. 3. St. genommen. Unſer Wörterbuch giebt noch viele an die Hand. Das Kunſtwort, Logarithmus, enthält zugleich eine Erklärung des Begriffs; Krümmungskreis zeigt gleich die Beziehung dieſes Kreiſes auf eine krumme Linie an, und circulus osculator giebt ſogar eine ſinnliche Vergleichung. Konoid, Sphäroid, Cykloide, Epicykloide laſſen durch die Umendung ſchon ihre Verwandſchaft mit bekanntern Formen einſehen. Das Kunſtwort, Sinus, enthält zwar eine ſehr geſuchte Vergleichung in einer ſehr wenig bekannten Sprache, wird aber, da es einmal eingeführt iſt, als ein willkürliches Zeichen angeſehen.

Die Kunſtwörter, die aus dem Griechiſchen und Lateiniſchen herkommen, werden am beſten größtentheils beybehalten. Sie gehören zu der allgemeinen Sprache der

Mathematiker. Überſetzungen, wie ſie ehedem J. C. Sturm, und in unſern Zeiten Bürja, verſucht haben, ſind oft nicht gleich verſtändlich. Im wiſſenſchaftlichen Vortrage darf der Geiſt durch Beſchäftigung mit den Wortzeichen nicht zerſtreut werden.

Künſtlich iſt ein Ausdruck, der verſchiedene Entgegenſetzungen in der Mathematik bedeutet. Man nennt künſtliche Sinus und Tangenten die Logarithmen der numeriſchen Sinus und Tangenten, im Gegenſatze gegen dieſe ſelbſt, die alsdann natürliche heißen. In Sherwins mathematiſchen Tafeln ſind dieſe von jenen durch die Beywörter Natural und Logarithmical unterſchieden. — Der natürliche Tag iſt die Zeit von Mitternacht zu Mitternacht oder von Mittag zu Mittag. Der künſtliche Tag iſt die Zeit des Aufenthalts der Sonne über dem Horizont. — Künſtliche chronologiſche Abſchnitte oder Perioden ſind Wochen, Sonnen-Circul (Sonntagsbuchſtabenperioden), Mondcirkel, Indictionenperiode; natürliche ſind Jahre, und andere Perioden der Bewegungen der Himmelskörper. — Die künſtliche Erdkugel iſt eine Abbildung der wirklichen.

L.

Lage (Situs) iſt die Art, wie Puncte und geometriſche Größen neben einander gedacht werden. Die Lage eines Punctes gegen andere Puncte wird durch die Länge und Lage der geraden Linien von dem Puncte zu jenen angegeben; gegen eine Linie durch die gerade Linie, welche unter einem beſtimmten Winkel an dieſe gezogen wird, und den Punct, wo ſie dieſelbe trifft; gegen Ebenen durch drey Coordinaten, urſprüngliche oder abgeleitete. — Die Lage zweyer geraden Linien, die in einer Ebene liegen, wird durch ihren Winkel und die Stelle des Scheitelpuncts beſtimmt; die Lage einer geraden Linie gegen eine andere, die nicht in einer Ebene mit ihr liegt, durch den Winkel, welchen die-

ſe und eine jener erſtern, durch irgend einen Punct der letztern, parallel gezogene mit einander machen, nebſt dem Abſtande dieſes Punctes von der erſtern Linie. — Die Lage einer geraden Linie gegen eine Ebene wird durch zwey Gleichungen zwiſchen drey Coordinaten angegeben, ſ. Linie; auch durch zwey Winkel und eine Länge, wie in der Aſtronomie durch Länge, Breite und linearischen Abſtand. — Die Lage zweyer Ebenen gegen einander wird durch die Lage ihrer Durchſchnittslinie und durch den Neigungswinkel beſtimmt.

Leibnitz hat, wie Wolf in der Abhandlung de ſtudio mathematico, §. 144 Elem. Matheſ. T. V. anführt, in der neuern Analyſis noch eine Rechnung der Lage (calculum ſitus) vermißt, die von der Rechnung der Größen ganz verſchieden ſeyn müßte, welche aber weder von ihm, noch von andern ausgeführt worden ſey. Wolf bemerkt bey dieſer Gelegenheit, daß die algebraiſche Rechnung ſich mit Größen, nicht mit der Lage beſchäftigt. Inzwiſchen mag man wohl behaupten, daß die trigonometriſche (goniometriſche) Rechnung, wie ſie gegenwärtig behandelt wird, nebſt der vollſtändigen Anwendung der algebraiſchen Gleichungen auf alle geometriſche Unterſuchungen, die von Leibnitz verlangte, und von Wolf noch gewünſchte, Analyſis der Lage ſey. Die Lage beruht auf Längen und Winkeln. Jenes ſind ja Größen, und dieſe werden durch ſtellvertretende Größen angegeben. Winkel können mittelſt der goniometriſchen Linien addirt oder ſubtrahirt werden, nur daß dabey die Rechnung mehr Schwierigkeit macht, als die geometriſche Zuſammenſetzung. Ob hier und bey der Vergleichung der Winkel durch eine beſondere Analyſis Erleichterung verſchafft werden könne, kann man nicht entſcheiden, da es ſich überhaupt ſelten beſtimmen läßt, was zu erfinden möglich ſey oder nicht. Doch müßte jene Analyſis unſerer bisherigen analog ſeyn, um mit ihr in Verbindung gebracht werden zu können. In dem mathem. Lexicon, Leipzig 1734, Artik. Lagerechnung, wird angeführt, daß Leibnitz von ſeiner Analyſis der Lage bloß mündlich gegen Wolf etwas geäußert habe.

Es verdient angemerkt zu werden, daß Lambert, der mehrere von Leibnitz hingeworfene Ideen, z. B. die einer allgemeinen philoſophiſchen Sprache, aufgefaßt und auszuführen geſucht hat, der Leibnitziſchen Lagerechnung in ſeinen zahlreichen Schriften nie erwähnt. Soll man dies als ein Zeichen anſehen, daß er Leibnitzens Idee für nichts weiter als für eine Idee genommen hat?

D'Alembert ſagt in der Encyclopédie, art. Situation: Die Analyſis der Lage iſt allerdings etwas, das der gewöhnlichen Algebra fehlt. Daher ſcheint eine Aufgabe oft mehr Auflöſungen zu haben, als ſie bey den eingeſchränkten Beſtimmungen, mit welchen man ſie betrachtet, haben muß. Er führt hierauf zum Beyſpiele die Aufgabe an, welche in dieſem Wörterbuche, Th. I. Anwendung der Analyſis auf die Geometrie, 8. Aufg. aufgelöſet iſt. Dann fährt er fort: "es iſt wahr, daß dieſer Reichthum der Algebra, wodurch ſie mehr giebt, als man verlangt, bewundernswerth und in mehreren Rückſichten vortheilhaft iſt; aber eben dadurch wird oft für eine Aufgabe, die nach dem ſtrengen Wortverſtande, nur eine Auflöſung zuläßt, eine Gleichung mit mehreren Abmeſſungen gefunden, und kann dadurch gewiſſermaßen nicht auflösbar werden. Es wäre zu wünſchen, daß man Mittel fände, die Lage mit in die Rechnung zu bringen; dadurch würde dieſe meiſtens ſehr abgekürzt werden; aber der Zuſtand und die Beſchaffenheit der Analyſis ſcheinen dieſes nicht zu geſtatten."

Ich ſehe es unbedingt als eine merkwürdige und ſchätzbare Eigenſchaft der Algebra an, daß ſie die vorgelegte Frage berichtigt, wenn ſie in einem zu eingeſchränkten Sinne abgefaßt iſt. Mag doch der Fragende unter allen Auflöſungen diejenige herausſuchen, welche ihm nach ſeinen beſondern Abſichten die paſſende iſt. Von dieſer Art ſind die Aufgaben, welche d'Alembert in dem angeführten Werke, am Ende des Artikels, équation, angiebt. Eher möchte hieher die Aufgabe von dem Stoße mehrerer Körper auf einen zugleich gehören. Dynamique, par d'Alembert, art. 176, 2de édit.

Carnot in ſeiner Géométrie de position (à Paris 1803. 489 pages in 4. 15 pl.) bemerkt in der Einleitung, daß der Gegenſtand ſeines Werkes von dem Zwekke der Analyſis der Lage zwar verſchieden, aber doch demſelben analog ſey. Leibnitz wollte, ſagt er hierauf, daß man in den Ausdruck der Bedingungen einer geometriſchen Aufgabe die Verſchiedenheit in der Lage der gleichnamigen (correſpondirenden) Theile der verglichenen Figuren einführen ſollte, damit man, wenn ſie durch einen gut auszeichnenden Charakter wären geſondert worden, ſie deſto leichter in der Rechnung einzeln darſtellen könnte (isoler). Nun aber werde dieſe Verſchiedenheit der Lagen oft durch bloße Veränderungen der Zeichen + und — angegeben; und gerade die Theorie dieſer Veränderungen ſey es, welche den Gegenſtand ſeiner Unterſuchungen ausmache, und die er Géométrie de position nenne.

Wenn dieſes Leibnitzens Meinung mit der Lagenrechnung war, ſo, dächte ich, wäre ſie durch die trigonometriſche und analytiſch-geometriſche Rechnungs-Methode, nach ihrer gegenwärtigen Behandlungsart, völlig erreicht. Allein Leibnitz ſcheint eine unmittelbare Einführung der Lagen in die Rechnung ſich als möglich gedacht zu haben.

Von Carnots Werke wird einige Nachricht hier dem Leſer willkommen ſeyn, da ich in den Artikeln, Anwendung der Analyſis auf die Geometrie, und entgegengeſetzte Größen, noch nichts darüber mittheilen konnte. Des Verfaſſers Zweck war, eine neue Behandlungsart bey der Anwendung der Algebra auf die Geometrie anzugeben, wodurch dieſe Verbindung eine weitere Ausdehnung erhielte. Ihm ſey Géométrie de position une théorie, dont l'objet spécial est d'exprimer en effet par des tableaux comparatifs, dans des figures de même genre la diversité de positions de leurs parties correspondantes, après avoir préalablement formé le tableau général de leurs propriétés communes. Ich gebe hier die eigenen Worte des Verfaſſers, um ſeinen Sinn auch nicht im geringſten verfehlen zu laſſen. Die

Vergleichungstafeln ſtellen den Zuſammenhang der Beziehungen dar, die zwiſchen den verſchiedenen Theilen derſelben Figur vorhanden ſind, und die Abänderungen, wodurch ſich die darauf bezogenen Figuren ſowohl von jenen, als eine von der andern unterſcheiden. Es ſind dabey noch beſondere Zeichen eingeführt, um die verſchiedene Lage der Theile auch ohne Anſchauung der Figur darzuſtellen. Der Vf. fand, wie es ſehr natürlich iſt, bey der Anwendung der Lehre von den entgegengeſetzten Größen, ſo wie ſie gewöhnlich vorgetragen wird, nach welcher ſie ſolche ſind, die zuſammengerechnet ſich einander ganz oder zum Theil aufheben, Schwierigkeiten. Dadurch gerieth er auf die andere Art der Entgegenſetzung, nämlich die in den verſchiedenen Verbindungen mehrerer zuſammengehörigen Größen, die ſich in weiter nichts unterſcheiden, als durch die Art, womit die Größen in die analytiſchen Formeln in Rückſicht auf Addition oder Subtraction eingehen. Was in dieſem Wörterbuche, Art. entgegengeſetzte Größen, Normalfall heißt, nennt Carnot Système primitif, und die damit verwandten, aus jener durch bloße Veränderung in den Vorzeichen einer oder mehrerer in den analytiſchen Formeln vorhandenen Größen abgeleiteten, Fälle nennt er Systêmes corrélatifs. Bey der Beſtreitung der gewöhnlichen Vorſtellung in der vorläufigen Abhandlung wird Carnot die Entgegenſetzung darin noch nicht allgemein genug betrachtet haben, daß er ſie auf den Fall einſchränkt, da zwey Linien von einem Puncte aus nach entgegengeſetzten Richtungen genommen werden, da ſie auch Statt findet, wenn ſie nach derſelben Richtung gezogen ſind, aber in Beziehung auf eine andere, als poſitiv betrachtete, Linie entgegengeſetzte Lage haben.

Das Werk enthält außer eigenen neuen, die Polygone und Polyedren betreffenden Sätzen noch manche von ältern Geometern aufgenommene, hier neu bewieſen. Es iſt allen denen ſehr zu empfehlen, welche die Anwendung der Algebra auf die Geometrie ſtudieren wollen.

Lambertiſche Reihe iſt eine Reihe, welche aus dreygliedrigen algebraiſchen Gleichungen eine ihrer Wurzeln darſtellt. Lambert hat ſie in den Abhandlungen der Baſeler Geſellſchaft, die den Titel: Acta helvetica physico-mathematico-botanico-medica, haben, im dritten Theile angegeben. Ich führe ſie hier aus einer Abhandlung von Euler, Observationes circa radices aequationum, Novi Comment. Acad. Petrop. T. XV. an.

Es ſey $1 = \frac{A}{y^{\lambda}} + \frac{B}{y^{\mu}}$, ſo iſt

$$y = A^{\frac{1}{\lambda}} + \frac{1}{\lambda} A^{\frac{1-\mu}{\lambda}} B + \frac{1+\lambda-2\mu}{2\lambda^2} A^{\frac{1-2\mu}{\lambda}} B^2$$

$$+ \frac{(1+2\lambda-3\mu)(1+\lambda-3\mu)}{2.3\lambda^3} A^{\frac{1-3\mu}{\lambda}} B^3$$

$$+ \frac{(1+3\lambda-4\mu)(1+2\lambda-4\mu)(1+\lambda-4\mu)}{2.3.4\lambda^4} A^{\frac{1-4\mu}{\lambda}} B^4$$

$+$ etc.

In dem Artikel, Reihe, wird der Beweis von dieſer Formel gegeben werden, und zwar als eines beſondern Falles einer allgemeinen Aufgabe für vielgliedrige Gleichungen.

Euler kommt auf dieſe Reihe, die er als ſehr merkwürdig rühmt, durch die Unterſuchung über die Formeln für die Summen der Potenzen von den Wurzeln einer Gleichung, diejenigen, die in dem Artikel, combinatoriſche Analyſis, 53. aufgeführt ſind, vergl. Artik. Combination, 43. Eulers Formel iſt aber viel zuſammengeſetzter als die dortige. Man gebe der Reihe an dem erſtern Orte, außer der Einheit nur zwey Glieder, und ſetze ſie $= 0$, ſo erhält man eine Gleichung von der Form der Lambertiſchen. Die Formeln daſelbſt geben die Summe der Potenzen von a, b, c, d, etc. deren reciproke Werthe entgegengeſetzt genommen, nämlich $-\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{b}$, $-\frac{1}{c}$,

$-\frac{1}{d}$, etc. die Wurzeln der Gleichung ſind. Allein es iſt wohl zu merken, daß jene Formeln ganze Potenzen der Wurzeln vorausſetzen, und nicht geſtatten, die Exponenten von A, B, C, D, etc. negativ, oder dieſe als Diviſoren zu nehmen, um die Reihen ohne Ende fortzuſetzen. Es verbietet dieſes auch die Geſtalt der Formeln, welche von ſelbſt mit dem nten Gliede abbrechen, da das nächſtfolgende den Diviſor o erhalten würde. Dieſes darf man nicht überſpringen, da es entweder unendlich groß ſeyn würde, wenn der Dividendus endlich iſt, oder unbeſtimmt, wenn dieſer Null iſt. Euler läßt die Reihe für x^n, die er aus der Gleichung, $1 = \frac{A}{x} + \frac{M}{x^m}$ hergeleitet hat, unendlich fortlaufen, welche aber nun, wie er zu erweiſen ſucht, nicht ein Aggregat von Potenzen, ſondern die nte Potenz der größten Wurzel iſt. Dieſe Verwandlung iſt doch befremdend. Wie die Sache ſich verhalte, will ich an einem Beyſpiele zeigen.

Es ſey $(1 + az)(1 + bz)(1 + cz) = 1 + Az + Cz^3$, weil der Coefficient von z^2 Null ſeyn ſoll. Zufolge der Formeln (Combinat. Analyſis, 53.) iſt

$$a^n + b^n + c^n = \frac{n}{n} A^n + \frac{n}{n-2} \cdot \frac{n-2}{1} A^{n-3}C$$

$$+ \frac{n}{n-4} \cdot \frac{n-4 \cdot n-5}{1 \cdot 2} A^{n-6}C^2$$

$$+ \frac{n}{n-6} \cdot \frac{n-6 \cdot n-7 \cdot n-8}{1 \cdot 2 \cdot 3} A^{n-9}C^3 + \text{etc.}$$

Die Verſetzungszahlen der Combinationen von A und C ſind der zweyte Factor des Coefficienten, worin der höchſte partielle Factor gegen den Diviſor in dem erſtern Factor ſich aufhebt. Hier ſind, wie ſchon bemerkt iſt, $-\frac{1}{a}$,

$-\frac{1}{b}, -\frac{1}{c}$ die Wurzeln der Gleichung, $1 + Az + Cz^3 = 0$. Man ſetze $z = -\frac{1}{x}$, ſo ſind a, b, c die Wurzeln der Gleichung, $1 - \frac{A}{x} - \frac{C}{x^3} = 0$, oder dieſer, $x^3 - Ax^2 - C = 0$. Hieraus ergiebt ſich, mittelſt der Umwandlungs- oder Umkehrungsformel, in dem Artikel, Reihe,

$$x^n = A^n + nA^{n-3}C + \frac{n.n-5.}{1.2}A^{n-6}C^2$$
$$+ \frac{n.n-7.n-8.}{1.2.3}A^{n-9}C^3 + \text{etc.}$$

Dieſes iſt allerdings dieſelbe Reihe, wie die für $a^n + b^n + c^n$; allein darum haben beide Reihen nicht gleiche Werthe. Es kann x^n nicht dem Aggregat der drey Potenzen gleich ſeyn, da x eine der a, b, c iſt. Allein die Reihe für das Aggregat bricht ab, wenn der Exponent von $C = \frac{n}{3}$ oder die nächſt kleinere ganze Zahl iſt. Die Reihe für x^n geht ins Unendliche fort. Jene bis zu ihrem letzten Gliede fortgeſetzt giebt den vollſtändigen Werth des Aggregats; dieſe nur einen genäherten einer der Wurzeln, oft nur einen ſich wenig annähernden, oder wohl gar divergirenden. Es kommt dabey auf die Beſchaffenheit von $\frac{C}{A^3}$ an. Die Coefficienten nehmen zuerſt ab, wachſen aber weiterhin immer fort.

Später hin hat Euler die Lambertiſche Reihe noch einmahl vorgenommen, in den Actis Acad. Petrop. T. III. P. II. a. a. 1779. De serie Lambertina ejusque insignibus proprietatibus. Er giebt der trinomiſchen Gleichung dieſe Form,

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)\, v\, x^{\alpha+\beta}.$$

Daraus iſt

$$x^n = 1 + nv + \tfrac{1}{2} n (n + \alpha + \beta) v^2$$
$$+ \tfrac{1}{6} n (n + \alpha + 2\beta)(n + 2\alpha + \beta) v^3$$
$$+ \tfrac{1}{24} n (n + \alpha + 3\beta)(n + 2\alpha + 2\beta)(n + 3\alpha + \beta) v^3$$
$$+ \text{etc.}$$

Man vergleiche noch Resolution des équations numériques, par la Grange, Note XI. p. 248. ſ.

Lateralis aequatio iſt daſſelbe was eine einfache Gleichung oder eine vom erſten Grade. Dieſe hat nur eine Wurzel und kann durch bloße gerade Linien conſtruirt werden. Das Kunſtwort iſt veraltet; linearis würde ſchicklicher ſeyn.

Latus, Seite, iſt erſtlich die Seite einer geradlinigten Figur; zweytens die Wurzel einer Potenz, weil bey den Quadraten und Würfeln die Seiten derſelben in Zahlen ausgedruckt die Wurzeln der Zahlen ſind, welche den Inhalt des Quadrats und des Würfels angeben.

Latus rectum iſt bey Kegelſchnitten der Parameter; Latus transversum iſt die Hauptaxe an der Ellipſe und Hyperbel. Griechiſch nach Apollonius, der dieſe Benennungen eingeführt hat, ἡ ὀρθία und ἡ πλαγία. Jener giebt er in ſeiner Conſtruction eine auf dieſe ſenkrechte Lage; dieſe iſt gegen die Grundfläche des Kegels ſchief. Apoll Con. Libr I. prop. 12. 13.

Latus mecodynamicum kommt in der Schifffahrtskunſt vor, worin dadurch der Unterſchied der Länge zweyer Örter angegeben wird.

Lehnſatz, ſ. Lemma.

Lehrſatz, Theorema, ein Satz, der aus vorher erwieſenen Sätzen auf eine genaue, und man mag auch hinzuſetzen, kunſtgerechte, Art erwieſen wird. Von den Beweiſen ſ. den Artik. Beweis.

Lemma iſt bey den alten Geometern ein Hülfsſatz, der nicht in den gemein bekannten Elementen enthalten aber zum Erweiſe eines vorgetragenen Satzes nöthig iſt. Pappus hat zu dem Werke des Apollonius von den Kegelſchnitten und zu andern geometriſchen Schriften der Alten Lemmata mit den Beweiſen geliefert. Dieſe unterſcheiden ſich gänzlich von den Erläuterungen, die Eutocius den Schriften des Archimedes und Apollonius beygefügt hat.

Lemma heißt aber auch nun überhaupt ein Satz, der nicht unmittelbar in die Reihe der Sätze und Aufgaben, mit welchen man ſich beſchäftigt, gehört, aber zum Erweiſe oder Verſtändniß derſelben nöthig iſt. So kann man in der analytiſchen Geometrie einen Satz aus der Algebra, der Analyſis oder der Trigonometrie gebrauchen; in der angewandten Mathematik Sätze aus der reinen, oder aus einem andern Zweige derſelben. In dem letztern Sinne, da man aus einer andern Gattung von Lehren eines Satzes benöthigt iſt, kann man nur Lemma durch L e h n ſ a t z überſetzen. Das griechiſche Wort λημμα kommt her von λαμβανειν, nehmen.

Lemniscata iſt eine krumme Linie des vierten Grades, deren Gleichung iſt $(xx+yy)^2 = aa(xx-yy)$. Sie hat die Geſtalt der Ziffer ∞, und zwar in der angegebenen Lage, wenn die Abſciſſen x auf der Durchſchnittslinie nach der Länge genommen werden. Nämlich, wenn der Anfang der Abſciſſen in den gemeinſchaftlichen Punct beider Theile geſetzt wird, ſo ſind für gleiche und entgegengeſetzte x gleiche und entgegengeſetzte y auf beiden Seiten. Iſt $y = 0$, ſo iſt entweder $x = 0$, oder $x = a$, ſo daß $2a$ der größte Durchmeſſer iſt. Die Benennung bezieht ſich auf die Geſtalt der Curve. Lemniscus heißt im Griechiſchen die Schleife an einem Bande, womit ein Kranz oder dergleichen befeſtigt iſt.

J a k o b B e r n o u l l i iſt zuerſt auf die Lemniſcata gerathen, als er eine algebraiſche Curve ſuchte, mittelſt de-

ren er die Isochrona paracentrica conſtruiren könnte. (Acta Erud. 1694. Sept. Oper. T. I. Nro. LX.). Der Conte Fagnano, deſſen analytiſche Unterſuchungen im 2ten Th. S. 771. angeführt ſind, fand, daß in der Lemniſcata ſich unzählig viele Paare von Bogen angeben laſſen, die einander entweder gleich ſind, oder von welchen der eine doppelt ſo groß als der andere iſt. Daraus leitete er ein Verfahren her, auch für manche andere Verhältniſſe die Bogen anzugeben. Euler hat dieſes noch weiter getrieben, und Formeln gefunden, die es für irgend ein Verhältniß der Bogen leiſten, in einer Abhandlung: Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium. Novi Comm. Ac. Petrop. T. VI. a. a. 1756. 1757.

Das Intereſſe der Unterſuchung beruht hier bloß auf der Schwierigkeit. Die Bogen einer Curve mögen für ſich allein ſich nicht rectificiren, oder mit einer gegebenen geraden Linie vollſtändig vergleichen laſſen, allein dem ungeachtet mag es möglich ſeyn, darauf Bogen anzugeben, die ein rationales Verhältniß haben. So iſt die Lunula Hippocratis mit dem Quadrate des Halbmeſſers vergleichbar, obgleich die ganze Kreisfläche es nicht iſt. Fagnano fand, daß dieſes in den drey Curven, der Ellipſe, der Hyperbel und unſerer Lemniſcata geſchehen kann.

Man ſetze in der Gleichung für dieſe Curve $a = 1$, und $xx + yy = zz$, ſo iſt

$$z^4 = xx - yy = 2xx - zz = zz - 2yy.$$

Daraus iſt

$$x = z\sqrt{\frac{1+zz}{2}}; \qquad y = z\sqrt{\frac{1-zz}{2}}.$$

Die Differentiation giebt

$$\partial x = \frac{(1+2zz)\,\partial z}{\sqrt{2(1+zz)}}; \qquad \partial y = \frac{(1-2zz)\,\partial z}{\sqrt{2(1-zz)}}.$$

Das Differential eines Bogens, deſſen Coordinaten ſind x und y, iſt $= \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, ſ. Rectification. Folg-

lich iſt das Differential eines Bogens der Lemniſcata, nach gehöriger Reduction der beiden Brüche auf einen Nenner,

$$\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)} = \frac{\partial z}{\sqrt{(1 - z^4)}}.$$

Dieſe Differentialformel läßt ſich nicht integriren. Man löſe ſie in zwey Factoren auf, $\frac{1}{\sqrt{(1+z^2)}} \cdot \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}}$ oder $\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)}} \cdot \frac{\partial z}{\sqrt{(1+z^2)}}$. Verwandelt man den erſten Factor der erſten Form in eine Reihe, ſo hängt das Integral der ganzen Reihe vom Kreiſe ab; nimmt man daſſelbe mit der zwenten Form vor, ſo hängt das Integral von den Logarithmen ab. Das Integral iſt alſo eine eigenartige Größe, die weder durch Rectification des Kreiſes noch durch logarithmiſche Functionen ausgedruckt werden kann.

Es ſey CMNA (Fig. 110.) ein Quadrant der Lemniſcata, wo C der Mittelpunct iſt. Zu dem Puncte M gehören die Abſciſſe CP = x; PM = y, die Chorde CM = z. Eine andere Chorde ſey CN = u, ſo iſt der Bogen CM $= \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}$, und Bogen CN $= \int \frac{\partial u}{\sqrt{(1-u^4)}}$. Nun iſt die Frage, welche Function von z die Größe u ſeyn müſſe, damit der Bogen CM dem Bogem AM gleich ſey. Dieſes trifft ein, wenn man nimmt $u^2 = \frac{1-zz}{1+zz}$. Denn daraus iſt erſtlich $u\partial u = -\frac{2z\partial z}{(1+zz)^2}$, und wenn durch den Werth von u dividirt wird, $\partial u = -\frac{2z\partial z}{(1+zz)\sqrt{(1-z^4)}}$.

Ferner iſt $u^4 = \frac{1 - 2z^2 + z^4}{1 + 2z^2 + z^4}$, alſo $1 - u^4 = \frac{4z^2}{(1+z^2)^2}$, und $\sqrt{(1-u^4)} = \frac{2z}{1+zz}$. Die Subſtitution dieſer Werthe giebt den Bogen

$$CN = -\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}} + \text{Conſt.} = - \text{Bog. } CM$$

$+ \text{Conſt.}$ Folglich iſt $B.\ CN + B.\ CM = \text{Conſt.}$ In dem Puncte C iſt $z = 0$. Für dieſen Werth von z iſt $u = 1 = CA$. Alſo iſt $\text{Conſt.} = \text{Bog. } CMNA$. Demnach iſt $B.\ CN + B.\ CM = B.\ CMNA$, und $B.\ CM = B.\ AN$.

Nimmt man die Chorde des Bogens $CN = u = \frac{2z\sqrt{(1-z^4)}}{1+z^4}$, ſo iſt $\frac{\partial u}{\sqrt{(1-u^4)}} = \frac{2\partial z}{\sqrt{(1-z^4)}}$, daher der $B.\ CN = 2\ B.\ CM$.

Für höhere Vielfache wird die Function von z viel zuſammengeſetzter, weßwegen Liebhaber dieſer Unterſuchungen die Euleriſche Abhandlung nachſehen müſſen.

Die Tangente des Winkels, welchen die berührende mit der Abſciſſenlinie macht, iſt $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1 - 2zz}{1 + 2zz} . \sqrt{\frac{1+zz}{1-zz}}$. Für $z = 0$ iſt dieſer Quotient $= 1$; die Curve ſchneidet die Abſciſſenlinie in C unter einem halben rechten Winkel, wie voraus zu ſehen war.

Es ſind mehrere Curven, welche die Form einer Schleife oder wie die Ziffer der acht haben. Die Gleichung $ay = x\sqrt{(aa - xx)}$ giebt eine ſolche. Dieſe Curve läßt ſich leicht quadriren. Es iſt nämlich $ay\partial x = x\partial x \sqrt{(aa - xx)}$, wovon das Integral iſt $-\frac{1}{3}(aa-xx)^{\frac{3}{2}} + \text{Conſt} = -\frac{1}{3}(aa-xx)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}a^3$, wenn die Area mit $x = 0$ anfängt. Die unbeſtimmte

Area iſt $= \frac{2}{3} a^2 - \frac{2}{3} \left(a - \frac{xx}{a} \right) \sqrt{(aa-xx)}$.

Der ganze Flächenraum iſt $= \frac{4}{3} a^2$.

Die zuerſt betrachtete Lemniſcata, welche wegen der Eigenſchaft ihrer Bogen eigentlich die merkwürdige iſt, läßt ſich auch quadriren. Die etwas weitläufigere Rechnung wird zum Beyſpiele in dem Artikel, Quadratur, verſpart.

Die Caſſiniſche Curve (ſ. Caſſinoide) nimmt in einem Falle auch eine Figur wie die Ziffer 8 an.

Limes, ſ. Gränze. Zu dieſem Artikel mag hier noch folgendes beygefügt werden.

Gränzen einer Wurzel in ganzen Zahlen, ſind diejenigen ganzen Zahlen, zwiſchen welche eine oder auch mehrere Wurzeln enthalten ſind. Wie ſie gefunden werden, iſt in dem Artik., Gleichung, 231. gewieſen.

Gränzen einer unbeſtimmten Aufgabe ſind diejenigen Werthe der einen unbeſtimmten Größe, zwiſchen welchen alle ihre möglichen Werthe enthalten ſind. Eine ſolche Aufgabe heißt ſelbſt Problema limitatum. Z. B. wenn $ay = x\sqrt{(aa-xx)}$, wie an der einen Lemniſcata, ſo kann $+y$ nicht größer als $\frac{1}{2}a$ werden, weil für größere Werthe von y die Gleichung für x unmögliche Wurzeln erhält. Auch kann x nicht größer als a genommen werden, weil ſonſt die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ iſt. Alle Ordinaten an Curven, die in ſich wiederkehren, haben beſchränkte Werthe für die Coordinaten.

Eine limitirte, oder begränzte, Aufgabe iſt auch eine zwar beſtimmte Aufgabe, die aber nur eine einzige Auflöſung, oder eine gewiſſe Anzahl Auflöſungen zuläßt, wohin alle Aufgaben gehören, welche auf beſtimmte Gleichungen führen. Z. B. ein Dreyeck in zwey Theile nach einem gegebenen Verhältniſſe zu theilen, ſo daß die Theilungslinie durch einen gegebenen Punct in der Ebene des Dreyecks gehe, wobey nur zwey Auflöſungen möglich ſind,

dagegen ohne dieſe Bedingung unzählig viele Lagen der theilenden Linie Statt haben.

Lineariſch wird von Zahlen, von Aufgaben und von Gleichungen gebraucht.

Eine *lineariſche Zahl* iſt eine ſolche, die geometriſch durch eine gerade Linie vorgeſtellt wird, dagegen Flächenzahlen und Körperzahlen durch Flächen und Körper abgebildet werden. Dieſes iſt gegenwärtig veraltert.

Eine *lineariſche Aufgabe* iſt eine ſolche, welche geometriſch durch den Durchſchnitt zweyer geraden Linien aufgelöſet werden kann. Von dieſer Art ſind alle Aufgaben, welche nur auf Gleichungen vom erſten Grade führen.

Eine *lineariſche Gleichung* zwiſchen zwey veränderlichen Größen iſt eine ſolche, worin die eine derſelben nur in der erſten Potenz vorkommt, dergleichen $Py + Q = 0$ iſt, wo P und Q Functionen von der andern veränderlichen Größe x allein ſind.

Eine *linnariſche Differentialgleichung* iſt eine ſolche, worin die eine der veränderlichen Größen und ihr Differentiale bloß in der erſten Potenz vorkommen, als dieſe: $\partial y + Py\partial x = Q\partial x$, wo P und Q Functionen von x allein ſind. Auch mag die andere ebenfalls bloß in der erſten Potenz vorhanden ſeyn, wie in der Gleichung: $(\alpha + \beta x + \gamma y)\partial x = (\delta + \varepsilon x + \zeta y)\partial y$. Wie eine ſolche Differentialgleichung des erſten Grades aufgelöſet wird, iſt in dem Artikel, Integralgleichung, 10, 37. gewieſen, an dem erſtern Orte durch Sonderung der veränderlichen Größen, an dem andern durch Hinzuſetzung eines integrirenden Factors. Die Integration einer ſolchen Differentialgleichung vom zweyten Grade iſt daſelbſt, 94. 95. gelehrt. Von höhern Differentialgleichungen ſind eb. daſ. 101. die vornehmſten Schriften angezeigt. Dazu nehme man noch eine Abhandlung von *Condorcet* in den Mém. de l'Ac. de Paris, 1769.

Man hat auch *lineariſche Gleichungen mit endlichen Differenzen* beſonders unterſucht, wie es

von la Grange in den Miscell. Taurinenſ. T. I. und von la Place daſelbſt T. IV. geſchehen iſt. Von linearischen Gleichungen mit endlichen und unendlich kleinen Differenzen giebt Condorcet eine Methode der Auflöſung an, in dem Dictionn. encycl. mathém. art. Linéaire. Daſelbſt auch von linearischen Gleichungen mit endlichen und partiellen Differenzen.

Linie iſt eine Länge ohne Breite. So erklärt Euklides die Linie. Sie hat nur Theile, die auf einander folgen, nicht zugleich neben einander liegen. Wenn man auf die Entſtehung dieſes Begriffs Rückſicht nehmen will, ſo iſt die Linie die Gränze der Fläche, abgeſondert von der Fläche gedacht. Daher hat ſie keine Theile neben einander zugleich mit denen nach und vor einander, weil ſie ſonſt einen Theil der Fläche ausmachte. Eine Linie iſt eine Größe von einer Dimenſion oder Abmeſſung, ſo wie eine Fläche eine Größe von zwey, ein Körper von drey Dimenſionen iſt.

1. Die Linien ſind entweder gerade oder krumme. Die krummen ſind entweder einfach krumme, (die in einer und derſelben Ebene liegen), oder gedoppelt krumme, ſolche, von welchen kein Theil in einer Ebene liegt, ſ. krumme Linien von gedoppelter Krümmung.

2. Die gerade Linie iſt diejenige, welche zwiſchen den auf ihr befindlichen Puncten gleichförmig (auf einerley Art) liegt. So erklärt ſie Euklides, deſſen Erklärung ich im Original hieher ſetze, weil ſie nicht immer richtig überſetzt wird. Ἐυθεια γραμμη ἐςιν, ἥτις ἐξ ἰσου τοις ἐφ᾽ ἑαυτης σημειοις κειται. Die Gleichförmigkeit der Lage der Theile iſt es, was die gerade Linie von den krummen unterſcheidet. In der geraden Linie haben nicht allein die an einander gränzenden, ſondern auch abgeſonderte Theile einerley Lage gegen einander, wenn die Zwiſchenräume gleich groß genommen werden. Bey ungleichen Zwiſchenräumen iſt die Verſchiedenheit des Ab-

ſtandes der Theile von einander das einzige unterſcheidende in der Lage.

3. Dieſe Identität in der Lage der Theile einer geraden Linie gegen einander, ſowohl der benachbarten als der entfernten, iſt die Urſache, warum es ſich nicht zeigen läßt, wie ſie gezeichnet oder conſtruirt werden kann. Der kleinſte Theil iſt wie der größere beſchaffen; von keiner andern Größe oder Lage abhängig, wie es ſchon bey dem Kreiſe, der einfachſten Figur nach der geraden Linie, der Fall iſt. Euklides ſetzt es daher als Poſtulate an, von jedem Puncte bis nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen; desgleichen eine gerade begränzte Linie ſtetig gerade fort zu verlängern. Das heißt, man muß den Begriff von einer geraden Linie zur Geometrie mitbringen. Sie iſt eine urſprüngliche Vorſtellung des reinen Verſtandes, die nicht aus der Erfahrung geſchöpft wird. Ein ſtraff ausgeſpannter Faden verſinnlicht nur den Begriff, aber giebt ihn uns nicht. Wir nennen einen ſolchen Faden gerade, weil wir an ihm die ideale Gleichförmigkeit der Lage ſeiner Theile ſehen. Wenn wir den abſtracten Begriff von gleichförmiger Lage nicht hätten, ſo würden wir an einem ſtraffen Faden oder einem geraden Stocke nichts als einen Faden oder Stock erblicken, wie es ohne Zweifel ſelbſt bey dem Elephanten oder einem andern wohl unterſcheidenden Thiere der Fall iſt.

4. Auf der Gleichförmigkeit der Lage in einer geraden Linie beruht es, daß zwiſchen zwey Puncten nur Eine gerade Linie Statt findet, oder daß ſie durch zwey Puncte in ihrer ganzen unbegränzten Ausdehnung völlig beſtimmt (individualiſirt) wird. Gäbe es mehrere gerade Linien zwiſchen zwey Puncten in derſelben Ebene, ſo würde ihre Verſchiedenheit von der Ungleichheit in der Lage der Theile entſtehen; es wären keine gerade Linien.

Eine krumme Linie hingegen kann man, ohne ihre Figur zu ändern, durch zwey gegebene Puncte derſelben in unendlich viele Lagen bringen. Dabey aber iſt uns die Vorſtellung von einer Linie durch jene zwey Puncte gegenwärtig, welche ſich nicht dreht, das iſt von einer geraden,

der nur auf eine einzige Art zwiſchen den beiden Puncten möglichen Linie.

5. Daher kann man auch die gerade Linie für diejenige erklären, welche durch zwey Puncte, in ihrer ganzen unbegränzten Ausdehnung, nur auf eine einzige Art gezogen werden kann. Zwey Puncte durch eine gerade Linie verbinden, heißt dann, diejenige Linie zwiſchen ihnen ſich gedenken, welche nur auf eine einzige Art zwiſchen ihnen gedacht werden kann. Eine gegebene gerade Linie verlängern, heißt nur, ihre Begränzung aufheben. Dieſe Vorſtellungen ſcheinen die griechiſchen Geometer bey den Beweiſen zum Grunde gelegt zu haben. Nicht aus der Erklärung der geraden Linie leitet Euklides etwas her, ſondern aus dem Grundſatze, daß zwey gerade Linien keinen Raum einſchließen. Das iſt aber im Grunde nichts anders als der Satz, es iſt nur eine einzige gerade Linie zwiſchen zwey Puncten. Die Erklärung der geraden Linie ſteht inzwiſchen nicht bloß wegen der methodiſchen Form da, ſondern ſie dient, den abſtracten Begriff von der geraden Linie zu erwecken, und den Geiſt von den groben ſinnlichen Vorſtellungen abzuziehen.

6. Man hat es auch zum auszeichnenden Merkmahl der geraden Linie gemacht, daß ſie die kürzeſte ſey, die ſich zwiſchen zwey gegebenen Puncten ziehen läßt. Daß ſie kürzer iſt als eine aus geraden Linien zuſammengeſetzte zwiſchen denſelben Endpuncten, läßt ſich aus Euklides I. 20. vollkommen beweiſen, braucht alſo nicht zur Erklärung gemacht zu werden. Daraus läßt es ſich auch für krumme Linien zeigen, wenn dieſe als Gränzen einer aus geraden Linien zuſammengeſetzten betrachtet werden. (Vergl. Bogen). Allein Archimedes läßt ſich hierauf nicht ein. In der Vorrede zu den Büchern über Kugel und Cylinder ſagt er: Ich nehme an (λαμβανω δε), daß unter den Linien, die durch dieſelben Puncte begränzt werden, die gerade die kürzeſte iſt; daß die übrigen, ſo fern ſie in einer und derſelben Ebene liegen, ungleich ſind; ferner, daß von Linien, die nach derſelben Seite hin hohl ſind, diejenige,

welche von der andern und der geraden durch die gemeinſchaftlichen Endpuncte eingeſchloſſen wird, die kleinere iſt.

7. Proklus in ſeinem Commentar über das erſte Buch des Euklides ſagt, es werde durch deſſen Erklärung der geraden Linie angezeigt, daß die gerade Linie allein es ſey, welche dem Abſtande zwiſchen zwey Puncten auf derſelben gleich iſt. Allein dieſes iſt in der That eins durch das andere wechſelſeitig erklären. Er führt noch verſchiedene Erklärungen der geraden Linie an, als daß ſie nicht eine ſolche ſey, die zum Theil in einer Ebene, zum Theil außer derſelben liege; daß alle ihre Theile auf einerlen Art mit einander zuſammen treffen (similiter congruunt, in der lateiniſchen Überſetzung); daß ſie durch ihre Endpuncte ganz beſtimmt wird; daß ſie ihre Lage nicht ändert, wenn ihre Endpuncte unverrückt bleiben; daß ſie mit einer ihr gleichartigen Linie (quae specie similis est) keinen Raum einſchließt. Alles dieſes, fügt er hinzu, drückt Eigenſchaften der geraden Linie aus, welche darauf beruhen, daß ſie einfach iſt, und den kürzeſten Weg von einem Endpuncte zum andern ausmacht. Platon's Erklärung der geraden Linie, daß ſie diejenige ſey, in welcher die mittleren Puncte die äußern beſchatten, ſcheint dem Proklus zu behagen, weil ſie ein Bild abgebe, wie in der wirklichen Welt die Wirkungen von den erſten Urſachen durch die Mittelurſachen abhangen. Als ein Neuplatoniſcher Philoſoph macht er die gerade Linie zum Symbol der unveränderlichen, unbefleckten, unaufhörlichen, allmächtigen, in allen Dingen wirkſamen Vorſicht; den Kreis zum Symbol der in ſich ſelbſt zurückgewandten Wirkſamkeit, die nach einem verſtändigen Zwecke alles regiert. Da nun der höchſte Werkmeiſter aller Dinge dieſe beide Principien, das Gerade und das Kreisförmige, in ſich ſelbſt erzeugt hatte (praeposuisset), ſo brachte er zwey Einheiten aus ſich hervor, von welchen die eine kreisförmig wirkt, und den Grund der verſtändigen Weſen enthält; die andere geradlinicht wirkend die ſinnlichen Dinge entſtehen läßt. Da aber die Seele (die Weltſeele) ein Mittelding zwiſchen verſtändigen Weſen

und ſinnlichen Dingen iſt, ſo ſey dieſe, ſo fern ſie mit einer verſtändigen Natur in Verbindung ſteht, kreisförmig wirkſam; ſo fern ſie das Sinnliche regiert, ſorge ſie für deſſen Wohlſeyn geradlinicht.

Ich würde dieſe Spielerey nicht angeführt haben, wenn ſie nicht in Abſicht unſerer neueſten, auf ähnliche Art ſpielenden Philoſophie, eine Beſtätigung der Bemerkung giebt, daß nicht leicht von einem neuern Philoſophen etwas wunderliches hervorgebracht werden könne, welches nicht ſchon ein älterer geſagt hätte. Auch ſieht man, wie ſehr die Mathematik zu Proklus Zeit geſunken war, daß ſie ſich zu ſolchen Albernheiten hergeben mußte.

8. Die Lage zweyer geraden Linien in einer Ebene gegen einander wird durch die Theile derſelben ſchon beſtimmt, wenn ſich dieſe, als begränzt gedacht, auch nicht ſchneiden. Ihre Lage iſt, ohne Rückſicht auf ihren Abſtand, dieſelbe mit der Lage der ſich ſchneidenden Theile. Auch iſt die Länge der Schenkel eines Winkels zweyer geraden Linien etwas ganz gleichgültiges für die Größe deſſelben. Hingegen bey krummen Linien, die ſich in einem Puncte ſchneiden, kann ihre Lage daſelbſt gegen einander aus der Lage der noch ſo wenig entfernten Theile nicht beſtimmt werden. Es geſchieht durch die Lage der ſie daſelbſt berührenden geraden. S. Winkel.

9. Wenn zwey gerade Linien, A, B, nicht in einer Ebene liegen, ſo läßt ſich ihre Lage gegen einander nur durch eine vermittelnde gerade C beſtimmen. Man ziehe nämlich durch einen Punct der einen, A, eine parallele C mit der andern B, ſo wird durch den Winkel der beiden Linien, A und C, und die Lage der Ebene, worin B und C liegen, nebſt dem Abſtande der B und C, die Lage von B gegen A offenbar.

Der Winkel der Linien A und C iſt zugleich der Winkel der geraden A und B, die nicht in einer Ebene liegen. So wie der Winkel verſchiedener Parallelen in einer Ebene mit einer ſie ſchneidenden geraden derſelbe iſt, wie auch die Durchſchnittspuncte liegen,

ſo iſt auch der Winkel aller parallelen, die in verſchiedenen Ebenen ſich befinden, mit einer ihnen nicht parallelen gleich dem Winkel, den eine von ihnen, die mit letzterer in einer Ebene liegt, mit derſelben macht. Auf die Lage im ganzen Raume kommt es in beiden Fällen nicht an. Ein Beyſpiel findet ſich in der Parallaxenrechnung, Aſtron. Jahrbuch für 1800. S. 135.

10. Die Behandlung aller Linien geſchieht entweder geometriſch, oder analytiſch. Jene gebraucht die geometriſchen Elementarlehren nebſt der Lehre von den Proportionen, und die darauf gegründeten geometriſchen Sätze; dieſe die allgemeinen Rechnungsmethoden, oder die Analyſis, insbeſondere die Eigenſchaften der Gleichungen, und die trigonometriſchen Formeln. Die analytiſche Methode greift viel weiter als die geometriſche, beſonders wegen der Hülfsmittel, welche die Analyſis des Unendlichen an die Hand giebt.

11. Die Analyſis ſtellt die Lage der Puncte jeder Linie durch Coordinaten dar. S. Coordinaten. Bey Linien, die ganz in einer Ebene liegen, werden zuweilen auch drey Folgen von Coordinaten gebraucht, wie bey krummen Linien von gedoppelter Krümmung, wenn nämlich mehrere mit einander verbunden ſind, die nicht in derſelben Ebene liegen. Alsdann iſt es nöthig, für diejenigen, die nicht in der Grundebene liegen, drey Axen und drey Folgen der Coordinaten zu gebrauchen.

12. Da in den Artikeln von den krummen Linien die Methoden der analytiſchen Behandlung derſelben gewieſen ſind, ſo bleibt hier nur übrig, dieſe auch auf die gerade Linie anzuwenden. Dieſe gewährt theils eine veränderte Anſicht zur Beſtimmung der Lage gerader Linien neben der geometriſchen Beſtimmungsart, theils iſt ſie nothwendig bey den Anwendungen der Analyſis auf geometriſche Fragen, da hier ſowohl gerade als krumme vorkommen.

Analytiſche Betrachtung der geraden Linie.

13. Eine gerade Linie DD (Fig. 111.) ſchneide die Abſciſſenlinie XX′ in C. Der Anfang der Abſciſſen ſey

in A, die Ordinate daſelbſt AB; ein Paar Coordinaten AP und PM, ſo iſt AC : AB = CA + AP : PM, und $PM = \frac{AB}{AC} \cdot AP + AB$. Es ſey $\frac{AB}{AC} = a$; AB = b; AP = x; PM = y, ſo iſt die Gleichung für die gerade Linie,

$$y = ax + b.$$

Hier iſt a die Tangente des Winkels, unter welchem die gerade Linie die Abſciſſenlinie ſchneidet, wenn der Coordinatenwinkel ein rechter iſt. Das gegebene Glied b der Gleichung beſtimmt einen Punct der Linie; dieſes und die Tangente a die Lage derſelben völlig. Alle gerade Linien, in deren Gleichung der Coefficient von x derſelbe iſt, (wenn nämlich y zum Coefficienten die Einheit hat), ſind ſich parallel.

Die Größen a und b können auch entgegengeſetzt oder negativ genommen werden. Dieſes zeigt eine Lage an, welche der in der Figur gewählten entgegengeſetzt iſt. Ein negatives a bedeutet einen ſtumpfen Winkel ACB auf der Seite der poſitiven y, oder einen ſpitzen auf der Seite der negativen y. Iſt b negativ, ſo liegt der Punct B auf der Seite der negativen y. Die Abſciſſe kann jeden Werth, poſitiven oder negativen, erhalten; dadurch wird die ganze unbegränzte gerade mittelſt ihrer Gleichung dargeſtellt.

14. Man ziehe die Ordinate QN zu der Abſciſſe AQ, und Mm parallel mit PQ; ſetze $PQ = \Delta x$; $Nm = \Delta y$, ſo iſt $\Delta x : \Delta y = AC : AB = 1 : a$. Dieſes Verhältniß iſt unveränderlich, und daher iſt in der ſtetigen Folge der Coordinaten auch $\partial x : \partial y = 1 : a$, oder $\partial y = a \partial x$. Die Unveränderlichkeit des Differential-Verhältniſſes charakteriſirt die gerade Linie, wie die Veränderlichkeit eine krumme.

15. Vermittelſt des Differential-Verhältniſſes $\partial x : \partial y$ läßt ſich die Lage einer krummen Linie in einem gegebenen Puncte derſelben durch die Lage einer geraden darſtellen. Die Coordinaten der krummen Linie ſeyn x und z, der ge-

raden x und y, bey einer gemeinſchaftlichen Abſciſſenlinie mit demſelben Anfangspuncte. An einer gemeinſchaftlichen Ordinate, $z = y$, ſey das Differentialverhältniß an der Curve, $\partial x : \partial z$ gleich dem $\partial x : \partial y$ an der geraden, ſo weicht unter allen geraden, durch den Endpunct der Ordinate gezogenen, jene gerade am wenigſten von der Curve ab, oder berührt ſie. Denn an jeder ſchneidenden iſt das Verhältniß der Differentiale gleich einem Verhältniſſe endlicher Differenzen $\Delta x : \Delta z$ an der Curve, alſo von dem $\partial x : \partial z$ verſchieden, daher jene gerade, an welcher $\partial x : \partial y$ gleich iſt $\partial x : \partial z$, keine ſchneidende iſt. Die ſchneidenden kommen der Curve zwiſchen den Durchſchnittspuncten deſto näher, je näher dieſe an einander fallen; die nicht ſchneidende, oder die berührende am nächſten. S. berührende Linie, 12.

16. Es ſeyn in einer Ebene zwey gerade Linien mittelſt ihrer Gleichungen gegeben: I. $y = ax + \alpha$; II. $y' = bx + \beta$; es iſt der Winkel derſelben anzugeben.

Der Winkel der erſtern mit der Abſciſſenlinie ſey $= A$; der andere $= B$, ſo iſt $\tan A = a$; $\tan B = b$. Nun iſt $\tan(A - B) = \dfrac{a - b}{1 + ab}$ (Goniometrie, 33.). Durch dieſe Tangente wird der Winkel beider Linien, welcher $A - B$ iſt, gegeben.

17. Wenn $ab = -1$ iſt, ſo iſt $\tan(A - B)$ unendlich groß, und die beiden Linien ſchneiden ſich rechtwinklicht.

18. In dem Durchſchnitte beider iſt

$$ax + \alpha = bx + \beta, \text{ alſo } x = \frac{\beta - \alpha}{a - b} = -\frac{\alpha - \beta}{a - b}.$$

Daraus iſt y oder $y' = \dfrac{a\beta - \alpha b}{a - b}$.

19. Eine gerade CP (Fig. 112.) wird auf die Ebene AMN bezogen durch drey rechtwinklichte Coordinaten,

AM = x; MN = y, und NP = z. Sie treffe die Ebene der x, y in C; die durch ſie und PN gelegte, auf die Ebene der x, y ſenkrechte Ebene CPN ſchneide dieſe in CN, und die CN die Linie der Abſciſſen x in B. Der Winkel der CP mit der Ebene der x, y iſt PCN (Ebene, 27.). Es ſey AB = f; BC = g; ABN = η; PCN = ϑ, ſo iſt

$$\text{I. } y = (x + f) \operatorname{tang} \eta.$$

$$\text{II. } z = \left(g + \frac{x + f}{\operatorname{cof} \eta}\right) \operatorname{tang} \vartheta.$$

Oder

$$\text{I. } y = x \operatorname{tang} \eta + f \operatorname{tang} \eta.$$

$$\text{II. } z = x . \frac{\operatorname{tang} \vartheta}{\operatorname{cof} \eta} + \frac{f + g \operatorname{cof} \eta}{\operatorname{cof} \eta} \operatorname{tang} \vartheta.$$

Die erſte Gleichung iſt für die Projection der CP auf die Ebene der x, y; die zweyte für die Projection derſelben auf die Ebene der x, z.

20. Sind nun zwey Gleichungen zwiſchen drey Coordinaten für eine gerade Linie gegeben, nämlich

$$\text{I. } y = ax + \alpha; \quad \text{II. } z = bx + \beta,$$

ſo iſt $\operatorname{tang} \eta = a$; $f \operatorname{tang} \eta = \alpha$; $f = \frac{\alpha}{a}$.

Ferner $\frac{\operatorname{tang} \vartheta}{\operatorname{cof} \eta} = b$, alſo $\operatorname{tang} \vartheta = b \operatorname{cof} \eta$

$= \frac{b}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang} \eta^2)}} = \frac{b}{\sqrt{(1 + aa)}}$. Oder auch, weil $\sin \vartheta = \frac{\operatorname{tang} \vartheta}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang} \vartheta^2)}}$ iſt,

$$\sin \vartheta = \frac{b}{\sqrt{(1 + aa + bb)}}.$$

Endlich iſt $\frac{f + g \operatorname{cof} \eta}{\operatorname{cof} \eta} \operatorname{tang} \vartheta = \beta$, oder

$g \cos \eta = \frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}$, und $g = \left(\frac{\beta}{b} - \frac{\alpha}{a}\right) \times \surd(1 + aa)$.

21. Die Projection der geraden CP auf die Ebene der x, z mache mit der Axe der x den Winkel η', und der Neigungswinkel der CP gegen dieſelbe Ebene ſey ϑ', ſo iſt $\tang \eta' = b$; und $\sin \vartheta' = \frac{\alpha}{\surd(1 + aa + bb)}$.

Denn man hat nur nöthig in (20.) die Gleichungen I. und II. mit einander zu vertauſchen, das iſt, die Größen a, α, b, β, y, z mit b, β, a, α, z, y. Dadurch erhält man auch die Werthe der f' und g', welche für die Ebene der x, z daſſelbe bedeuten, was f, g für die Ebene der x, y.

22. Auch iſt $\sin \vartheta' = \sin \eta . \cos \vartheta$. Denn da $\surd(1 + aa + bb) = \frac{b}{\sin \vartheta}$ iſt, ſo iſt $\sin \vartheta' = \frac{a \sin \vartheta}{b} = \frac{\tang \eta . \sin \vartheta}{\tang \vartheta : \cos \eta} = \sin \eta . \cos \vartheta$.

23. Es ſey η'' der Winkel, welchen die Projection der CP auf die Ebene der y, z mit der Axe der y macht, und ϑ'' der Neigungswinkel der CP gegen dieſelbe Ebene, ſo iſt $\tang \eta'' = \frac{b}{a}$, und $\sin \vartheta'' = \frac{1}{\surd(1 + aa + bb)}$.

Denn man nehme die Werthe von z und x durch y, ſo iſt I. $z = \frac{b}{a} y + \frac{a\beta - b\alpha}{a}$; und II. $x = \frac{y}{a} - \frac{\alpha}{a}$. Daraus folgt, wie in (20.), $\tang \eta'' = \frac{b}{a}$; und $\sin \vartheta'' = \frac{1 : a}{\surd(1 + (b : a)^2 + (1 : a^2))} = \frac{1}{\surd(1 + aa + bb)}$.

24. Auch iſt $\sin\vartheta'' = \cos\eta . \cos\vartheta$. Denn es iſt $\sin\vartheta'' = \frac{\sin\vartheta}{b} = \frac{\cos\eta . \sin\vartheta}{\tang\vartheta} = \cos\eta . \cos\vartheta$.

25. Aus den doppelten Werthen der Sinus der Neigungswinkel folgt auch auf zweyerley Art

$$(\sin\vartheta)^2 + (\sin\vartheta')^2 + (\sin\vartheta'')^2 = 1.$$

Man vergleiche den Artikel, krumme Fläche, 6.

26. Für den Punct C, wo die gerade Linie die Ebene der x, y trifft, ſeyn die Coordinaten p, q, jene, nämlich AD, auf der Axe der x, dieſe, die CD, der Axe der y parallel. Dann ſind die Gleichungen für die gerade Linie CP folgende:

$$\text{I. } y - q = a(x - p); \qquad \text{II. } z = b(x - p).$$

Es iſt nämlich für dieſen Punct $z = o$, alſo $x = -\frac{\beta}{b}$; und $y = -\frac{a\beta}{b} + \alpha$, das iſt, $p = -\frac{\beta}{b}$, und $q = -\frac{a\beta}{b} + \alpha$. Setzt man in den Gleichungen (20.) für die gerade CP anſtatt α und β ihre Werthe aus dieſen Gleichungen, ſo entſtehen die angegebenen.

Oder es iſt, nämlich in dem Falle der Fig. 112, $p = -g\cos\eta - f$, und $q = -g\sin\eta$. Jene Gleichung multiplicire man durch $\tang\eta$, ſo wird $p\tang\eta = -g\sin\eta - f\tang\eta = q - y + x\tang\eta$, (19. I.). Da $\tang\eta = a$, ſo iſt $y - q = a(x - p)$. Zweytens iſt aus (19. II.), $z = (g\cos\eta + f + x) . \frac{\tang\vartheta}{\cos\eta}$.

Setzt man hier $-p$ ſtatt $g\cos\eta + f$, und b ſtatt $\frac{\tang\vartheta}{\cos\eta}$, ſo wird $z = b(x - p)$.

Die erſte Formel fließt aus der Projection, BM : MN = BD : DC, als woraus iſt MD : MN + DC =

BM : MN $=$ 1 : tang η $=$ 1 : a. Da p und q in dem Falle der Figur negative Werthe haben, ſo ſind x — p und y — q arithmetiſche Summen.

27. Es ſeyn zwey Puncte der geraden CP jeder durch ſeine drey Coordinaten gegeben. Dieſe ſeyn p, q, r; p', q', r', ſo ſind für dieſe Coordinaten die Gleichungen:

$$q = ap + \alpha; \qquad r = bp + \beta;$$
$$q' = ap' + \alpha; \qquad r' = bp' + \beta.$$

Daraus werden die Größen a, b, α, β beſtimmt. Es iſt

$$a = \frac{q' - q}{p' - p}; \qquad b = \frac{r' - r}{p' - p}.$$
$$\alpha = \frac{p'q - pq'}{p' - p}; \qquad \beta = \frac{p'r - pr'}{p' - p}.$$

Nun ſind die beiden Gleichungen für die gerade CP,

$$\text{I. } (p' - p)y = (q' - q)x + p'q - pq'.$$
$$\text{II. } (p' - p)z = (r' - r)x + p'r - pr'.$$

28. Alle geraden Linien, in deren Gleichungen, durch welche ſie auf drey gegen einander ſenkrechte Ebenen bezogen werden, die Coefficienten von x, y, z dieſelben ſind, oder auf ſolche gebracht werden können, ſind einander parallel. Denn da die Neigungswinkel dieſer Linien gegen die drey Ebenen, und die Winkel ihrer Neigungs-Ebenen mit den Axen der Coordinaten mit einander übereinkommen, ſo liegt der Unterſchied der Lage nur allein in der Verſchiedenheit der Puncte, in welchen ſie die Ebenen der Coordinaten treffen. Verſchiebt man eine dieſer Linien, mit Beybehaltung der gedachten Winkel, bis der Punct, wo ſie eine der Coordinaten-Ebenen trifft, mit dem für eine der andern zuſammen fällt, ſo fallen die Linien in eine zuſammen, eben ſo wie gerade in einer Ebene, die von einer dritten unter demſelben Winkel nach derſelben Seite hin geſchnitten werden, wenn man mit ihnen auf ähnliche Art verfährt.

Oder deutlicher durch einen geometriſchen Beweis. Es

ſeyn A B, CD (Fig. 113.) zwey gerade Linien, ihre Neigungsebenen, ſenkrecht auf die Ebene der x, y ſeyn BAE, DCF, und die Winkel BAE, DCF ſeyn ſich gleich, ſo wie die Winkel der Neigungsebenen mit der Axe der x, nämlich EAX, FCX. Man ziehe AG ſenkrecht auf eine der parallelen AE, CF, ſo iſt ſie auch auf die andere ſenkrecht, und daher ſteht AG ſenkrecht auf die Ebenen BAE, DCF (Ebene 25.), und daher ſind dieſe ſich parallel (daſ. 27.). Die Ebene BAG ſchneide die DCF in GH, ſo iſt GH parallel der AB (daſ. 19.). Da auch GF der AE parallel iſt, ſo iſt W. HGF = BAE (daſ. 13.). Da W. BAE = DCF geſetzt iſt, ſo iſt W. HGF = DCF, und CD parallel der GH. Da auch AB parallel der GH iſt, ſo ſind AB und CD ſich parallel (daſ. 12.).

Der Satz läßt ſich auch ganz kurz aus (13. a. a. O.) durch einen indirecten Beweis herleiten.

29. Umgekehrt, wenn zwey gerade parallel ſind, ſo ſind in ihren Gleichungen die Coefficienten von x, y, z dieſelben, oder können übereinſtimmig gemacht werden.

Denn es ſeyn (Fig. 113.) die geraden AB, CD parallel. Die ſenkrechten von den Puncten B und D beider auf die Ebene der x, y ſind parallel (Ebene, 10.), alſo ſind die Ebenen dieſer ſenkrechten und der AB, CD parallel (daſ. 18.), das iſt, die Neigungsebenen BAE, DCF ſind parallel. Daher ſind ferner AE, CF parallel, und dadurch ſind ſowohl die Winkel EAX, FCX, als die Neigungswinkel BAE, DCF (daſ. 13), einander gleich.

30. Die Gleichungen für eine gerade, die einer gegebenen durch einen beſtimmten Punct parallel ſey, zu finden.

Die Gleichungen für die gegebene ſeyn,

I. $y = ax + \alpha$; $z = bx + \beta$.

Für die geſuchte,

II. $y = ax + \alpha'$; $z = bx + \beta'$.

In beiden Paaren ſind nämlich die Coefficienten von x

dieſelben, weil die beiden geraden parallel ſeyn ſollen. Die Coordinaten zu dem gegebenen Puncte der zweyten ſeyn p, q, r, ſo iſt

$$q = ap + \alpha'; \qquad r = bp + \beta'.$$

alſo $\alpha' = q - ap$; $\beta' = r - bp$.

Die Gleichungen für die geſuchte gerade ſind daher,

III. $y = ax + q - ap$; IV. $z = bx + r - bp$.

31. Für zwey gerade Linien ſeyn gegeben die Gleichungen:

$$\text{I. } y = ax + \alpha; \qquad z = bx + \beta,$$

$$\text{II. } y = cx + \gamma; \qquad z = dx + \delta.$$

Wenn dieſe ſich ſchneiden, ſo ſind in dem Durchſchnittspuncte die Coordinaten für beide dieſelben; alſo iſt, wenn dieſe Coordinaten p, q, r, ſind,

$$(c - a)p = \alpha - \gamma; \quad (d - b)p = \beta - \delta.$$

Daher die Bedingungsgleichung für dieſen Fall,

$$\frac{a - c}{b - d} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta}.$$

Der Werth der Ordinate x zu dem Durchſchnittspuncte, nämlich p, iſt $= \frac{\alpha - \gamma}{c - a} = \frac{\beta - \delta}{d - b}$, woraus die beyden y und z folgen, daher der Durchſchnittspunct ſelbſt ſich ergiebt.

32. Aus den Gleichungen für zwey gerade Linien ihren Winkel herzuleiten.

Die Gleichungen ſeyn

$$\text{I. } y = ax + \alpha; \qquad z = bx + \beta.$$

$$\text{II. } y' = cx' + \gamma; \qquad z' = dx' + \delta.$$

Durch den Anfangspunct der Abſciſſen A (Fig. 114.) ziehe man mit den beiden gegebenen Linien die parallelen AP, Ap. Für dieſe ſind die Coefficienten von x in ihren Gleichungen dieſelben wie in den gegebenen Gleichun-

gen (29.); aber die gegebenen Glieder fallen weg, da für $x = 0$ die Ordinaten y und $z = 0$ ſind. Für die AP iſt alſo I. $y = ax$; $z = bx$, und für die Ap iſt II. $y' = cx'$; $z' = dx'$. Die Coordinaten ſind in Fig. 114. für jene die auf einander ſenkrechten AM, MN, NP; und für dieſe, Am, mn, np. Man verbinde Nn, Pp, ſo iſt $\cos PAp = \frac{AP^2 + Ap^2 - Pp^2}{2AP.Ap}$ (Trigonometrie, oder Dreyeck, 19. 20.); und $AP^2 = x^2 + y^2 + z^2$; auch $Ap^2 = x'x' + y'y' + z'z'$. Da die Puncte, P, p, willkürlich genommen werden können, ohne die Lage der beiden Linien zu ändern, ſo ſetze man $z = z'$, und es iſt $x : x' = d : b$. In den Werthen von AP und Ap ſetze man für y, z; y', z' ihre Werthe durch x, x', ſo iſt

$$AP^2 = (1 + aa + bb)xx;$$
$$Ap^2 = (1 + cc + dd)x'x'.$$

Da PN, pn parallel ſind (Ebene, 10.) und gleich genommen worden, ſo iſt $Pp = Nn$, und $Nn^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$, folglich $AP^2 + Ap^2 - Pp^2 = 2zz + 2xx' + 2yy' = 2(bd + 1 + ac)xx'$. Daher iſt

$$\cos PAp = \frac{1 + ac + bd}{\sqrt{(1 + a^2 + b^2)(1 + c^2 + d^2)}}.$$

33. Die Projection des Winkels PAp auf die Ebene der x, y iſt der Winkel NAn. Für dieſen iſt $b = 0$, und $d = 0$, weil für denſelben $z = 0$ iſt. Alſo iſt

$$\cos NAn = \frac{1 + ac}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + c^2)}}.$$

Unmittelbar wird dieſer Coſinus folgendergeſtalt gefunden. Es iſt $\tang MAN = \frac{y}{x} = a$, und $\tang mAn = \frac{y'}{x'} = c$. Nun iſt $\tang NAN = \frac{c - a}{1 + ac}$,

und $(\sec NAn)^2 = \frac{1 + a^2c^2 + a^2 + c^2}{(1 + ac)^2} =$
$\frac{(1 + a^2)(1 + c^2)}{(1 + ac)^2}$; das iſt $\cos NAn =$
$\frac{1 + ac}{\sqrt{(1 + a^2)(1 + c^2)}}$. (Goniometrie, 33, 14.).

34. Die Winkel, welche die AP mit den Ebenen der x, y; x, z; y, z macht, ſeyn ϑ, ϑ', ϑ'', wie (20—23.). Die Winkel, welche Ap mit eben den Ebenen macht, ſeyn ζ, ζ', ζ''. Für die Sinus dieſer Winkel ſind eben die Formeln, durch c und d, wie für die Sinus jener Winkel durch a und b in (20. 21. 23.). Aus dieſen beiderſeitigen Werthen iſt aber der Werth von $\cos PAp$ zuſammengeſetzt. Führt man alſo ſtatt derſelben die Sinus ein, ſo wird erhalten:

$$\cos PAp = \sin\vartheta . \sin\zeta + \sin\vartheta' . \sin\zeta' + \sin\vartheta'' . \zeta''.$$

35. Die Neigungs-Ebene der AP ſchneide die Axe der x unter dem Winkel η, und diejenige der Ap ſchneide dieſelbe unter dem Winkel ε; es iſt durch dieſe Winkel, nebſt den Neigungswinkeln ϑ und ζ,

$$\cos PAp = (\cos(\varepsilon - \eta) + \operatorname{tang}\vartheta . \operatorname{tang}\zeta)\cos\vartheta . \cos\zeta.$$

Denn es iſt $\operatorname{tang}\eta = a$; $\frac{\operatorname{tang}\vartheta}{\cos\eta} = b$ (20.), und eben ſo $\operatorname{tang}\varepsilon = c$; $\frac{\operatorname{tang}\zeta}{\cos\varepsilon} = d$. Dadurch iſt

$$1 + ac + bd = 1 + \operatorname{tang}\eta . \operatorname{tang}\varepsilon + \frac{\operatorname{tang}\vartheta . \operatorname{tang}\zeta}{\cos\eta . \cos\varepsilon}$$
$$= \frac{\cos\eta . \cos\varepsilon + \sin\eta . \sin\varepsilon + \operatorname{tang}\vartheta . \operatorname{tang}\zeta}{\cos\eta . \cos\varepsilon}$$
$$= \frac{\cos(\varepsilon - \eta) + \operatorname{tang}\vartheta . \operatorname{tang}\zeta}{\cos\eta . \cos\varepsilon}.$$

Ferner iſt $1 + aa + bb = 1 + \tang \eta^2 + \frac{\tang \vartheta^2}{\cos \eta^2}$

$= \frac{1 + \tang \vartheta^2}{\cos \eta^2} = \frac{1}{\cos \eta^2 . \cos \vartheta^2}$.

Eben ſo iſt

$$1 + cc + dd = \frac{1}{\cos \varepsilon^2 \cos \zeta^2}.$$

Dadurch verwandelt ſich die Formel (32.) in die hier aufgeſtellte.

Dieſe Aufgabe iſt die umgekehrte von derjenigen, die in der praktiſchen Geometrie vorkommt, da aus dem gemeſſenen Winkel PAp zweyer nicht horizontalen Viſirlinien AP, Ap der auf den Horizont reducirte Winkel NAn gefunden werden ſoll. Man ſehe meine analytiſche Trigonometrie, S. 204. Käſtners aſtronom. Abhandl. I. Samml. S. 38. Mayers prakt. Geometrie. II. Th. S. 59.

36. Es ſind in einer Ebene zwey gerade Linien gegeben; durch ihren Durchſchnitt eine gerade zu ziehen, welche mit ihnen gegebene Winkel mache.

Man nehme die Ebene der beiden geraden zu der Ebene der Coordinaten x, y; die eine der beiden geraden zur Axe der **x**; den Durchſchnitt beider zum Anfangspuncte der Abſciſſen. Die zweyte der gegebenen mache mit der Axe der x den Winkel η. Für die erſtere Linie ſind die beiden Gleichungen: $y = 0$, und $z = 0$. Für die zweyte ſind ſie: $y = ax$, und $z = 0$, wo $a = \tang \eta$, (20.). Für die geſuchte Linie ſeyn die Gleichungen: $y = bx$; $z = cx$. Die gegebenen Winkel ſeyn A und B, jener mit der erſtern Linie oder mit der Axe der x, dieſer mit der andern, die mit derſelben Axe den Winkel η macht. In Beziehung auf die erſtere Linie, mit welcher die geſuchte Linie den Winkel A machen ſoll, iſt in der Formel (32.) ſtatt a, b, c, d zu ſetzen o, o, b, c; und in Beziehung auf die zweyte, oder für den Winkel B iſt daſelbſt

ſtatt jener Größen zu ſetzen a, o, b, c. Solcherge⸗ſtalt iſt

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{(1 + bb + cc)}};$$

$$\cos B = \frac{1 + ab}{\sqrt{(1 + aa)(1 + bb + cc)}}.$$

Daraus iſt $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\sqrt{(1 + aa)}}{1 + ab}$; und

hieraus $b = \frac{\cos B}{\cos A} \cdot \frac{\sqrt{(1 + aa)}}{a} - \frac{1}{a}$. Ferner

$$cc = \frac{1}{\cos A^2} - 1 - bb = \tang A^2 - b^2.$$

Damit die Aufgabe möglich ſey, muß die Summe je zweyer der drey Winkel. A, B, η größer ſeyn als der dritte, zufolge Euklides XI. 20.

37. Die Aufgabe läßt ſich auch durch die ſphäriſche Trigonometrie auflöſen, da hier in einem ſphäriſchen Drey⸗eck aus den drey Seiten die ſenkrechte auf eine derſelben und das eine Segment auf eben dieſer geſucht werden.

38. Es iſt b die Tangente des Winkels, welchen die Neigungs⸗Ebene der geſuchten Linie mit der Axe der x macht. Der Neigungswinkel derſelben gegen die Ebene der x, y ſey ϑ, ſo iſt $\sin\vartheta = \frac{c}{\sqrt{(1 + bb + cc)}}$, da in (20.) die Coefficienten a, b hier mit b und c zu ver⸗tauſchen ſind. Es iſt alſo $\sin\vartheta = c.\cos A$.

Lage der Ebenen und geraden Linien gegen einander.

39. Durch eine gegebene gerade Linie und einen ge⸗gebenen Punct eine Ebene zu legen.

Die Gleichungen für die gerade ſeyn

$$y = ax + \alpha; \qquad z = bx + \beta.$$

Die Gleichung für die geſuchte Ebene ſey

$$Ax - By + Cz - D = 0.$$

$= \frac{\sqrt{(1+aa)}}{1+ab}$; und

$\frac{B}{A} \cdot \frac{\sqrt{(1+aa)}}{a} - \frac{1}{a}$. Ferner

$- bb = \tang A^2 - b^2$.

gabe möglich ſeyn, muß die Summe je
inkel. A, B, η größer ſeyn als der
ides XI. 20.

jabe läßt ſich auch durch die ſphäriſche
öſen, da hier in einem ſphäriſchen Drey
Seiten die ſenkrechte auf eine derſelben
nent auf eben dieſer geſucht werden.
die Tangente des Winkels, welchen die
der geſuchten Linie mit der Axe der x
igungswinkel derſelben gegen die Ebene

ſo iſt $\sin \vartheta = \frac{c}{\sqrt{(1+bb+cc)}}$, ...
ficienten a, b hier mit b und c zu ...
s iſt alſo $\sin \vartheta = c . \cos A$.

... den Linien gegen einander.

Werden hier für y und z ihre Werthe aus den Gleichungen für die gerade geſetzt, ſo iſt

$$(A - Ba + Cb)x = Ap - B(q - \alpha) + C(r - \beta).$$

Wird x dieſer Gleichung gemäß genommen, ſo ſind die dazu gehörigen Werthe von y und z an der geraden Linie zugleich Coordinaten an der Ebene. Da aber x daraus nur einen einzigen Werth erhält, ſo muß ſowohl der Factor von x als der zweyte Theil der Gleichung jeder für ſich

$= 0$ ſeyn. Dadurch erhält $x = \frac{0}{0}$ jeden Werth, wie

es ſowohl für die gerade Linie als die Ebene ſeyn muß. So erhalten wir zwey Gleichungen:

$$A - Ba + Cb = 0,$$
$$Ap - B(q - \alpha) + C(r - \beta) = 0.$$

Aus dieſen und der Gleichung,

$$Ap - Bq + Cr - D = 0,$$

werden die Coefficienten der Gleichung für die Ebene beſtimmt. Einer derſelben kann willkürlich angenommen werden, da die Coefficienten dieſer Gleichung durch gemeinſchaftliche Multiplication und Diviſion unendlich vieler Abänderungen fähig ſind. Durch Elimination von C oder B aus den beiden erſten Gleichungen wird erhalten:

Digitized by Google

oder die dritte auch durch D, welche alsdann willkürlich genommen wird.

Wie aus den Coefficienten die Lage der Ebene durch den Neigungswinkel gegen die Ebene der x, y, durch den Winkel der Durchſchnittslinie mit der Axe der x und durch den Durchſchnittspunct mit derſelben beſtimmt wird, iſt in dem Artikel, krumme Fläche, 5. gezeigt.

40. Zwey gerade Linien ſind durch ihre Gleichungen gegeben, die Gleichung für die durch jede beſonders gelegten, ſich parallelen Ebenen zu finden.

Die Gleichungen für die beiden geraden ſeyn

$$\text{I. } y = ax + \alpha; \quad z = bx + \beta.$$
$$\text{II. } y = cx + \gamma; \quad z = dx + \delta.$$

Die Gleichungen für die beiden parallelen Ebenen ſeyn

$$\text{I. } Ax - By + Cz - D = 0;$$
$$\text{II. } Ax - By + Cz - E = 0.$$

Denn da die Ebenen ſich parallel ſeyn ſollen, ſo ſind die Winkel, von welchen ihre Lage abhängt, dieſelben, und nur der Durchſchnittspunct mit der Axe der x iſt verſchieden. (Krumme Fläche, 5. 8.).

In die Gleichung für die erſte Ebene ſetze man die Werthe von y und z für die erſte der geraden, ſo iſt

$$(A - Ba + Cb)\,x - B\alpha + C\beta - D = 0.$$

Damit x jeden Werth haben könne, muß ſeyn, wie in (39).

$$\text{I. } A - Ba + Cb = 0;$$
$$\text{II. } B\alpha - C\beta + D = 0.$$

Auf gleiche Weiſe ſind für die zweyte Ebene die beiden Gleichungen:

$$\text{III. } A - Bc + Cd = 0;$$
$$\text{IV. } B\gamma - C\delta + E = 0.$$

Aus dieſen vier Gleichungen werden unter den fünf Größen, A, B, C, D, E vier beſtimmt, indem eine derſelben willkürlich iſt.

Aus den Gleichungen I. III. folgt durch Elimination von C oder B,

$$-\frac{B}{A} = \frac{b-d}{ad-bc}; \quad +\frac{C}{A} = \frac{a-c}{bc-ad}.$$

In die Gleichungen II. IV. ſeße man für B und C ihre Werthe durch A, ſo wird erhalten:

$$\frac{D}{A} = \frac{(b-d)\alpha-(a-c)\beta}{ad-bc}.$$

$$\frac{E}{A} = \frac{(b-d)\gamma-(a-c)\delta.}{ad-bc}.$$

41. Die Gleichungen für eine gerade Linie zu finden, welche auf eine durch ihre Gleichung beſtimmte Ebene ſenkrecht ſteht.

Es ſind (Fig. 115.) AM, MN, NP (oder x. y, z) die rechtwinklichten Coordinaten an die Ebene BOPOB in einem Puncte P derſelben. Ihr Durchſchnitt mit der Ebene AMN iſt BB. Dieſe ſchneidet die Axe der x in C unter dem Winkel BCM $=\eta$, und iſt gegen die Ebene AMN (der x, y) unter dem Winkel PON $=\vartheta$ geneigt. Dieſer Winkel iſt derjenige, welchen die von dem Grundpuncte N auf BB ſenkrecht gezogene NO mit der von P nach O gezogenen PO macht. (Die Ebene PON ſteht ſenkrecht auf die Ebene AMN oder ACOB, und die auf ON ſenkrechte BO ſteht ſenkrecht auf jene Ebene PON, alſo auf die gerade PO in dieſer Ebene. Daher iſt PON der Winkel der Ebenen ACB und BOPOB. S. Ebene, 21. 25. 7. 4.) In der Ebene NOP ziehe man DP ſenkrecht auf OP, ſo iſt DP ſenkrecht auf die Ebene BOPOB. Die Gleichungen für dieſe DP ſind nun anzugeben.

Die DP treffe die (hier) verlängerte ON in F, ſo iſt PFO ihr Neigungswinkel gegen die Ebene AMN oder ACB. Dieſer iſt daher $= 90° - \vartheta$. Die nach der Axe der x oder AL hin verlängerte NO ſchneide dieſelbe in K, ſo iſt AKO $= 90° - \eta$, und der Winkel LKO $= 90° + \eta$.

Es kommen nun anſtatt η und ϑ in (20.) hier $90° + \eta$ und $90° + \vartheta$, wenn die Schenkel der Winkel nach derſelben Richtung genommen werden, das iſt KL und KN in (Fig. 115.) wie BM und BN in Fig. 112; ſo auch FP und Fk in der verlängerten KF in Fig. 115. wie CP und CN in Fig. 112. Daher ſind die Gleichungen für die auf die Ebene BOPOB in P ſenkrechte DE dieſe:

$$y = f - \cot\eta \,.\, x.$$

$$z = g + \frac{\cot\vartheta}{\sin\eta} \,.\, x.$$

Die unveränderlichen f und g werden durch die Coordinaten zu einem Puncte P beſtimmt. Sind dieſe p, q, r, ſo iſt

$$q = f - p\cot\eta\,; \qquad r = g + p \,.\, \frac{\cot\vartheta}{\sin\eta}.$$

alſo

$$f = q + p\cot\eta\,; \qquad g = r - p \,.\, \frac{\cot\vartheta}{\sin\eta}.$$

42. Die Gleichung für die gegebene Ebene ſey

$$Ax - By + Cz - D = o,$$

ſo iſt $\cot\eta = \frac{B}{A}$, und $\frac{\cot\vartheta}{\sin\eta} = \frac{C}{A}$ (krumme Fläche, 5.), alſo ſind die Gleichungen für die geſuchte ſenkrechte,

$$y = f - \frac{B}{A}x\,; \qquad z = g + \frac{C}{A}x;$$

oder

$$y = q - \frac{B}{A}(x-p)\,; \qquad z = r + \frac{C}{A}(x-p).$$

43. Umgekehrt folgt aus dieſen Gleichungen für die gerade die Gleichung für die auf ſie ſenkrechte Ebene,

$$x - \frac{B}{A}y + \frac{C}{A}z - \frac{D}{A} = o,$$

oder

$$Ax - By + Cz - D = o.$$

44. Von dem Puncte F, wo die in P auf die Ebene ſenkrechte die Ebene der x, y trifft, ziehe man auf AM die ſenkrechte FG, ſo ergeben ſich die Coordinaten AG und GF folgendergeſtalt.

$$AG = p - \frac{A}{C} r; \qquad GF = q + \frac{B}{C} r.$$

Denn für den Punct F iſt $z = o$; alſo iſt daſelbſt $x = p = - \frac{A}{C} r$, und daraus $y = q + \frac{B}{C} r$.

45. Aus der Gleichung für die Ebene,

$$Ax - By + Cz - D = o,$$

folgen die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{B}{C}$; $\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{A}{C}$. Daher ſind die Coordinaten für den Punct, wo die Normale die Ebene der x, y trifft, $AG = p + \frac{\partial z}{\partial x} r$; $GF = q + \frac{\partial z}{\partial y} r$. Iſt nun die Ebene eine berührende an einer krummen Fläche, ſo kommen die partiellen Differentialquotienten, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, an beiden überein (Krumme Fläche, 113.), und es werden die Coordinaten für den Punct, wo die Normale an die Curve die Ebene der x, y trifft, durch dieſelben Formeln wie für die Ebene gefunden. Die Gleichungen für die Normale ſelbſt kommen an beiden auch überein.

46. Den Winkel zweyer Ebenen, die durch ihre Gleichungen gegeben ſind, zu finden.

Der Winkel der Ebenen iſt der Winkel der geraden, auf den Durchſchnitt der Ebenen ſenkrechten (Ebene, 4.), oder der Winkel der auf die Ebenen ſelbſt ſenkrechten. Nun

wird aus den Gleichungen für dieſe ſenkrechten ihr Winkel durch die Formel (32.) gefunden, das iſt der verlangte Winkel der Ebenen.

Die Gleichungen für die beiden Ebenen ſeyn:

$$\text{I.}\quad Ax - By + Cz - D = o.$$
$$\text{II.}\quad A'x - B'y + C'z - D' = o.$$

Nun ſind die Gleichungen für die auf die erſtere ſenkrechten,

$$y = f - \frac{B}{A}x; \qquad z = g + \frac{C}{A}x;$$

und für die auf die zweyte Ebene ſenkrechten,

$$y = f' - \frac{B'}{A'}x, \qquad z = g' + \frac{C'}{A'}x,$$

wo f' und g' willkürliche Linien ſind, eben ſo wie f und g. Man kann ſie alſo auch $= o$ nehmen. Nämlich alle gerade Linien, in deren Gleichungen die Coefficienten von x und y und z dieſelben ſind, ſind ſich parallel (28.), das iſt die geraden, deren Gleichungen ſind,

$$\text{I.}\quad y = -\frac{B}{A}x; \qquad z = +\frac{C}{A}x;$$
$$\text{II.}\quad y = -\frac{B'}{A'}; \qquad z = +\frac{C'}{A'}x,$$

ſind, die erſtere der erſtern, die zweyte der zweyten jener Normalen parallel, daher ihr Winkel derſelbe iſt.

In (32.) mache man die gehörigen Subſtitutionen, ſo iſt der Coſinus des Winkels der Ebenen

$$= \frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{(AA + BB + CC)(A'A' + B'B' + C'C')}}.$$

47. Die erſte Ebene ſchneide die Axe der x unter dem Winkel η, und ſey gegen die Ebene der x, y unter dem Winkel ϑ geneigt. Für die zweyte Ebene ſeyn dieſe Winkel η' und ϑ', ſo iſt $\frac{B}{A} = \frac{\cos\eta}{\sin\eta}$; $\frac{C}{A} = \frac{\cot\vartheta}{\sin\eta}$;

$\frac{B'}{A'} = \frac{\operatorname{coſ}\eta'}{\sin\eta'}$; $\frac{C'}{A'} = \frac{\cot\vartheta'}{\sin\eta'}$ (krumme Fläche, 5.).

Setzt man in der Formel (46.) für A, B, C und A′, B′, C′ die ihnen proportionalen, ſo iſt der Coſinus des Winkels der beiden Ebenen

$$= \frac{\sin\eta.\sin\eta' + \operatorname{coſ}\eta.\operatorname{coſ}\eta' + \cot\vartheta.\cot\vartheta'}{\sqrt{(1 + \cot\vartheta^2)(1 + (\cot\vartheta')^2}}$$

$$= (\operatorname{coſ}(\eta - \eta') + \cot\vartheta.\cot\vartheta')\sin\vartheta.\sin\vartheta'.$$

Die ſphäriſche Trigonometrie giebt daſſelbe Reſultat.

48. Wenn $AA' + BB' + CC' = 0$ iſt, ſo iſt der Winkel der beiden Ebenen ein rechter, und umgekehrt.

49. Die zweyte Ebene ſey parallel der Ebene der y, z, ſo ſind η' und $\vartheta' = 90°$, alſo $\frac{B'}{A'} = 0$, und $\frac{C'}{A'} = 0$. Dividirt man in der Formel (46.) Zähler und Nenner durch A′, ſo iſt $\frac{A}{\sqrt{(AA + BB + CC)}} =$ dem Coſinus der geneigten Ebene mit der Ebene, welche der Ebene der x, y parallel iſt.

Die zweyte Ebene ſey der Ebene der x, z parallel, ſo iſt $\eta' = 0$, oder $= 180°$, und $\vartheta' = 90°$. Nun iſt $\frac{A'}{B'} = 0$; $\frac{C'}{B'} = 0$. Daher iſt $\frac{-B}{\sqrt{(AA + BB + CC)}}$ = dem Coſinus der geneigten Ebene mit der Ebene, welche der Ebene der x, z parallel iſt. Das Vorzeichen — iſt geſetzt, weil der Winkel der beiden Ebenen ſtumpf iſt, wenn η und ϑ ſpitz ſind, wie in der Rechnung angenommen worden. Da die Wurzelgröße beiderley Vorzeichen zuläßt, ſo muß es den Umſtänden nach beſtimmt werden.

Die zweyte Ebene ſey der Ebene der x, y parallel, ſo iſt $\vartheta' = 0$, und η' bleibt unbeſtimmt. Es iſt nun C′ unendlich groß. Daher iſt der Coſinus ihres Winkels mit

der geneigten Ebene $= \frac{C}{\sqrt{(AA + BB + CC)}}$. Alles übereinſtimmig mit den Formeln in dem Artikel, krumme Fläche, 6.

50. Den Abſtand zweyer gegebenen parallelen Ebenen zu finden.

Die Gleichungen für beide ſind nur in dem unveränderlichen Gliede verſchieden. Die Coordinaten an der einen ſeyn x, y, z; an der andern p, q, r; die Gleichung für jene ſey

$$Ax - By + Cz - D = o,$$

ſo iſt ſie für die andere,

$$Ap - Bq + Cr - E = o.$$

Aus beiden Gleichungen wird erhalten,

$$A(x-p) - B(y-q) + C(z-r) = D - E.$$

Der Abſtand beider Ebenen iſt die ſenkrechte, welche von einem Puncte der einen auf die andere gefällt wird. Für dieſe ſenkrechte ſind die Gleichungen:

$$y' = f - \frac{B}{A}x'; \qquad z' = g + \frac{C}{A}x',$$

wo die Coordinaten durch Strichelchen von denen an der erſtern Ebene unterſchieden ſind. In den Puncten, wo die ſenkrechte die Ebenen trifft, iſt

$$y = f - \frac{B}{A}x; \qquad z = g + \frac{C}{A}x;$$

$$q = f - \frac{B}{A}p; \qquad r = g + \frac{C}{A}p.$$

Daraus folgen die Gleichungen:

$$A(y-q) = -B(x-p),$$

$$A(z-r) = C(x-p);$$

und aus dieſen

$$C(y-q) = -B(z-r).$$

ür beide ſind nur in dem unveränder…
n. Die Coordinaten an der …
der andern p, q, r; die Gleichung

$$\ldots By + Cz - D = 0,$$

ere,

$$\ldots Bq + Cr - E = 0.$$

ngen wird erhalten,

$$\ldots (y-q) + C(z-r) = D-E$$

Ebenen iſt die ſenkrechte, welche …
nen auf die andere gefällt wird. Für
die Gleichungen:

$$\ldots x'; \quad z' = g + \frac{C}{A}x',$$

durch Strichelchen von denen …
rſchieden ſind. In den Puncten, wo
Ebenen trifft, iſt

$$\ldots \frac{B}{A}x; \quad z = g + \frac{C}{A}x;$$

$$\ldots \frac{B}{A}p; \quad r = g + \frac{C}{A}p.$$

$$z - r = \frac{C(D-E)}{AA + BB + CC}.$$

Die drey Linien, $x - p$; $y - q$; $z - r$, bilden die drey Seiten eines rechtwinklichten Parallelepipedum, deſſen Diagonale die gerade durch die Endpuncte der Ordinaten z und r ſind, oder das Stück der zwiſchen den beiden Ebenen enthaltenen gemeinſchaftlichen ſenkrechten. Dieſer Abſtand beider ſey $= P$, ſo iſt

$$P^2 = (x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2;$$

folglich

$$P = \frac{D-E}{\sqrt{(AA+BB+CC)}}.$$

51. Die gefundene Formel für P giebt überhaupt den Abſtand eines, durch die Coordinaten p, q, r gegebenen Punctes, von einer durch die Gleichung, $Ax - By + Cz = D$, gegebenen Ebene an. Man hat nur den gegebenen Punct zu betrachten als gehörig zu der mit jener parallelen Ebene, deren Gleichung iſt $Ap - Bq + Cr = E$, wo E durch die Coefficienten A, B, C und die Ordinaten p, q, r beſtimmt wird.

52. Zur Erläuterung der Auflöſung für den Abſtand eines gegebenen Punctes von einer gegebenen Ebene folgt

In der Ebene der x, y ſey ein Punct F gegeben, durch die Coordinaten $AG = p$; $GF = q$. In F ſey FH ſenkrecht auf die Ebene AGF, und treffe die geneigte Ebene in H. Es ſey $FH = k$, ſo iſt

$$Ap - Bq + Ck - D = o.$$

Von F werde FP ſenkrecht auf die Ebene BOP gezogen, und HPO durch H und P bis an O auf BB; auch FO nach O. Die Ebene FHO ſteht auf beide Ebenen, die BOFOB und BOPOB, ſenkrecht, wegen der auf jene und dieſe ſenkrechten FH und FP. Daher iſt der Durchſchnitt CO dieſer Ebenen ſenkrecht auf die Ebene FOH, das iſt auf FO und HO, alſo iſt der W. FOH der Neigungswinkel der Ebene BOP gegen die COF oder der x, y.

Nun iſt $FP = FH.\text{coſ}\,HFP = FH.\text{coſ}\,FOP$ $= k.\text{coſ}\,\vartheta$. Es iſt $\text{coſ}\,\vartheta = \frac{C}{\sqrt{(AA + BB + CC)}}$ (krumme Fläche, 5.) alſo $FP = \frac{Ck}{\sqrt{(AA+BB+CC)}}$, oder

$$FP = \frac{D - (Ap - Bq)}{\sqrt{(AA + BB + CC)}}.$$

Betrachtet man F als einen Punct in einer mit BOP parallelen Ebene, ſo iſt aus (50.), da $z = o$ iſt, $Ap - Bq = E$, und $P = \frac{D - E}{\sqrt{(AA + BB + CC)}}$.

53. Der gegebene Punct ſey I, in der Höhe FI über der Ebene der x, y, und $FI = r$. Man verlängere FI bis an H in der geneigten Ebene, und ziehe Ip ſenkrecht auf dieſelbe, ſo iſt $Ip = \frac{k - r}{k} FP =$

$$\frac{C(k - r)}{\sqrt{(AA + BB + CC)}} = \frac{D - Ap + Bq - Cr}{\sqrt{(AA + BB + CC)}}.$$

Betrachtet man I als einen Punct in einer mit BOP

durch I parallelen Ebene, ſo iſt $Ap - Bq + Cr = E$ (50.) und der Abſtand des Punctes von der Ebene BOPOB iſt $= \frac{D-E}{\sqrt{(AA + BB + CC)}}$.

54. Den Abſtand zweyer parallelen Ebenen, die durch zwey gegebene gerade Linien gelegt ſind, zu finden.

Aus den Gleichungen für die beiden geraden (40.), und den Werthen der Coefficienten in den Gleichungen für die Ebenen daſelbſt, ſetze man in (52.) die Werthe der letztern, ſo iſt der Abſtand

$$P = \frac{(b-d)(\alpha-\gamma) - (a-c)(\beta-\delta)}{\sqrt{((ad-bc)^2 + (b-d)^2 + (a-c)^2)}}.$$

55. Den kürzeſten Abſtand zweyer geraden Linien zu finden, die nicht in derſelben Ebene liegen.

Dieſer iſt der Abſtand der beiden durch ſie gelegten, einander parallelen Ebenen. Denn näher als dieſer Abſtand iſt, können ſich zwey Puncte dieſer Linien nicht kommen.

56. Die Puncte des kürzeſten Abſtandes der beiden geraden in (55) zu finden.

Die gegebenen Gleichungen für die beiden geraden ſeyn, wie in (40.),

$$\text{I.}\quad y = ax + \alpha; \qquad z = bx + \beta.$$
$$\text{II.}\quad y = cx + \gamma; \qquad z = dx + \delta.$$

Die daraus hergeleiteten Gleichungen für die parallelen, durch ſie gelegten Ebenen ſind (eben daſ.),

$$\text{III.}\quad Ax - By + Cz - D = 0,$$
$$\text{IV.}\quad Ax - By + Cz - E = 0.$$

Die Gleichungen für irgend eine auf die Ebenen ſenkrechte gerade ſind (42.)

$$\text{V.}\quad y = f - \frac{B}{A}x. \quad \text{VI.}\quad z = g + \frac{C}{A}x,$$

worin f und g unveränderliche, aber noch nicht beſtimmte

Größen ſind. Dieſe ſenkrechte muß nun zugleich durch einen Punct der einen wie der andern gegebenen geraden gehen. Die beiden Puncte, wodurch ſie geht, haben auf den beiden geraden den Abſtand der parallelen Ebenen, alſo den möglich kürzeſten.

An dem Puncte, wo die ſenkrechte die erſte der geraden ſchneidet, ſind die Coordinaten gemeinſchaftlich. Alſo iſt

$$ax + \alpha = f - \frac{B}{A}x;$$

$$bx + \beta = g + \frac{C}{A}x.$$

Schafft man x weg, ſo wird erhalten

VII. $(f-\alpha)(Ab-C) = (g-\beta)(Aa+B)$.

An dem Puncte, wo die ſenkrechte die zweyte der geraden ſchneidet, iſt

$$cx + \gamma = f - \frac{B}{A}x;$$

$$dx + \delta = g + \frac{C}{A}x.$$

Daraus iſt durch Wegſchaffung von x,

VIII. $(f-\gamma)(Ad-C) = (g-\delta)(Ac+B)$.

Aus den beiden Gleichungen VII. VIII. zwiſchen f und g wird jede dieſer Größen beſtimmt. Durch dieſe Werthe ergiebt ſich aus einer der beiden Gleichungen für x an dem Durchſchnittspuncte der einen oder der andern geraden mit der auf die Ebenen ſenkrechten der zugehörige Werth von x. Eben ſo der Werth von x an der andern geraden. Daraus werden ferner vermittelſt der Gleichungen für die beiden geraden die Coordinaten y und z gefunden, wodurch jeder der beiden Puncte des kürzeſten Abſtandes bekannt wird.

57. Durch Hülfe der Differentialrechnung nach der Theorie vom Größten und Kleinſten wird die Aufgabe (56.) folgendergeſtalt aufgelöſet.

Die Gleichungen für die beiden geraden ſeyn:

$$\text{I.}\quad y = ax + \alpha; \qquad z = bx + \beta,$$
$$\text{II.}\quad y' = cx' + \gamma; \qquad z' = dx' + \delta.$$

Der Abſtand der Puncte, wozu die Ordinaten z, z′ gehören, iſt (wie in 50.)

$$= \sqrt{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]},$$

Für y und y′; z und z′ ſetze man ihre Werthe aus jenen Gleichungen, ſo iſt der Abſtand der beiden Puncte =

$$\sqrt{[(x-x')^2 + (ax - cx' + \alpha - \gamma)^2 + (bx - dx' + \beta - \delta)^2]}.$$

Dieſer Abſtand ſey = u. Damit er ein Kleinſtes ſey, muß $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, und auch $\frac{\partial u}{\partial x'} = 0$ ſeyn, das iſt, die beiden partiellen Differentialquotienten ſind jeder = 0 (Größtes und Kleinſtes, 51.). Es iſt daher, wenn in den Differentialquotienten der Diviſor weggelaſſen wird,

$$\text{I.}\quad x - x' + a(ax - cx' + \alpha - \gamma) + b(bx - dx' + \beta - \delta) = 0.$$
$$\text{II.}\quad x - x' + c(ax - cx' + \alpha - \gamma) + d(bx - dx' + \beta - \delta) = 0.$$

Aus dieſen beiden Gleichungen werden die Werthe der Abſciſſen x und x′ beſtimmt. Setzt man dieſe in die Formel für u, ſo wird der kürzeſte Abſtand der beiden geraden erhalten; und eben dieſe geben durch die Gleichungen für die beiden geraden die Coordinaten y, z; y′, z′.

Linie, abbildende, iſt eine ſolche, welche durch ihren Zug in den Ordinaten eine Folge von Größen abbildet, die urſprünglich numeriſch ſind, oder als geometriſche Größen in einem andern Zuſammenhange mit den zu ihnen gehörigen vorkommen. Dergleichen ſind erſtlich die gerade Linie, deren Ordinaten eine arithmetiſche Progreſſion abbilden, wenn die Abſciſſen in arithmetiſcher genommen werden.

Ferner die logarithmiſche Linie, deren Ordinaten in geometriſcher Progreſſion ſtehen, wenn die Abſciſſen in arithmetiſcher ſind. Nach der einen Gegend iſt die Abſciſſenlinie die Aſymptote dieſer Curve; nach der andern wachſen die Ordinaten ins Unendliche. Ihre Subtangente hat eine unveränderliche Länge, ſ. berührende Linie, 21.

Man nehme auf einer geraden Linie die Abſciſſen gleich den Bogen eines Kreiſes von gegebenem Halbmeſſer, und ſetze darauf als Ordinaten die zugehörigen Sinus, ſo entſteht die Sinuslinie (Linea sinuum). Leibnitz hat dieſe Darſtellung angegeben. Die Linie der Sinus ſchlängelt ſich um die Abſciſſenlinie herum, indem mit jedem Halbkreiſe die Ordinaten ins Entgegengeſetzte übergehen. Die Abſciſſenlinie erſtreckt ſich ins Unendliche fort, da die Bogen jedes Vielfache des Umfanges mit einem Bogen darüber enthalten können.

Die Area der Sinuslinie iſt quadrirbar. Es ſey nämlich a der Halbmeſſer des Kreiſes, s ein Bogen deſſelben, als Abſciſſe zu der Ordinate y, ſo iſt das Differential der Area $= y\partial s$ (Quadratur), das iſt $= \frac{a y \partial y}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$ (Differentialformeln, 29.) Das Integral oder die Area iſt $=$ Conſt. $- a\sqrt{(a^2 - y^2)} = a^2 - a\sqrt{(a^2 - y^2)}$, wenn ſie für $y = 0$ und $s = 0$ anfängt. Für $y = a$, iſt die Area $= a^2$; alſo iſt der Theil der Area von $s = 0$ bis zu $s = \pi a$ oder dem halben Kreisumfange $= 2a^2$.

Die Gleichung für die Sinuslinie iſt $y = a . \text{Arc} \frac{s}{a}$.

Man nehme $a = 1$, und ſetze φ ſtatt s, ſo iſt (Differentialformeln, 48.)

$$y = \frac{e^{\varphi\sqrt{-1}} - e^{-\varphi\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Auf gleiche Art wird die Linie der Coſinus, der Sinusverſus, der Tangenten, der Cotangenten, der Secanten und der Coſecanten gebildet. Die Linie der Coſinus iſt dieſelbe mit derjenigen der Sinus, nur daß der Anfang der

Abſciſſen eine andere Stelle hat. — Die Linie der Sinusverſus ſchlängelt ſich an derſelben Seite der Abſciſſenlinie hin. — Die Linie der Tangenten erſtreckt ſich für den erſten Halbkreis neben einer Aſymptote auf beiden Seiten in entgegengeſetzten Gegenden; für die folgenden Halbkreiſe auf gleiche Art. Die Linie der Cotangenten des erſten Halbkreiſes liegt zwiſchen zwey Aſymptoten in entgegengeſetzten Gegenden. — Die Linie der Secanten erſtreckt ſich auch an einer Aſymptote in entgegengeſetzten Gegenden für den erſten Halbkreis, bleibt aber für den dritten Quadranten auf der Seite der negativen Abſciſſen, ſo daß ſie hier, und auch auf der poſitiven Seite zwiſchen zwey Aſymptoten gegen die Abſciſſenlinie convex iſt.

Es ſey v der lineariſche Sinusverſus eines Bogens s, ſo iſt $\partial s = \frac{a \partial v}{\sqrt{(2av - vv)}}$, (Differentialformeln, 35.). Das Differential der Area für die Linie der Sinusverſus iſt $= \frac{a v \partial v}{\sqrt{(2av - vv)}}$. Aus Integralformel, 71. iſt das Integral $= C - a\sqrt{(2av - vv)}$
$+ a\int \frac{a \partial v}{\sqrt{(2av - vv)}} = C - a\sqrt{(2av - vv)} + as.$ Es iſt aber $C = 0$, alſo iſt die Area $= a(s - \sqrt{(2av - vv)})$, wo die Irrationalgröße der lineariſche Sinus des Bogens s iſt.

Es ſey t die lineariſche Tangente des Bogens s, ſo iſt $\partial s = \frac{a^2 \partial t}{a^2 + t^2}$, (Diff. Formeln, 31.), und das Differential von der Area der Linie der Tangenten $= \frac{a^2 t \partial t}{a^2 + t^2}$.

Die Area $= \frac{1}{2} a^2 \log. nat. \frac{a^2 + t^2}{a^2} =$

$a^2 \log. \frac{\sqrt{(a^2 + t^2)}}{a} = a^2 \log. sec. Arc. \frac{s}{a}$.

Es ſey z die Secante des Bogens s, ſo iſt $\partial s = \frac{a^2 \partial z}{z \sqrt{(z^2 - a^2)}}$, alſo das Differential von der Area der Linie der Secanten $= \frac{a^2 \partial z}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$, und die Area $= a^2 \log. \text{nat.} \frac{z + \sqrt{(z^2 - a^2)}}{a}$. Es ſey $\varphi = \frac{s}{a}$, ſo iſt die Area $= a^2 \log. \text{tang} (45^\circ + \frac{1}{2}\varphi)$.

Literal-Algebra iſt diejenige, worin eine Aufgabe allgemein durch Buchſtabenzeichen vorgetragen und aufgelöſet wird, im Gegenſatze gegen die numeriſche, worin die bekannten Größen durch Zahlen gegeben, und bloß die unbekannten durch Buchſtaben bezeichnet werden. S. Algebra, Th. I. S. 43.

Localzeichen oder Localausdruck iſt eine kurze Bezeichnung eines beſtimmten oder unbeſtimmten Gliedes aus einer Potenz einer Reihe, es ſey mit der zugehörigen Potenz der veränderlichen Progreſſionalgröße, oder auch des Coefficienten dieſer Potenz allein. — Localformel iſt ein analytiſcher Ausdruck, der aus Gliedern mit Localzeichen beſteht. Eben dergleichen Symbole können auch bey der Entwickelung von Producten und Quotienten vorkommen.

Es ſey nämlich

$$ax^m + bx^{m+d} + cx^{m+2d} + dx^{m+3d} + \text{etc.} = p,$$

ſo wird die nte Potenz dieſer Reihe bezeichnet durch

$$p^n = p^n \tau 1 + p^n \tau 2 + p^n \tau 2 \ldots \ldots + p^n \tau (r+1) \text{etc.}$$

wo die einzelnen Glieder den erſten, zweyten, dritten ... (r + 1)ten Terminus der nten Potenz von p bedeuten. Hierin ſind die zugehörigen Potenzen von x mit einbegriffen. Ohne dieſe iſt die Symboliſirung folgende:

$$p^n = p^n\varkappa 1 x^{mn} + p^n\varkappa 2 x^{mn+d} + p^n\varkappa 3 x^{mn+2d} \ldots\ldots + p^n\varkappa(r+1)x^{mn+rd} + \text{etc.}$$

Hier bedeuten $\varkappa 1$, $\varkappa 2$, $\varkappa 3 \ldots \varkappa(r+1)$, den erſten, zweyten, dritten . . . $(r+1)$ Coefficienten in der Potenz p^n.

Bey der Entwickelung eines Products werden anſtatt der Potenz einer Reihe die Bezeichnungen der Factoren vorgeſetzt. Z. B. die ganzen Reihen welche in einander multiplicirt werden, ſeyn durch P, Q, R bezeichnet, ſo iſt $PQR\tau 4$ das vierte Glied des Products, wenn es nämlich nach den Potenzen von x, der veränderlichen Größe, geordnet iſt.

Soll die Reihe P durch die Reihe Q dividirt werden, ſo bedeutet $\frac{P}{Q}\tau r$ das rte Glied des Quotienten. Sondert man die Potenz der veränderlichen Größe ab, ſo wird das Symbol $\varkappa$ auf gleiche Art wie bey Potenzen gebraucht, und die Potenz von x zugeſetzt.

Hindenburg hat dieſe Bezeichnungsart eingeführt. Infinitomii dignitatum formulae p. 71; 93 — 98; 136 — 141. und verbeſſert Nov. Systema permutationum, p. XXXIII. Sie ſind ſehr nützlich bey zuſammengeſetzten combinatoriſchen Rechnungen, um das Geſetz der Formation faßlich zu machen, und dann die Glieder einzeln zu entwickeln.

Locus geometricus, ſ. Ort, geometriſcher.

Logarithmus iſt die Zahl, welche anzeiget, das wie vielfache ein Verhältniß in Abſicht auf ein anderes Grundverhältniß iſt, wodurch alle Verhältniſſe gemeſſen werden. Nämlich wenn das Grundverhältniß iſt a : b, ſo iſt das gedoppelte $a^2 : b^2$; das dreyfache $a^3 : b^3$, das mfache $a^m : b^m$, ſo wie auf der andern Seite das halbgetheilte iſt $a^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{2}}$; das dreygetheilte $a^{\frac{1}{3}} : b^{\frac{1}{3}}$; das ngetheilte $a^{\frac{1}{n}} : b^{\frac{1}{n}}$; ferner noch das mfache und zugleich

n getheilte iſt $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$. Der letzte Ausdruck ſtellt alle andern Fälle vor, wenn n oder m = 1 genommen werden. Die Zahl $\frac{m}{n}$ iſt der Logarithmus des Verhältniſſes $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$, in Beziehung auf das a : b.

Auf dieſe Erklärung bezieht ſich die Bildung des Kunſtwortes, welches aus dem griechiſchen λογων ἀριθμος, zuſammengezogen iſt, und einen **Verhältnißzähler** oder **Verhältnißmeſſer** bezeichnet.

1. Der Exponent des Grundverhältniſſes a : b ſey = e, ſo iſt $e^{\frac{m}{n}}$ der Exponent des $\frac{m}{n}$fachen, oder des $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$.

Nun iſt $e^{\frac{m}{n}}$ ein Glied in der geometriſchen Reihe, welche aus der Grundreihe, $1 : e : e^2 : e^3 \ldots e^x$: etc. entſteht, wenn zwiſchen je zwey Gliedern n — 1 Glieder eingeſchaltet, oder wenn ſtatt jedes Gliedes n Glieder, alle gleichfalls in geometriſcher Fortſchreitung, genommen werden. Der Exponent von e bezeichnet zugleich die Stelle des Gliedes in der geometriſchen Reihe, wenn die Stelle der Einheit durch 0 angegeben wird. Alſo iſt **Logarithme einer Zahl die Stelle derſelben in einer geometriſchen Progreſſion**, $1 : e : e^2$: etc. ſo fern ſie in dieſer unmittelbar, oder in einer daraus durch Einſchaltung gebildeten Reihe, vorkommt. Iſt die Zahl ſo beſchaffen, daß ſie durch keine noch ſo weit getriebene Einſchaltung in der Reihe ihre Stelle findet, ſo iſt ihr Logarithme oder ihre Stellenzahl $\frac{m}{n}$ eine Irrationalzahl, zu welcher nur zwey, immer mehr und mehr einander näher kommende, rationale ſich angeben laſſen, eine nächſt kleinere und eine nächſt größere. Dieſes iſt z. B. der Fall bey allen ganzen Zahlen, die in die geometriſche Reihe, 1 : 10 : 100 : 1000 : etc. eingeſchaltet werden ſollen. Die

Form der eingeſchalteten Glieder iſt in dem Artikel, geo= metriſche Reihe, 11. angegeben.

2. Man betrachte das Glied $e^{\frac{m}{n}}$ als eine Zahl, die aus einer Zahl e durch die Erhebung auf die Potenz vom Grade m, und Ausziehung der Wurzel vom Grade n, entſteht, ſo iſt der *Exponent* $\frac{m}{n}$ *der Potenz* von e zugleich der *Logarithme dieſer Potenz*. Dieſer, aus der urſprünglichen, von dem Erfinder gefaßten Vorſtellung, hergeleitete Begriff wird als der für die Berechnung der Logarithmen ſelbſt, und für ihre Anwendung bequemſte, fernerhin angenommen werden.

Der Logarithme einer Zahl z wird bezeichnet durch log. z, oder l. z.

3. Es ſey nun a eine willkürlich feſtgeſetzte Zahl, ſie mag rational oder irrational, größer oder kleiner als die Einheit ſeyn, z irgend eine andere unbeſtimmte, und $a^x = z$, ſo iſt x der Logarithme der Zahl z in Beziehung auf die Grundzahl a, oder die Wurzel, von welcher z als eine Potenz angeſehen wird.

4. Jede Zahl kann unter der Form a^x vorgeſtellt werden. Denn ſie findet nothwendig ihre Stelle in der geometriſchen Reihe $1 : a : a^2 : a^3$: etc. oder der damit rückwärts verbundenen, $1 : a^{-1} : a^{-2} : a^{-3}$: etc. wenn darin eine unbeſtimmt große Anzahl Glieder eingeſchaltet werden. Es laſſen ſich bey einer endlichen Anzahl eingeſchalteter Glieder immer zwey Glieder angeben, zwiſchen welche die Zahl z fällt, wenn ſie nicht genau unter jenen enthalten iſt, und dieſe kommen ihr deſto näher, je größer die Anzahl der eingeſchalteten Glieder iſt. Stellt man ſich die Anzahl derſelben unendlich groß vor, ſo iſt die Reihe eine ſtetige, in welcher die Zahl z irgendwo vorkommt. Bey der wirklichen numeriſchen Beſtimmung laſſen ſich nur zwey Gränzen angeben, aber doch ſo nahe an einander, daß der Unterſchied kleiner wird, als jeder irgends für die vorgeſetzte Genauigkeit nachtheilige Fehler ſeyn mag.

5. Die Verbindung einer geometriſchen Reihe mit der arithmetiſchen Reihe der Stellenzahlen ihrer Glieder, oder die Verbindung der Zahlen, als Potenzen einer gegebenen Zahl betrachtet, und der Exponenten, macht ein **logarithmiſches Syſtem aus.** Die Stelle der Einheit in der geometriſchen Reihe wird durch o bezeichnet. Das Glied, deſſen Stelle die Einheit iſt, oder die gemeinſchaftliche Würzel der Potenzen, welche für die Zahlen geſetzt werden, heißt die **Grundzahl** oder **Baſis** des logarithmiſchen Syſtems. Dieſe iſt willkürlich, ſo daß es unendlich viele logarithmiſche Syſteme giebt. Es kommt nur darauf an, auszumachen, welches das bequemſte iſt, es ſey zur Anwendung oder zur Berechnung der Logarithmen.

6. Wenn vier Zahlen geometriſch proportional ſind, ſo ſind ihre Logarithmen arithmetiſch proportional und umgekehrt. Denn die Glieder gleicher Verhältniſſe ſtehen in der geometriſchen Reihe, in welcher ſie vorkommen, gleich weit von einander ab; daher haben die zugehörigen Logarithmen, als Glieder einer zugeordneten arithmetiſchen Reihe, gleiche Abſtände, und ſind daher arithmetiſch proportional. Die beiden Reihen, die geometriſche und die arithmetiſchen, mögen **discrete** ſeyn, d. i. ſolche, in welchen der Unterſchied der Glieder eine endliche Größe iſt, oder eine ſtetige, in welcher zwiſchen je zwey Gliedern der Grundreihe unendlich viele Glieder eingeſchaltet ſind. Immer geben gleiche Abſtände gleiche Verhältniſſe, und zu gleichen Verhältniſſen gehören gleiche Abſtände.

7. Hieraus erſieht man am deutlichſten, wie die Logarithmen die Multiplication in eine Addition und die Diviſion in eine Subtraction verwandeln. Denn es ſey die Proportion $A : B = C : D$, ſo iſt

$$\log. A - \log. B = \log. C - \log. D,$$

wo das Zeichen — blos einen Unterſchied anzeigt, ohne zu beſtimmen, welche von beiden Größen die größere ſey. Daher iſt nun

$$\log. D = \log. B + \log. C - \log. A,$$

Digitized by Google

iſt dieſen vermindern, ſo wie ihn ſubtrahiren iſt, eben dieſen vergrößern. Nämlich eine Zahl N mit einem Bruche $\frac{A}{B}$ multipliciren oder dividiren, iſt daſſelbe als ſie mit dem Bruche $\frac{B}{A}$ dividiren oder multipliciren. Iſt $\frac{A}{B}$ ein eigentlicher Bruch, ſo behält man den negativen Logarithmen log. A — log. B bey, und addirt ihn bey der Multiplication der Zahl N zu log N, ſubtrahirt ihn bey der Diviſion, welches eben ſo viel iſt, als in dem erſtern Falle den poſitiven Logarithmen des Bruches $\frac{B}{A}$ oder $\frac{1}{C}$ ſubtrahiren, oder in dem andern Falle ihn addiren. — Bey der Anweiſung zum Gebrauch der logarithmiſchen Tafeln wird ein Verfahren gewieſen werden, das negative ganz zu vermeiden.

13. Sofern man die Logarithmen als Exponenten von den Potenzen einer gegebenen Zahl anſieht, folgt alles dieſes aus der Lehre von der Multiplication und Diviſion der Potential- und Wurzelgrößen. Es iſt $a^m \times a^n = a^{m+n}$, und $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, wo m und n auch gebrochene Zahlen ſeyn können, wie ſie es in Rechnungen meiſtentheils ſind. Iſt nun $A = a^m$; $B = a^n$, ſo iſt $\log. A \times B = m + n$; $\log. \frac{A}{B} = m - n$. Iſt in der letztern Formel $m < n$, ſo iſt $\frac{B}{A} = a^{n-m}$, und $\log. \frac{B}{A} = n - m$. Das iſt, man braucht nur die Multiplication und Diviſion mit einander zu vertauſchen, wenn man ſtatt des negativen Logarithmen den poſitiven gebrauchen will.

14. Der Logarithme eines Verhältniſſes A : B iſt der Unterſchied der Logarithmen der beiden Glieder, oder es iſt log. (A:B) = log B — log. A. Dieſes folgt aus (13.), weil Verhältniſſe durch ihre Exponenten beſtimmt werden. Oder insbeſondere für Verhältniſſe folgendergeſtalt.

Es ſey a: b das Grundverhältniß, mit welchem das A : B verglichen wird, und b = ea. Man bilde die Reihe $a : ea : e^2a : e^3a \ldots e^ma \ldots e^na \ldots$ etc. und ſetze, daß $A = e^ma$; $B = e^na$ iſt, es ſey nun in der urſprünglichen Reihe oder in der ausgefüllten. Die Größe jedes Verhältniſſes wird durch den Abſtand der Glieder gemeſſen, es ſey durch Wiederholung des Verhältniſſes a: b oder 1 : e allein, oder zugleich durch deſſen Theilverhältniſſe. Dieſer Abſtand iſt aber n — m, da die Abſtände von dem Anfangsgliede n und m ſind.

15. Aus der erſtern Begründung der logarithmiſchen Rechnung erhellt, warum die Einheit in der geometriſchen Reihe zum Logarithmen die Einheit erhalten muß. Denn da ein Product zweyer Factoren die vierte Proportionale zur Einheit und zu den beiden Factoren iſt, ſo müßte man von der Summe der Logarithmen der Factoren den Logarithmen der Einheit abziehen, und dieſes bey jedem noch hinzukommenden Factor wiederholen. Eben ſo da ein Quotient die vierte proportionale zum Dividendus, Diviſor und der Einheit iſt, ſo müßte hier der Logarithme der Einheit zu dem Unterſchiede der Logarithmen jener addirt werden.

Betrachtet man die Logarithmen als Exponenten einer Potenz, ſo daß $z = a^m$, ſo iſt nothwendig m = o, wenn z = 1 iſt.

16. Es iſt nun die Frage, den Logarithmen x für jede gegebene Zahl z, oder umgekehrt dieſe für jenen zu finden. Aus der Differentialformel für den Logarithmen einer Zahl (Differ. Formeln, 14.) laſſen ſich die Reihen für beide leicht herleiten, allein da $a^x = z$ eine Gleichung zwiſchen endlichen Größen iſt, ſo muß die Entwickelung der x durch z, oder der z durch x auch blos durch die Ana-

lyſis des Endlichen geſchehen. Nebſt dieſer Methode hat man inzwiſchen auch den Weg durch die Analyſis des Unendlichen kennen zu lernen.

17. Ehe wir jene Entwickelung unternehmen, wird es zur beſſern Einſicht dienen, aus der Lehre von den geometriſchen Reihen den Satz zu bemerken, daß die Stellenzahlen gleich großer Glieder in zweyen Reihen, deren Anfangsglied einerley iſt, ein gegebenes Verhältniß haben (geometr. Reihe, 22.). Wenn alſo die Reihen ſind:

$$1 : a : a^2 : a^3 \ldots a^x : \text{etc.}$$
$$1 : e : e^2 : e^3 \ldots e^u : \text{etc.}$$

und es iſt $a^x = e^u$, ſo iſt $x : u$ ein gegebenes Verhältniß, was auch die Zahlen a^x und e^u ſeyn mögen, ſo daß dieſes Verhältniß blos von den Grundzahlen a und e abhängt. Hieraus erhellt, daß die Function einer Zahl, welche den Logarithmen derſelben in verſchiedenen Syſtemen darſtellt, einen von der Zahl ſelbſt unabhängigen Factor haben muß, der durch die Baſis des Syſtems beſtimmt wird.

18. In der Reihe, $1 : a : a^2 : a^3 :$ etc. ſchalte man zwiſchen je zwey Gliedern $n - 1$ Glieder ein, ſo iſt das erſte derſelben $= a^{\frac{1}{n}}$, und die Reihe iſt nun ... $1 : a^{\frac{1}{n}} : a^{\frac{2}{n}} : a^{\frac{3}{n}} \ldots a^{\frac{u}{n}} :$ etc. wo $\frac{u}{n}$ nun die Stelle eines unbeſtimmten Gliedes z angiebt. Man ſetze $\frac{u}{n} = x$, und $z = 1 + y$, ſo iſt $a^x = 1 + y$ oder $a^{\frac{u}{n}} = 1 + y$. Daraus iſt $a^{\frac{1}{n}} = (1 + y)^{\frac{1}{u}}$. Den Theil rechter Hand entwickele man nach dem binomiſchen Lehrſatze, und multiplicire beide Theile, den einen mit nx, den andern mit u, ſo iſt

$$n\,(a^{\frac{1}{n}} - 1)\,x = y + \left(\frac{1}{u} - 1\right).\frac{y^2}{1.2}$$

$$+ \left(\frac{1}{u} - 1\right)\left(\frac{1}{u} - 2\right) \cdot \frac{y^3}{1.2.3} + \left(\frac{1}{u} - 1\right)\left(\frac{1}{u} - 2\right)\left(\frac{1}{u} - 3\right) \cdot \frac{y^4}{1 \ldots 4} + \text{etc.}$$

In dieſer Gleichung hat $1 + y$ blos ſolche Werthe, die in der Reihe $1 : a : a^2 : a^3 :$ etc. und der daraus durch Einſchaltung entſtandenen vorkommen. Wird n vergrößert, ſo verändern ſich beide Theile der Gleichung.

19. Damit y jede Zahl bedeuten könne, muß die Reihe eine ſtetige ſeyn. Dadurch werden u und n beide unendlich groß, wobey ſie aber jedes endliche Verhältniß erhalten können. So wie für endliche n und u der Quotient $\frac{u}{n}$ die Stelle x des Gliedes $1 + y$ in Beziehung auf den Abſtand der Baſis a von 1 als Einheit anzeigt; ſo zeigt eben dieſer Quotient, auch bey unendlichen Werthen von u und n, dieſen Abſtand an.

20. Nimmt man demnach u und n unendlich groß, ſo verwandelt ſich die Reihe in der Gleichung rechter Hand in dieſe:

$$y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 \mp \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 \mp \text{etc.}$$

In dem Producte $n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$ wird der eine Factor unendlich groß, der andere unendlich klein, da $a^{\frac{1}{n}}$ ſich der Einheit deſto mehr nähert, je größer der Grad der Wurzel iſt. Das Product bleibt inzwiſchen eine endliche Größe. Denn es iſt gezeigt, daß ein Logarithme eine Function der Zahl multiplicirt mit einer unveränderlichen, dem Syſtem eigenen Größe iſt. Da nun x gleich iſt der Reihe $y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 -$ etc. dividirt durch die

Gränze von $n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$, ſo muß das reciproke dieſes Products jener eigenthümliche Factor ſeyn.

21. Es läßt ſich auch folgendergeſtalt darthun, daß die Gränze des Products $n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$ eine endliche beſtimmte Größe iſt. — Man nehme irgend eine Wurzel aus a, und ſetze dieſe, $a^{\frac{1}{m}} = 1 + q$, ſo iſt

$$a^{\frac{1}{mn}} = (1 + q)^{\frac{1}{n}}, \text{ und}$$

$$a^{\frac{1}{mn}} - 1 = \frac{1}{n}q + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n} - 1\right).\frac{q^2}{1.2} + \text{etc.}$$

alſo

$$mn(a^{\frac{1}{mn}} - 1) = m\left(q + \left(\frac{1}{n} - 1\right)\frac{q^2}{1.2} + \text{etc.}\right).$$

Die Reihe enthält zwey Theile, einen, der von n abhängig iſt, und einen, der von n nicht abhängt. Jener wird immer kleiner, je größer n genommen wird; dieſer bleibt ungeändert, bey demſelben Werthe von m. Sondern wir den letztern von der ganzen Reihe ab, ſo haben wir die Gränze der ganzen Reihe. Sie iſt $= m\left(q - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 - \frac{1}{4}q^4 + \text{etc.}\right)$. Damit dieſe aber auch berechnet werden könne, muß ſie convergiren, oder q muß ein eigentlicher Bruch ſeyn. Man kann m ſo groß nehmen, daß dieſe Forderung erfüllt wird. So iſt $m(q - \frac{1}{2}q^2 + \text{etc.})$ die Gränze des Products $mn(a^{\frac{1}{mn}} - 1)$, das iſt der von n unabhängige Theil deſſelben. Jene Reihe iſt nun auch die Gränze des Products $n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$, welches dieſelbe Form mit jenem hat.

Es iſt einerley, ob der unendliche Exponent der Wurzel durch die unendliche Zahl n oder durch mn bezeichnet wird.

22. Exempel. In dem Briggiſchen Syſtem iſt, zufolge der berechneten größern Tafeln, 0,0001 = log. 1,00023029 nahe, oder für n = 10000, und a = 10, iſt $a^{\frac{1}{n}}$ = 1,00023029 nahe. Alſo iſt $n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = 2,3029$. Ferner iſt 0,00001 = log. 1,000023026 nahe, alſo iſt für n = 100000 das Product $n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = 2,3026$ nahe. Demnach iſt in dieſem Syſtem dieſes Product, oder der beſtändige Diviſor in dem Werthe des Logarithmen x zu der Zahl 1 + y etwas kleiner als 2,3026.

23. Die Gränze des Products $n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$ bezeichne man durch $\frac{1}{M}$, ſo iſt der Logarithme der Zahl 1 + y, oder

$$x = M\left(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \text{etc.}\right)$$

Wie die Zahl M aus der Baſis a leichter als nach der Formel (21.) gefunden werden möge, müſſen fernere Unterſuchungen ergeben.

24. Die Zahl M heißt der Modulus des logarithmiſchen Syſtems, in welchem a die Baſis iſt. Entweder iſt die Baſis gegeben, ſo iſt der Modulus zu finden; oder umgekehrt, der Modulus wird angenommen, ſo iſt die Baſis daraus herzuleiten.

25. Wenn M = 1 genommen wird, ſo heißen die Logarithmen die natürlichen. In jedem andern Syſtem heißen die Logarithmen künſtliche, weil ſie aus jenen durch die Multiplication mit einem Modulus hergeleitet werden. Die natürlichen Logarithmen haben die einfachſte Form. Es iſt nämlich

$$\log.\text{nat.}(1+y) = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \text{etc.}$$

26. Die natürlichen Logarithmen heiſſen bey den ältern Geometern, und noch gewöhnlich bey den Engländern, die hyperboliſchen, in Beziehung auf eine Eigenſchaft der gleichſeitigen Hyperbel, welche in dem Artikel, Quadratur, vorkommen wird. Hier nur vorläufig zur Erläuterung des Ausdrucks folgendes. In Tab. XIII. Fig. 74. zum zweyten Theile ſey S A s eine gleichſeitige Hyperbel, ſo daß die Ordinaten AE, ML an die Aſymptote CS ſenkrecht darauf ſind. Nimmt man CE zur Einheit, ſo iſt die Area AELM gleich dem natürlichen Logarithmen der Abſciſſe CL. An den ungleichſeitigen Hyperbeln ſind die Werthe der Flächenräume, wie AELM, künſtliche Logarithmen, wenn CE die Einheit iſt. Man ſieht, daß die Benennung, hyperboliſche Logarithmen, eine willkürliche engere Bedeutung hat.

27. Die Logarithmen derſelben Zahl in verſchiedenen Syſtemen verhalten ſich wie die Moduli der Syſteme, vergl. 17.

Wenn die Zahlen wenig von der Einheit verſchieden ſind, ſo verhalten ſich ihre Logarithmen nahe wie die Unterſchiede der Zahlen von der Einheit.

Das Verhältniß des natürlichen Logarithmen einer Zahl zu dem Überſchuſſe derſelben über die Einheit, nähert ſich immer mehr und mehr dem Verhältniß der Gleichheit, je kleiner der Überſchuß iſt.

28. Zu einem gegebenen Logarithmen x wird die zugehörige Zahl 1 + y durch folgende Reihe gefunden:

$$1 + y = 1 + cx + \frac{c^2x^2}{1.2} + \frac{c^3x^3}{1.2.3} + \frac{c^4x^4}{1.2.3.4} + \frac{c^5x^5}{1..5} + \frac{c^6x^6}{1..6} + \text{etc.}$$

wo c das Umgekehrte des Modulus iſt.

Digitized by Google

Es gehört nämlich zu der Baſis als Zahl der Logarithme $= 1$. Die numeriſche Entwickelung giebt

$$e = 2,718281\,828459\ldots$$

31. Da $e^x = 1 + y = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} +$ etc. ſo folgt, daß

$$\left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}\right)^x$$
$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

32. Dieſes hängt mit dem binomiſchen Lehrſatze folgendermaßen zuſammen. Das Binomium $1 + qt$ werde auf die Potenz mit dem Exponenten $\frac{p}{q}$ erhoben, ſo iſt

$$(1 + qt)^{\frac{p}{q}} = 1 + pt + \frac{p.p - q.}{1.2} t^2 + \frac{p.p - q.p - 2q.}{1.2.3} t^3 + \text{etc.}$$

Dieſe Reihe werde ferner auf die Potenz mit dem Exponenten x erhoben, ſo iſt dieſelbe auch $= (1 + qt)^{\frac{px}{q}}$.

Folglich iſt

$$\left(1 + pt + \frac{p.p - q.}{1.2} t^2 + \frac{p.p - q.p - 2q.}{1.2.3} t^3 + \text{etc.}\right)^x$$
$$= 1 + px.t + \frac{px.px - q.}{1.2} t^2 + \frac{px.px - q.px - 2q.}{1.2.3} t^3 + \text{etc.}$$

In dieſer Gleichung ſetze man $q = 0$, und $pt = c$, ſo iſt

$$\left(1+\frac{c}{1}+\frac{c^2}{1.2}+\frac{c^3}{1.2.3}+\frac{c^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}\right)^x$$
$$=1+\frac{cx}{1}+\frac{c^2x^2}{1.2}+\frac{c^3x^3}{1.2.3}+\frac{c^4x^4}{1.2.3.4}+\text{etc.}$$

Hier iſt die Reihe $1+c+\frac{c^2}{1.2}+$ etc. die Baſis, alſo der erſte Theil der Gleichung die Zahl, ihr Logarithme $= x$, durch welchen die Zahl mittelſt des zweyten Theils ausgedruckt wird. Setzt man $pt = 1$, ſo wird die Reihe (31.) erhalten. Die Potentialgröße $(1+qt)^{\frac{p}{q}}$ kommt der Baſis immer näher, je kleiner q genommen wird. Die Größe der Baſis aber kommt auf den Werth des Products p t an.

33. Den Logarithmen x aus dieſer Gleichung durch die Zahl z oder vielmehr durch $z-1=y$ auszudrucken, muß für x eine Reihe mit unbeſtimmten Coefficienten, $x = y - Ay^2 + By^3 - Cy^4 +$ etc. geſetzt werden. Die Coefficienten der Reihe nach den Potenzen von y geben die Gleichungen zur Beſtimmung der Werthe von A, B, C, etc. doch nur durch Induction. Inzwiſchen iſt dieſe Rechnung viel leichter als die von **Vega** in der Einleitung zu ſeiner vollſtändigen Sammlung logarithmiſcher Tafeln geführte.

34. In einem künſtlichen Syſtem ſey die Baſis $= a$, der Modulus $= M$, ſo iſt $M = \frac{1}{\text{log. nat. } a}$, und log. nat. a iſt die Gränze des Products $n(a^{\frac{1}{n}}-1)$.

Denn es iſt $x = M \text{ log. nat.}(1+y)$. Nun iſt, wenn $1+y=a$ genommen wird, $x=1$, daher iſt $\frac{1}{\text{log. nat. } a} = M$.

35. Auch iſt $M = \text{log. artif. } e$.

Denn es iſt log. art. e $=$ M log. nat. e $=$ M.

36. Die Berechnung der Logarithmen in einem künſtlichen Syſtem beruht alſo auf der Beſtimmung des natürlichen Logarithmen der Baſis. Aus der unten folgenden Methode zur leichten Berechnung der Logarithmen wird ſich ergeben, daß log. nat. $10 = 2,302585\ 092994\ldots$ iſt. Dieſer iſt die Gränze des Products $n(10^{\frac{1}{n}} - 1)$, und $\frac{1}{2,3025\ldots}$ iſt der Modulus des Briggiſchen Syſtems, das iſt, $M = 0,434294\ 481903\ldots$ Mit dieſer Zahl ſind die natürlichen Logarithmen zu multipliciren, um die Briggiſchen zu erhalten. Die natürlichen werden aus den Briggiſchen durch die Multiplication mit der Zahl $2,302585\ldots$ gefunden.

37. Es iſt
log. Brigg. $2,302585\ldots = 0,36221\ 56886\ldots$ zufolge Euler in Theoria Comet. et Planetarum, p. 18. Alſo iſt log Brigg. $M = 9,63778\ 43114 - 10$.

In Lamberts Zuſätzen zu den ... Tafeln, S. 134 iſt durch einen Schreibfehler Basis ſtatt Modulus logarithmorum Briggianorum geſetzt.

38. Die Zahl, deren Logarithme zu finden iſt, ſey kleiner als die Einheit, oder $z = 1 - y$. Dadurch wird der Exponent x von a^x negativ, wenn a größer als die Einheit iſt, wie es die bisherige Rechnung erheiſcht, da $a^x = 1 + y$ geſetzt iſt. Man ſetze nun $a^{-x} = 1 - y$, wo x und y abſolute Zahlen bedeuten, oder $a^x = \frac{1}{1-y}$.

Ferner ſey, wie vorher, $x = \frac{u}{n}$, alſo $a^{\frac{u}{n}} = \frac{1}{1-y}$, und $a^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{u}} = (1-y)^{-\frac{1}{u}}$. Daraus iſt, auf ähnliche Art wie in (18.),

$$n(a^{\frac{1}{n}} - 1)x = y + \left(\frac{1}{u} + 1\right).\frac{y^2}{1.2} + \left(\frac{1}{u} + 1\right)$$
$$\left(\frac{1}{u} + 2\right).\frac{y^3}{1.2.3} + \left(\frac{1}{u} + 1\right)\left(\frac{1}{u} + 2\right)\left(\frac{1}{u} + 3\right).\frac{y^3}{1.2.3.4}$$
$$+ \text{etc.}$$

Man nehme auf beiden Seiten die Gränzen, für ein unendliches n, und es iſt

$$x = \frac{1}{c}\left(y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 + \text{etc.}\right).$$

Dieſes iſt der abſolute Werth von x, für eine Reihe mit Exponenten, die kleiner als 1 ſind. In Beziehung auf den Theil der ganzen Reihe, worin die Exponenten grö⸗ ßer als 1 ſind, iſt x negativ, oder

$$\log.(1 - y) = -\frac{1}{c}\left(y + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \text{etc.}\right).$$

Man kann aber auch die Logarithmen in dem Theile der Reihe mit Exponenten unter 1 als poſitiv annehmen, wodurch die Logarithmen in dem andern Theile negativ werden. Das iſt der Fall in dem Neperiſchen Syſtem.

39. Auf gleiche Art iſt die Reihe für die Zahl $1 - y = z$ durch ihren Logarithmen,

$$1 - y = 1 - cx + \frac{c^2 x^2}{1.2} - \frac{c^3 x^3}{1.2.3} + \frac{c^4 x^4}{1...4}$$
$$- \frac{c^5 x^5}{1...5} + \text{etc.}$$

In dem Beweiſe (28.) wird $1 - y$ ſtatt $1 + y$, und $-x$ oder $-\frac{u}{n}$ ſtatt x oder $\frac{u}{n}$ geſetzt. In dem andern Beweiſe (32.) zeigt ein negatives x ein Glied der abnehmenden Reihe nach 1 an, und in der binomiſchen Formel werden die Coefficienten mit einer ungeraden Anzahl Factoren negativ, wofern der zweyte Theil des Binomium poſitiv iſt.

40. Aus den Formeln (23. und 38.) ſieht man, wie ſich die Logarithmen von $1 + y$ und $1 - y$ unterſcheiden, auch in Anſehung der Größe.

41. Die Integration giebt aus der Differentialgleichung zwiſchen x und z die Reihen für Logarithme und Zahl ganz leicht. Dieſe Gleichung iſt ſchon in dem Artikel, Differentialformeln, 14. gefunden. Um hier den Zuſammenhang nicht zu unterbrechen, folgt hier die Herleitung derſelben, zugleich auf eine etwas veränderte Art, wie ſie ſchon in frühern Zeiten William Jones *) gefunden hat, aus deſſen nachgelaſſenen Papieren ſie in den Philos. Transact. Vol. 61. mitgetheilt iſt.

Es ſey $z = a^x$; die zuſammen gehörigen endlichen Veränderungen von z und x ſeyn Δz und Δx. Es iſt alſo $z + \Delta z = a^{x+\Delta x} = a^x . a^{\Delta x}$. Man ſetze $a = 1 + b$, ſo iſt

$$z + \Delta z = a^x\left(1 + \Delta x . b + \frac{\Delta x . \Delta x - 1.}{1.2} . b^2 + \frac{\Delta x . \Delta x - 1 . \Delta x - 2.}{1.2.3} . b^3 + \text{etc.}\right).$$

Daraus iſt

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = a^x\left(b - \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{3}b^3 - \tfrac{1}{4}b^4 + \tfrac{1}{5}b^5 - \text{etc.} + P\Delta x\right),$$

wo P eine aus b und Δx zuſammengeſetzte Function iſt. Hieraus iſt der Differentialquotient

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z\left(b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \text{etc.}\right).$$

Die in z multiplicirte Reihe ſetze man $= \frac{1}{M}$, ſo iſt die

*) William Jones iſt 1675 geboren, und 1749 als Vice-Präſident der Königl. Geſellſchaft zu London geſtorben. Sein Sohn war der in unſern Zeiten durch ſeine Bemühungen um die Oſtindiſche Literatur berühmt gewordene Sir William Jones.

Differentialgleichung zwiſchen Logarithme und Zahl,

$$\partial x = \frac{M\partial z}{z}.$$

42. Dieſe Gleichung zu integriren ſetze man $z = 1 + y$, ſo iſt $\partial x = \frac{M\partial y}{1+y}$. Den zweyten Theil der Gleichung verwandle man in eine Reihe durch die Diviſion, ſo iſt

$$\partial x = M(1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + \text{etc.})\partial y.$$

Die Integration giebt ſogleich

$$x = \text{Conſt.} + M\left(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \text{etc.}\right).$$

Wenn $y = 0$, ſo iſt $z = 1$, und $x = 0$, alſo iſt $\text{Conſt.} = 0$, und es iſt

$$x = M\left(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \text{etc.}\right).$$

das iſt

$$\log. z = M\left[(z-1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 - \text{etc.}\right].$$

43. Um die Zahl z durch ihren Logarithmen x auszudrucken, ſetze man $z = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.}$ wo das erſte Glied $= 1$ geſetzt iſt, weil $z = 1$ iſt, wenn $x = 0$ genommen wird. Die als der Werth von z angenommene Reihe ſetze man in die Differentialgleichung, $z\partial x = M\partial z$, ſo iſt

$$M\partial z = (1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{etc.})\partial x.$$

Die Integration giebt

$$Mz = \text{Conſt.} + x + \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{3}Bx^3 + \frac{1}{4}Cx^4 + \frac{1}{5}Dx^5 + \frac{1}{6}Ex^6 + \text{etc.}$$

Wenn $x = 0$ iſt, ſo iſt $z = 1$, alſo Conſt. $= M$. Man ſetze, wie oben geſchehen iſt, $M = \frac{1}{c}$, ſo iſt

$$z = 1 + c(x + \frac{1}{2}Ax^2 + \frac{1}{3}Bx^3 + \frac{1}{4}Cx^4 + \text{etc.}).$$

Dieſe Reihe iſt mit der angenommenen Reihe für z identiſch, da beide für jeden Werth von x einerley z geben müſſen. Folglich iſt $A = c$; $B = \frac{1}{2}Ac$; $C = \frac{1}{3}Bc$; $D = \frac{1}{4}Cc$; $E = \frac{1}{5}Dc$, u. ſ. f. wo das Geſetz der Formation offenbar iſt. Es iſt alſo

$$z = 1 + cx + \frac{1}{1.2}c^2x^2 + \frac{1}{1.2.3}c^3x^3 + \frac{1}{1.2.3.4}c^4x^4 + \frac{1}{1.2.3.4.5}c^5x^5 + \text{etc.}$$

44. Man erhält daſſelbe, wenn man das Differential der für z angenommenen Reihe und die Reihe ſelbſt in die Differentialgleichung, $\partial z = cz\partial x$, ſetzt. Die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von x geben die Gleichungen zur Beſtimmung der unbekannten Coefficienten in jener Reihe.

Man kann auch in der Gleichung $\partial z = c(1 + y)\partial x$, oder $\partial z = c\partial x + cy\partial x$, den Werth von z durch Integration ſtückweiſe finden, und jeden Theil nach der Reihe in das Glied $cy\partial x$ ſetzen, welches durch Integration den folgenden Theil giebt. So iſt der erſte Theil von $y = cx$. Durch dieſen wird $cy\partial x = c^2x\partial x$, wovon das Integral iſt $\frac{1}{2}c^2x^2$, der zweyte Theil von y. S. Käſtners Analyſis des Unendlichen, 221. Das Verfahren iſt demjenigen ähnlich, welches Newton bey der Auflöſung endlicher oder differentieller Gleichungen zu gebrauchen pflegt. Es gewährt aber nicht die faßliche Überſicht wie das mit unbeſtimmten Coefficienten.

Cotes in ſeiner Harmonia mensurarum kehrt die Reihe $y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 +$ etc. $= x$ dadurch um, daß er ihre Potenzen berechnet, und diejenigen Factoren zu dieſen Potenzen ſucht, wodurch das Aggregat $= y$ wird. Dieſe Rechnung iſt unbequem und nicht befriedigend.

45. Da Differentiale von der Form $\frac{\partial z}{z}$ häufig vorkommen, ſo würde man auf die Logarithmen gerathen ſeyn, wenn auch Neper nicht ſie zur Abkürzung beſchwerlicher Multiplicationen und Diviſionen erſonnen hätte. Die Vergleichung des Integrals $(z - 1) - \frac{1}{2}(z-1)^2 + \frac{1}{3}(z-1)^3 -$ etc. mit der Binomialformel würde darauf geleitet haben, daß das Integral der Exponent x einer Potenz a^x ſeyn müſſe.

In der Analyſis ſind Logarithmen mehr als in der Arithmetik, wo ſie bloß Stellvertreter von Multiplicatoren und Diviſoren ſind. In jener ſind ſie Functionen einer veränderlichen Größe, die nach einer gewiſſen Form aus dieſer zuſammengeſetzt werden.

Differenzen der Logarithmen.

46. Man nehme die Zahlen z, $z+1$, $z+2$, $z+3$, etc. deren natürliche Logarithmen ſeyn x, x', x'', x''', etc. Die erſten Differenzen ſeyn Δx, $\Delta x'$, $\Delta x''$, etc. Die zweyten $\Delta^2 x$, $\Delta^2 x'$, etc. Die dritten $\Delta^3 x$, etc. Es iſt nun $\Delta x = \log. \frac{z+1}{z} =$ $\log. (1 + \frac{1}{z})$, alſo

$$\Delta x = \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} - \text{etc.}$$

$$\Delta x' = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{2(z+1)^2} + \text{etc.}$$

indem bey dem zweyten Gliede der erſten Differenzen die Zahl $z + 1$ ſtatt z kommt. Zieht man das vorhergehen-

de Differenzglied von dem folgenden ab, wie es immer geſchieht, ſo iſt

$$\Delta^2 x = -\frac{1}{z(z+1)} + \frac{2z+1}{2z^2(z+1)^2} - \text{etc.}$$

$$\Delta^2 x' = -\frac{1}{(z+1)(z+2)} + \frac{2z+3}{2(z+1)^2(z+2)^2} - \text{etc.}$$

Daraus iſt

$$\Delta^3 x = +\frac{2}{z(z+1)(z+2)} - \frac{6z^2+12z+4}{2z^2(z+1)^2(z+2)^2} + \text{etc.}$$

Noch iſt

$$\Delta^4 x = -\frac{6}{z(z+1)(z+2)(z+3)} + \text{etc.}$$

Die Rechnung mag man nach dieſem Muſter fortſetzen. Hier iſt es genug, daraus zu ſehen, wie die Differenzen abnehmen, bey größern Zahlen nahe umgekehrt wie die Potenzen von x, deren Exponenten die Ordnungszahlen der Differenzen ſind.

Auch ſieht man, daß die zweyten Differenzen negativ ſind, oder daß die erſten Differenzen abnehmen, wenn die Zahlen zunehmen.

47. Setzt man das Differential der Zahl unveränderlich, ſo iſt aus der Differentialgleichung, $\partial x = \frac{\partial z}{z}$, erſtlich $\partial^2 x = -\frac{\partial z^2}{z^2} = -z^{-2}\partial z^2$; ferner $\partial^3 x = +2z^{-3}\partial z^3$; $\partial^4 z = -2.3z^{-4}\partial z^4$; $\partial^5 z = +2.3.4z^{-5}\partial z^5$, u. ſ. f. Die Differentio-Differentialformeln für ein unveränderliches ∂x ſind im I. Th. S. 898. angegeben.

48. Da $\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z(z+1)}$ iſt, ſo iſt, für natürliche Logarithmen,

$$\Delta x = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z(z+1)} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} - \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{z+1} + \frac{z-1}{2z^2(z+1)} + \frac{1}{3z^3} - \text{etc.}$$

Es giebt alſo zwey Gränzen, zwiſchen welchen Δx liegt, nämlich $\frac{1}{z}$ und $\frac{1}{z+1}$, oder $\Delta x < \frac{1}{z}$, und $\Delta x > \frac{1}{z+1}$.

49. Der Logarithme des arithmetiſchen Mittels iſt größer als der Logarithme des geometriſchen.

Denn man nehme die zwey Zahlen $z-1$, und $z+1$, ſo iſt z ihr arithmetiſches Mittel, und $\sqrt{(z-1)(z+1)}$ ihr geometriſches. Da $z \pm 1 = z(1 \pm \frac{1}{z})$ iſt, ſo iſt

$$\log.(z+1) = x + \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} + \text{etc.}$$

und $$\log.(z-1) = x - \frac{1}{z} - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{3z^3} - \text{etc.}$$

$$\tfrac{1}{2}\log.(z+1)(z-1)^{1} = x - \frac{1}{2z^2} - \frac{1}{4z^4} - \text{etc.}$$

Es iſt nämlich das arithmetiſche Mittel größer als das geometriſche, ſ. Mittel.

50. Des Satzes (48.) hat ſich Neper bedient, um aus dem Logarithmen einer Zahl den einer nahe daran liegenden zu finden. Seine Berechnungsart beruht vorzüglich darauf. Auch Mercator hat dieſen Satz benutzt. Der Beweis kann hier nicht ſo gegeben werden, wie dieſe Mathematiker ihn geführt haben. Zur Ergänzung der Lehre von der geometriſchen Reihe, verdient der Satz aus der Natur derſelben hergeleitet zu werden.

51. Es ſey eine geometriſche Reihe,

$$r : er : e^2r : e^3r \ldots e^n r,$$

und eine damit verbundene arithmetiſche,

$$0,\ d,\ 2d,\ 3d \ldots nd.$$

Man ſetze den Unterſchied der beiden erſten Glieder der geometriſchen Reihe dem Unterſchiede zweyer nächſten der arithmetiſchen gleich, das iſt $er - r = d$, ſo iſt, wenn die Reihe eine zunehmende iſt,

$$nd < e^n r - r;\quad nd > \frac{e^n r - r}{e^n r}\, r.$$

Denn es iſt $e^n r - r = (e - 1)r + (e^2 - e)r + (e^3 - e^2)r \ldots (e^n - e^{n-1}) r$. Da dieſes eine zunehmende Reihe iſt, ſo iſt $n(e - 1)r < e^n r - r$, das iſt $nd < e^n r - r$.

Ferner iſt in dem entgegengeſetzten Theile der Reihe, $r - e^{-n} r = (1 - e^{-1}) r + (e^{-1} - e^{-2}) r + (e^{-2} - e^{-3}) r \ldots + (e^{-n+1} - e^{-n}) r$. Dieſe Reihe iſt eine abnehmende; alſo iſt $n(1 - e^{-1}) r > r - e^{-n} r$, oder $n(e - 1) r > e(r - e^{-n} r)$, das iſt,
$nd > \frac{e(e^n r - r)}{e^n r}\, r$, und noch mehr iſt
$nd > \frac{e^n r - r}{e^n r}\, r$.

52. Es ſey $e^m r$ noch ein Glied der Reihe, und $m < n$; es iſt

$$(n - m) d < \frac{e^n r - e^m r}{e^m r}\, r, \text{ und}$$

$$(n - m) d > \frac{e^n r - e^m r}{e^n r}\, r.$$

Denn aus (51.) iſt $(n - m) d < e^{n-m} r - r$, und $(n - m) d > \frac{e^{n-m} r - r}{e^{n-m} r}\, r$, woraus jene beiden Säze ſich unmittelbar ergeben.

Wenn e kleiner als die Einheit iſt, ſo braucht man nur die Exponenten m und n zu vertauſchen.

Das arithmetiſche Mittel beider Quotienten giebt den geſuchten logarithmiſchen Unterſchied deſto näher, je kleiner

derſelbe iſt. Oder man nehme zum Diviſor das arithmetiſche Mittel zwiſchen den Zahlen $e^{m}r$ und $e^{n}r$.

53. Exempel. Es iſt

$$\text{log. nat. } 100 = 4{,}60517\ 01860$$
$$\text{log. nat. } 101 = 4{,}61512\ 05168$$

Unterſchied $= 0{,}00995\ 03308$.

Ferner $\frac{101 - 100}{100} = 0{,}01$, und $\frac{101 - 100}{101}$ $= 0{,}0099009900$. Das arithmetiſche Mittel dieſer Quotienten, 0,00995 04950 zu log. 100 addirt, giebt 4,61512 06810, bis in die ſechſte Stelle mit log. 101 übereinſtimmig.

Dieſes Hülfsmittel war nur bey einem Syſtem anwendbar, worin der Unterſchied der beiden erſten Glieder der geometriſchen Reihe dem Unterſchiede der zugehörigen in der arithmetiſchen Reihe gleich geſetzt wird.

Logarithmotechnie.

54. Nun iſt es nöthig, Methoden zur leichtern Berechnung der Logarithmen zu ſuchen, welche man unter der Benennung, Logarithmotechnie, begreifen kann. Mercator nannte ſeine Schrift über die Berechnung der Logarithmen, Logarithmotechnia. Die Berechnung der künſtlichen Logarithmen gründet ſich auf die Berechnung der natürlichen, wegen des Moduls des Syſtems, der aus dem natürlichen Logarithmen der Baſis gefunden werden muß (34.). Es iſt daher im folgenden blos von den natürlichen Logarithmen die Frage.

55. Die Reihe (25.), welche den natürlichen Logarithmen durch die Zahl giebt, iſt nur brauchbar, wenn y kleiner als 1, das iſt, wenn die Zahl z kleiner als 2 iſt, weil für größere y die Reihe divergirt. Selbſt für y, die wenig kleiner als 1 ſind, convergirt die Reihe langſam. Man muß daher den Logarithmen einer Zahl aus andern Logarithmen, die ſich bequem hinlänglich weit berechnen laſſen, zuſammenſetzen. Die Addition und Subtraction

der Logarithmen giebt eine Multiplication und Diviſion der zugehörigen Größen.

Es iſt kaum nöthig zu bemerken, daß man nur die Logarithmen der Primzahlen zu ſuchen braucht, da die Logarithmen der zuſammengeſetzten Zahlen aus dieſen durch die Addition gefunden werden.

56. Die Logarithmen der erſtern kleinern Primzahlen, 2, 3, 5, 7, 11 findet man am leichteſten mittelbar durch die Logarithmen ſolcher Brüche, woraus ſie durch Multiplication und Diviſion hervorgebracht werden, dergleichen für die Primzahlen 2, 3, 5 ſind $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$. Dieſe Brüche müſſen aber der Einheit ſehr nahe kommen, um die Reihen für ihre Logarithmen möglichſt convergirend zu machen. Solche Brüche ſind $\frac{9}{10}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{81}{80}$, $\frac{121}{120}$, $\frac{50}{49}$. Bezeichnet man dieſe durch z, ſo iſt für dieſelben y nach der Reihe, $-\frac{1}{10}$, $+\frac{1}{10}$, $\frac{1}{80}$, $\frac{1}{120}$, $\frac{1}{49}$.

Hieraus ergiebt ſich zuerſt der $\log.\frac{3}{2}$, da $\frac{3}{2} = \frac{120}{80} = \frac{120}{121}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{81}{80}$; alſo $\log.\frac{3}{2} = 2\log.\frac{11}{10} + 2\log.\frac{10}{9} + \log.\frac{81}{80} - \log.\frac{121}{120}$. Ferner iſt $5 = \frac{80}{16} = \frac{80}{81}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{9}{4} = \frac{80}{81}\cdot\frac{3^4}{2^4}$, alſo $\log.5 = 4\log.\frac{3}{2} - \log.\frac{81}{80}$. Weiter iſt $2 = 5\cdot\frac{2}{5} = 5\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{4}{9} = 5\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$, folglich $\log.2 = \ldots$

$l.5 - l.\frac{10}{9} - 2\,l.\frac{3}{2}$. Nun iſt $\log. 3 = l.2 + l.\frac{3}{2}$. Da $7^2 = \frac{49}{50} \cdot 25 \cdot 2$ iſt, ſo iſt $\log. 7 = l.5 + \frac{1}{2} l.2 - \frac{1}{2} l.\frac{50}{49}$. Noch iſt $\log. 11 = l.\frac{11}{10} + l.2 + l.5$.

Aus den Logarithmen der Primzahlen 2, 3, 5 werden nun die Logarithmen von 4, 6, 8, 9, 10, 12 leicht gefunden. Es iſt

log. nat.	1	=	0,00000	00000
l.	2	=	0,69314	71805
l.	3	=	0,09861	22886
l.	4	=	1,38629	43611
l.	5	=	1,60943	79124
l.	6	=	1,79175	94692
l.	7	=	1,94591	01490
l.	8	=	2,07944	15416
l.	9	=	2,19722	45773
l.	10	=	2,30258	50929
l.	11	=	2,39789	52727
l.	12	=	2,48490	66497

Die folgenden Methoden geben eine ganz beſtimmte Art zu verfahren an.

57. Da aus (25. u. 38.) iſt

$$\text{log. nat.}(1+y) = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \text{etc.}$$

und

$$\text{log. nat.}(1-y) = -y - \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 - \text{etc.}$$

ſo iſt

$$\text{log. nat.}\frac{1+y}{1-y} = 2\left(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \tfrac{1}{7}y^7 + \text{etc.}\right)$$

und

$$\text{log. nat.}(1-y^2) = -2\left(\tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{4}y^4 + \tfrac{1}{6}y^6 + \text{etc.}\right).$$

Es iſt nämlich, wenn $1 + y = e^{\alpha}$; $1 - y = e^{-\beta}$ iſt, $\frac{1+y}{1-y} \; \frac{e^{\alpha}}{e^{-\beta}} = e^{\alpha+\beta}$, und der Logarithme dieſes Bruchs iſt die Summe der abſoluten Werthe der Exponenten von e oder der Logarithmen. Hingegen iſt $(1+y)(1-y) = e^{\alpha}.e^{-\beta} = e^{\alpha-\beta}$, und der Logarithme des Products iſt der Unterſchied der abſoluten Werthe.

58. Man ſetze die Zahl, deren Logarithme geſucht wird, $z = \frac{1+y}{1-y}$, ſo iſt $y = \frac{z-1}{z+1}$, und

$$\log z = 2(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \text{etc.}).$$

Die Reihe convergirt inzwiſchen nur langſam, wenn z über 10 groß iſt. Nach dieſer Formel iſt

$$\text{l. nat. } 2 = 2\left(\tfrac{1}{3} + \frac{1}{3.27} + \frac{1}{5.243} + \frac{1}{7.2187} + \text{etc.}\right).$$

$$\text{l. nat. } 3 = 2\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{5.32} + \frac{1}{7.128} + \text{etc.}\right).$$

Die zweyte Reihe convergirt ſchon viel weniger als die erſte.

59. Eine mehr convergirende Reihe zu erhalten, ſetze man $\frac{z}{z-1} = \frac{1+y}{1-y}$, wodurch der letztere Bruch ſich deſto mehr der Einheit nähert, je größer z iſt. Dieſe Annahme giebt $y = \frac{1}{2z-1}$. Es iſt nach derſelben

$$\text{l. nat. } z = \log.(z-1) + 2(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \text{etc.}).$$

Die Formel ſetzt voraus, daß der log.$(z-1)$ ſchon bekannt ſey. Dieſes iſt immer der Fall, wenn die Logarithmen der Primzahlen nach der Ordnung geſucht werden.

Exempel.

$$\text{l. nat. } 5 = \text{l. } 4 + 2\left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{729} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{59049} + \text{etc.}\right).$$

$$\text{l. nat. } 7 = \text{l. } 6 + 2\left(\tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{2197} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{371293} + \text{etc.}\right).$$

60. Man ſetze $y = \frac{1}{z}$, ſo iſt l. $\frac{z+1}{z} = \log.(1+y)$, und

$$\log \text{ nat. } z = \log.(z+1) - y + \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{4}y^4 - \text{etc.}$$

Oder auch,

$$\log. \text{ nat. } z = \log.(z-1) + y + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{4}y^4 + \text{etc.}$$

61. Es bleibe $y = \frac{1}{z}$, ſo giebt die Reihe für log. nat. $(1 - y^2)$ dieſe Formel,

$$\log. \text{ nat. } z = \tfrac{1}{2}\log.(z-1) + \tfrac{1}{2}\log.(z+1) + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{4z^4} + \frac{1}{6z^6} + \frac{1}{8z^8} + \text{etc.}$$

Denn es iſt l. $\frac{z^2-1}{z^2} = -2\left(\tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{4}y^4 + \text{etc.}\right)$,

oder l. $\frac{z^2}{z^2-1} = 2\left(\tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{4}y^4 + \text{etc.}\right)$.

Addirt man auf der einen Seite den log. $(z^2 - 1)$, auf der andern die dieſem gleichgültige Summe, log. $(z-1)$ + log. $(z+1)$, und halbirt alle Glieder der Gleichung, ſo entſteht die angegebene Formel.

62. Man ſetze $\frac{zz}{zz-1} = \frac{1+y}{1-y}$, ſo iſt $y = \frac{1}{2zz-1}$, und es iſt

$$\log. \text{ nat. } z = \tfrac{1}{2}\log.(z-1) + \tfrac{1}{2}\log.(z+1) + y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \text{etc.}$$

Dieſe Reihe convergirt noch ſchneller als die vorher-gehende.

Da das arithmetiſche Mittel zwiſchen zwey um die Einheit unterſchiedenen Zahlen von dem geometriſchen Mittel deſto weniger verſchieden iſt, je größer die Zahlen ſind, ſo ſieht man, woher die Ergänzung des log. z zu $\frac{1}{2}\text{l.}(z-1)+\frac{1}{2}\text{l.}(z+1)$, oder zu dem Logarithmen des geometriſchen Mittels ſo klein wird, wenn z auch nur mäßig groß iſt. Es iſt für

z	11;	13;	17;	19;	23.
y	$\frac{1}{241}$;	$\frac{1}{337}$;	$\frac{1}{577}$;	$\frac{1}{721}$;	$\frac{1}{1057}$.

63. Man ſetze $\frac{z^n+d}{z^n}=\frac{1+y}{1-y}$, ſo iſt

$$y=\frac{d}{2z^n+d},$$ und

$$\text{l. nat.}(z^n+d)-\text{l. nat.}\,z^n=2\left(y+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{5}y^5+\text{etc.}\right).$$

Es ſey $\frac{z^n}{z^n-d}=\frac{1+y}{1-y}$, ſo iſt $y=\frac{d}{2z^n-d}$,

und

$$\text{l. nat. } z^n-\text{l. nat.}(z^n-d)=2\left(y+\tfrac{1}{3}y^3+\tfrac{1}{5}y^5+\text{etc.}\right).$$

Durch dieſe Formeln findet man, wenn log. $(z^n\pm d)$ bekannt iſt, den log. z^n, und daraus log. z, oder aus log. z^n den log. $(z^n\pm d)$.

Exempel. Man nehme $n=3$, ſo werden, wenn die Logarithmen der Primzahlen bis 11 gefunden ſind, die von 13, 17, 19, 23, durch folgende Annahmen von d gefunden, wo + d auf die erſtere Formel, — d auf die zweyte ſich beziehen.

$z=13$; $d=+3$; $y=\frac{3}{4397}$.
$z=17$; $d=+1$; $y=\frac{1}{9827}$.
$z=19$; $d=+1$; $y=\frac{1}{13719}$.
$z=23$; $d=+1$; $y=\frac{1}{24335}$.

Die Werthe von $z^3 \pm d$ ſind nach ihrer Folge, 2200; 4914; 6860; 12167, von welchen die Logarithmen alle durch die nach der Ordnung ſchon gefundenen Logarithmen bekannt ſind.

64. Anſtatt z^n ſetze man irgend eine Zahl N, und $y = \frac{d}{2N + d}$, ſo iſt

$$\log.\,nat.\,(N+d) = \log N + 2\left(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + etc.\right).$$

Wird d negativ genommen, ſo wird es y auch. Dieſe Formel dient bequem den Logarithmen einer Zahl aus dem Logarithmen einer jeden andern herzuleiten. Die Formel (59.) iſt ein beſonderer Fall davon.

65. Es ſey $mz = n \pm 1 = n\left(1 \pm \frac{1}{n}\right)$, ſo iſt

$$\log.\,nat.\,z = \log.\,n - \log.\,m \pm \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - etc.\right).$$

Nach dieſer Formel muß der Multiplicator m ſo gewählt werden, daß der Logarithme deſſelben, ſo wie der von n, bekannt ſey. Zur leichtern Berechnung der Reihe muß die Zahl $n = mz \mp 1$ ſich auf einige Nullen endigen, alſo das Product mz entweder auf einige Neuner, oder auf 1 mit einigen vorhergehenden Nullen. Nachdem das eine oder andere beſtimmt wird, werden die Ziffern des Multiplicators m von den Einern an nach einander gefunden. Die Anzahl der Ziffern ſelbſt iſt willkürlich.

Z. E. Es ſey die gegebene Zahl $z = 17207$, eine Primzahl. Man wird gleich finden, daß dieſe Zahl durch 7, oder 57, oder 657, oder 5657 u. ſ. w. multiplicirt werden muß, wenn das Product auf einen, zwey, drey, vier Neuner ſich endigen ſoll. Man nehme $m = 657 = 9 \times 73$. Das Product mz iſt $11304999 = n - 1$, und $n = 11305000 = 5 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 1000$. Daher iſt $\log.\,nat.\,17207 = l.\,5 + l.\,7 + l.\,17 + l.\,19$

$+ 3\,l.\,10 - l.\,9 - l.\,73 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \text{etc.}\right),$

wo $\frac{1}{n}$ ſchon kleiner als 10^{-8} iſt.

Soll das Product mz ſich auf 1 mit drey Nullen vorher endigen, ſo muß $m = 4343$ ſeyn. Es iſt $mz = 74730001$, alſo $n = 74730000$, wo 7473 $3.47.53$ iſt. Auch iſt $m = 43.101$. Alſo iſt log. nat. $17207 = l.\,3 + l.\,47 + l.\,53 + 4\,l.\,10 - l.\,43 - l.\,101 + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \text{etc.}\right).$

Dieſes Verfahren wird man gut benutzen können bey größern Zahlen, deren Logarithmen man genau erhalten will, ohne ſich auf die Differenzen der ſchon berechneten zu verlaſſen.

Auch bey den Briggiſchen Logarithmen läßt es ſich anbringen. Man braucht nur zu der Ergänzung den Modulus als Factor zuzuſetzen.

66. So wie in (62.) der Logarithme von $\frac{z^2}{z^2-1}$ durch eine convergirende Reihe ausgedruckt, und daraus log. z hergeleitet ward, ſo nehme man den Bruch $\frac{(z+2)(z-1)^2}{(z-2)(z+1)^2}$, der auch der Einheit für größere z nahe kommt, und deſſen Logarithme alſo auch durch eine convergirende Reihe erhalten wird. Man entwickele Zähler und Nenner, ſo erhält der Bruch die Form $\frac{z^3-3z+2}{z^3-3z-2}$. Zur Abkürzung ſetze man $z^3 - 3z = u$, ſo iſt der Bruch $= \frac{u+2}{u-2} = \left(1+\frac{2}{u}\right) : \left(1-\frac{2}{u}\right)$, und log. nat. $\frac{u+2}{u-2} = 2\left(\frac{2}{u} + \frac{8}{3u^3} + \frac{32}{5u^5} + \frac{128}{7u^7} + \text{etc.}\right)$

Das iſt

$$\log.\,\text{nat.}\,(z+2) = l.\,(z-2) + 2\,l.\,(z+1)$$
$$-2\,l.\,(z-1) + 2\left(\frac{2}{u} + \frac{8}{3u^3} + \frac{32}{5u^5} + \text{etc.}\right).$$

67. Demnach iſt der Logarithme jeder Zahl durch die Logarithmen dreyer vorhergehenden Zahlen und eine Ergänzung gegeben, welche immer kleiner wird, je größer die Zahl iſt. Man nehme zuerſt für z die Werthe 3, 4, 7, ſo hat u die Werthe 18, 52, 322, oder $\frac{2}{u}$ die Werthe $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{26}$, $\frac{1}{161}$. Die Ergänzungen bezeichne man durch A, B, C, ſo iſt

$$l.\,5 = 2\,l.\,2 + A.$$
$$l.\,6 = l.\,2 + 2\,l.\,5 - 2\,l.\,3 + B.$$
$$l.\,9 = l.\,5 + 2\,l.\,8 - 2\,l.\,6 + C.$$

Durch gehörige Reductionen der Logarithmen, werden dieſe Gleichungen:

$$l.\,5 = 2\,l.\,2 + A.$$
$$3\,l.\,3 = 2\,l.\,5 + B.$$
$$4\,l.\,3 = l.\,5 + 4\,l.\,2 + C.$$

Durch die Combination dieſer Gleichungen wird erhalten:

$$2\,l.\,2 = 5A + 4B - 3C.$$
$$l.\,3 = 4A + 3B - 2C.$$
$$l.\,5 = 6A + 4B - 3C.$$

Dieſe Logarithmen dienen zur Grundlage für alle folgenden.

Gebrauch der logarithmiſchen Tafeln.

68. Wir haben zweyerley berechnete logarithmiſche Tafeln, erſtlich, welches die gewöhnlichſten ſind, für die Baſis = 10, nämlich die Briggiſchen oder gemeinen Logarithmen; zweytens die für logarithmiſche Functionen nöthigen, deren Baſis = e = 2,718281828.. (30.) oder die natürlichen Logarithmen.

69. In dem Briggiſchen Syſtem liegt die geometriſche Reihe, 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : etc. zum Grunde, deren Logarithmen ſind, 0, 1, 2, 3, 4, etc. Die Logarithmen aller übrigen ganzen Zahlen und rationalen Brüche ſind Irrationalgrößen, ſo wie die Zahlen zu rationalen Logarithmen, außer denen aus der Reihe, 1, 2, 3, 4, etc. irrationale ſind.

70. Ein Logarithme zerfällt in zwey Theile, die ganze Zahl oder 0, und den zugeſetzten Decimalbruch. Jene heißt die Charakteriſtik, dieſer die Mantiſſa (Zugabe) Die erſtere zeigt an, nach welchem Gliede der Hauptreihe eine Zahl zunächſt folgt, wenn nämlich die Glieder derſelben durch ihre Logarithmen gezählt werden. Sie enthält in dem Briggiſchen Syſtem ſo viele Einheiten als die Zahl Ziffern vor der Stelle der Einer hat. Der andere Theil eines Logarithmen, die Mantiſſa, giebt nahe an, das wievielſte Glied unter den eingeſchalteten Gliedern die zugehörige Zahl iſt. In den gewöhnlichen Tafeln beſteht die Mantiſſa aus 7 Ziffern. Man ſtelle ſich ſtatt je eines Gliedes der geometriſchen Reihe zehn Millionen vor, ſo iſt die Mantiſſa als ganze Zahl betrachtet, die Stellenzahl der zu dem Logarithmen gehörigen Zahl nach dem nächſt vorher gehenden Gliede der Hauptreihe beynahe. Z. B. Es iſt log. 4237 = 3,6271097. Dieſes heißt, 4237 iſt das 6271097te Glied nach dem dritten Gliede, oder nach 1000. Eigentlich fällt 4237 noch über jenes Glied hinaus. Auch iſt log. 4235 = 3 6269047. Hier aber iſt 4235 ein weniges kleiner als das 6269047te Glied. Die letzte Ziffer der Mantiſſa giebt den Logarithmen zu klein, wenn das weggelaſſene unter einem halben Hundertmilliontheilchen beträgt, aber denſelben zu groß, wenn nach den 7 erſten Decimalziffern mehr als ein halbes folgt. Der Fehler wird immer kleiner als ein halbes ſolches Theilchen gehalten, wenigſtens in den genauen Tafeln.

Oder: die Charakteriſtik mit der Mantiſſa zuſammen, als eine ganze Zahl, iſt nahe der Exponent der Potenz, worauf die zehnmillionſte Wurzel aus 10 zu erheben iſt,

um die zu dem Logarithmen gehörige Zahl zu erhalten. So iſt 4237 = $10^{\frac{36270730}{10000000}}$ nächſtens. Setzt man ſtatt der Endziffer 7 nur die 8, ſo wird die Potenz ſchon größer als 4237.

71. Von allen Zahlen, die in den Ziffern übereinkommen, und nur in der Stelle der Einheit verſchieden ſind, haben die Logarithmen dieſelbe Mantiſſa. Denn dieſe Zahlen entſtehen aus einander durch die Multiplication oder Diviſion mit einer Potenz der 10. Dadurch wird blos die Charakteriſtik verändert. Dieſes giebt dem Briggiſchen Syſtem einen entſcheidenden Vorzug zum arithmetiſchen Gebrauche.

72. In allen Tafeln, die bis zu der Zahl 100000 gehen, iſt es durch die engliſchen Tafeln durchgehends üblich, die Logarithmen nicht wie die Zeilen in einem Buche auf einander folgen zu laſſen, ſondern, zur Erſparung des Raums, wie Wörter in den Zeilen. Dabey werden die drey erſten Ziffern der Mantiſſa von den vier folgenden abgeſondert, und voran geſtellt. Es trifft ſich hier aber beynahe immer, daß die letzten Logarithmen eines Abſchnittes von Zeilen die drey erſten Ziffern aus dem folgenden Abſchnitte nehmen müſſen. Dieſes kann leicht einen Fehlgriff verurſachen. Darum hat Vega in ſeinen Ausgaben der logarithmiſchen Tafeln (außer der erſten von 1783) diejenigen Logarithmen, bey welchen man die drey erſten Ziffern aus dem folgenden Abſchnitte zu nehmen hat, durch ein Sternchen ausgezeichnet. In der franzöſiſchen Ausgabe von Callet ſind ſie, welches noch beſſer iſt, um den Raum einer Zeile herunter gerückt. — Die Charakteriſtik wird nicht zugeſetzt, weil dieſe von dem Rechner ſelbſt allemahl beſtimmt werden muß. — Bey dem Aufſchlagen der Logarithmen ſucht man die vier erſten Ziffern einer fünfziffrigen Zahl in der erſten Spalte unter der Rubrik, Zahl, die fünfte in einem der oberſten Fächer, fährt von dieſer herabwärts bis in die zu jenen vier Ziffern gehörige Zeile, ſo findet man die vier letzten Ziffern der Mantiſſa, wozu die drey erſten auf die eben erklärte Art

genommen werden. John Newton hat in ſeiner Trigonometria Britannica, Londini, 1658, dieſe Einrichtung zuerſt getroffen.

73. Um für 6 oder 7ziffrige Zahlen die Logarithmen zu erhalten, ſind noch Täfelchen der Proportionaltheile beygefügt, welche für die ſechſte und ſiebente Ziffer den gehörigen Proportionaltheil geben. Z. B. für 289567 den Logarithmen zu finden, betrachte man 7 als einen Bruch 0, 7, welcher der Zahl 28956 angehängt wird. Der Unterſchied der Logarithmen von 28956 und 28957 iſt 150, in Theilen der Mantiſſa, davon ſind $\frac{7}{10}$ gleich 105, welche in dem Täfelchen bey 7 angezeichnet ſind, und dem Logarithmen von 28956 beygefügt werden. Wäre die Zahl 2895674, ſo ſchneide man die 74 ab, und nehme ſowohl den Proportionaltheil für 7 als für 4, von dem letztern aber den zehnten Theil.

Dieſes Verfahren beruht darauf, daß die Unterſchiede mehrerer auf einander folgenden Logarithmen in der Tafel ſich gleich, oder nur um 1 in der Endziffer verſchieden ſind, alſo gleich den Zahlen arithmetiſch fortgehen, ſo fern auf die weggelaſſenen niedrigern Decimalziffern keine Rückſicht genommen wird.

74. Bey Logarithmen mit mehrern Decimalſtellen reicht dieſe einfache Einſchaltung nicht zu. Man kann ſich hier der Formel (64.) bequem bedienen, in welcher N eine ganze Zahl von fünf Ziffern iſt, welche bleibt, nachdem die übrigen als Decimalbrüche abgeſchnitten ſind, das Komma oder das Einerzeichen mag urſprünglich ſtehen, wo es auch ſeyn. Da nun d gegen N ſehr klein iſt, ſo kann man ohne einen merklichen Fehler $y = \frac{d}{2N}$ ſetzen, wodurch wird

$$\log.\,\text{nat.}\,(N + d) = \log.\,N + \frac{d}{N} + \frac{d^3}{12\,N^3}.$$

Die übrigen Glieder ſind zu klein, als daß ſie in Betrachtung kommen könnten. Dieſer muß nun noch mit dem Modulus der Briggiſchen Logarithmen, nämlich

0,43429448 . . . multiplicirt werden, um die briggiſchen zu erhalten. Dadurch wird die Formel

$$\log.(N + d) = \log. N + M\left(\frac{d}{N} + \frac{d^3}{12\,N^3}\right).$$

75. Exempel. Zu der Zahl 10542 482375 den Logarithmen zu finden, bis auf die zehnte Decimalſtelle. — Hier iſt N = 10542; d = 0,482375; $\frac{d}{N}$ = 0,00004 575744, wovon der Cubus kleiner iſt als 125×10^{15}, alſo nicht in Rechnung kommen kann. Es iſt nun M. $\frac{d}{N}$ = 0,00001 98722. Ferner iſt

$$\begin{array}{rl} \log.\ 10542 & = 4,0229230119 \\ & 198722 \\ \hline \log.\ 10542,482375 & = 4,0229428841 \end{array}$$

In der Einleitung zu Vega's vollſtändiger Sammlung logarithmiſcher Tafeln iſt dieſes Exempel durch die erſten und zweyten Differenzen berechnet. Die beiden letzten Ziffern ſind daſelbſt 37 anſtatt 41.

76. Leichter mag man den Werth von M. $\frac{d}{N}$ durch Logarithmen finden. Es iſt log. M = 9,6377843 — 10. Zum öftern Gebrauch hat man ſich eine Tafel der Vielfachen von M zu verfertigen.

77. Exempel. Den Logarithmen der Zahl 10097 38504923 zu finden. — Hier iſt N = 10097; d = 0,38504923. Nun iſt

$$\begin{array}{rl} \log. M & = 9,6377843 - 10 \\ \log.\ d & = 9,5855163 - 10 \\ \text{Subtr.}\ \log\ N & = 5,0041924 \\ \hline \log. M.d : N & = 4,2191082 - 10. \end{array}$$

$$\frac{M.d}{N} = 0,0000165618.$$

Zur Berechnung dieſer Zahl ſind die gewöhnlichen Logarithmen hinlänglich. Es iſt nun

$$\begin{aligned} \log. N &= 4{,}0041923563 \\ &\phantom{= 4{,}0041}\underline{165618} \\ \log. (N + d) &= 4{,}0042089181 \end{aligned}$$

Bey Vega, a. a. O. ſind die beiden letzten Ziffern 78.

78. Durch die Differenzen der in den Tafeln befindlichen Logarithmen wird die Einſchaltung folgendermaßen bewerkſtelligt. Es ſeyn $N - 1$; N; $N + 1$ drey auf einander folgende ganze Zahlen; ihre Logarithmen ſeyn $A - \alpha$; A; $A + \beta$. Es genügt zur Einſchaltung an drey gegebenen Zahlen, weil auch in den größern logarithmiſchen Tafeln die dritten Differenzen, ſelbſt in dem Anfange der Claſſe der Zehntauſende höchſtens nur ein einziges Zehntauſendmilliontheilchen betragen. In der Formel, die in dem Artikel, Einſchalten, 6, angegeben iſt, iſt die Stelle des geſuchten Gliedes von dem Anfangsgliede an gerechnet, dagegen es hier bequemer iſt, ſie von dem mittlern Gliede an zu rechnen. Die Formel bleibt ihrer Geſtalt nach, nur die Werthe der Coefficienten werden geändert. Es ſey die Zahl, zu welcher der Logarithme geſucht wird, $N + u$, wo u auch negativ ſeyn mag; der zugehörige Logarithme $= A + y$. Betrachtet man die Logarithmen, ſo weit ſie in den Tafeln ſtehen, als Glieder einer arithmetiſchen Reihe der zweyten Ordnung, deren Stellen durch ihre zugehörigen Zahlen angegeben werden, ſo iſt

$$y = au + \tfrac{1}{2} bu (1 - u).$$

Für $u = +1$ iſt $y = \beta$, alſo $a = \beta$. Für $u = -1$ iſt $y = -\alpha$, alſo $-\alpha = -a - b$, und $b = \alpha - \beta$. Folglich iſt

$$\log. (N + u) - \log. N = \beta u + \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) u (1 - u).$$

In (46.) iſt bemerkt, daß β kleiner als α iſt.

79. Wenn die vorgegebene Zahl näher an die nächſt folgende ganze Zahl als an die vorhergehende fällt, ſo nehme man u negativ, und es iſt

$$\log. N - \log. (N - u) = \alpha u - \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta) u (1 - u).$$

Dieſe Formel erhält nämlich für u = + 1 den Werth α, für u = — 1 den Werth — β, wie es ſeyn muß.

80. Wenn nun eine Zahl von mehr als fünf Ziffern gegeben wird, ſo nehme man die erſten fünf Ziffern für eine ganze Zahl N, die übrigen für einen Decimalbruch u. Dann nehme man die Unterſchiede des Logarithmen zu N von dem nächſt vorhergehenden und folgenden in den Tafeln, welche α und β ſind, und verfahre nach der erſtern Formel. Oder man nehme die in den erſten fünf Ziffern nächſt größere Zahl für N, ziehe die gegebene Zahl davon ab, und ſetze den Reſt = u, verfahre nun nach der zweyten Formel. Der gefundene Unterſchied der Logarithmen wird nun von log. N abgezogen, da derſelbe nach der erſten Formel addirt wird.

81. Exempel. Zu der Zahl 10542 482375 den Logarithmen zu finden. Aus den großen Tafeln iſt $\alpha = \overset{-10}{411986}$; $\beta = \overset{-10}{411946}$; $\alpha - \beta = \overset{-10}{40}$; $u = 0{,}482375$. Die Ziffern über den Endziffern zeigen den Decimalwerth derſelben an. Nun iſt

$\beta u = \overset{-11}{1987124}$; $\frac{1}{2}(\alpha - \beta)\, u\, (1 - u) = \overset{-11}{49}$.

Alſo iſt

log. 10542	=	4,02292 30119
erſter Proportionaltheil	=	1 98712
zweyter „ „	=	5
log. 10542,482375	=	4,02294 28836

Der Unterſchied von der Rechnung in (75.) rührt daher, daß die gegenwärtige nur eine Annäherung iſt, da die Logarithmen in dem Bezirke von 10541 bis 10543 als Glieder einer arithmetiſchen Reihe der zweyten Ordnung angeſehen werden.

82. Der Factor $u(1-u)$ iſt am größten, wenn $u = 1 - u$, das iſt, $u = \frac{1}{2}$ iſt (Größtes und Kleinſtes, 26.). Daher iſt der größte Werth des Products $\frac{1}{2} u (1-u) = \frac{1}{8}$. Iſt nun $\alpha - \beta$ kleiner als 8, ſo iſt der zweyte Proportionaltheil kleiner als 10^{-10}, und hat nur höchſtens auf die 11te Decimalſtelle Einfluß. Die-

ſes ereignet ſich ſchon bey den Logarithmen, die zu den Zahlen um 25000 gehören.

83. Wenn die vorgegebene Zahl mehr als zehn Ziffern enthält, ſo haben die eilfte und die noch folgenden Ziffern kaum einen Einfluß auf die Mantiſſa in der zehnten Stelle, ſondern erſt weiter hin, eben ſo wie der Logarithme einer Zahl von mehr als ſieben Ziffern, wenn er aus den gewöhnlichen Tafeln genommen wird, von dem Logarithmen der erſten ſieben Ziffern kaum in der ſiebenten Decimalſtelle abweicht.

84. Zu einem gegebenen Logarithmen die zugehörige Zahl zu finden, verfährt man auf umgekehrte Art. Erſtlich iſt aus (74.)

$$\frac{N}{M}(\log.(N+u) - \log. N) = u,$$

völlig genau, ſo weit es hier erforderlich iſt. Anſtatt des Diviſors M hat man deſſen umgekehrtes, die Zahl 2 30258509 ... zu nehmen (36.). Bey dieſer und allen Näherungsrechnungen hat man ſich der abgekürzten Multiplication und Diviſion zu bedienen, die in dem Artikel, Multiplication, gewieſen wird.

Da der Unterſchied u nur bis auf die fünfte Stelle geſucht werden kann, ſo ſind die gewöhnlichen Logarithmen völlig hinlänglich denſelben anzugeben. Es iſt

$$\log.\ \text{Brigg.}\ \frac{1}{M} = 0{,}3622156.$$

85. Vermittelſt der Differenzen kann die Zahl zu einem vorgegebenen Logarithmen meiſtens noch leichter gefunden werden. Aus der Formel in (78.) iſt

$$\frac{\text{Log.}(N+u) - \log N}{\beta + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)(1-u)} = u.$$

Um den zweyten Theil des Diviſors zu erhalten, ſuche man die beyden erſten Ziffern des Unterſchiedes u durch die

Formel $\frac{\text{Log. } (N + u) - \text{log. } N}{\beta}$,

oder $\frac{\text{Log. } (N + u) - \text{log. } N}{\text{log. } (N + 1) - \text{log. } N}$,

und nehme dann das Product aus $\frac{1}{2}$ $(\alpha - \beta)$ in die Ergänzung dieſes Bruches zur 1 noch zu β in dem Diviſor.

86. Der Logarithme eines eigentlichen Bruches iſt negativ, wie oben (12.) gezeigt iſt. So iſt

$$\text{log. } \frac{17}{83} = 1{,}2304489 - 1{,}9190781$$

$= -0{,}6886292$. Der Bruch fällt zwiſchen die Glieder 1 und $\frac{1}{10}$ der Grundreihe, und iſt von 10 Millionen Glieder bis zu dem $\frac{1}{10}$ das 6886292te.

87. Bequemer ſetzt man zu dem Logarithmen des Zählers einige Einer zu, es ſeyn 5, und zieht nun den Logarithmen des Nenners ab, fügt aber dem Unterſchiede die zugeſetzten Einer ſubtractiv bey, wie folget.

$$\begin{aligned} \text{log. } 17 &= 6{,}2304489 - 5 \\ \text{l. } 83 &= 1{,}9190781 \\ \hline \text{l. } \frac{17}{83} &= 4{,}3113708 - 5. \end{aligned}$$

Dieſer Logarithme gehört zu einem Decimalbruche, deſſen Zähler die Zahl zu dem Logarithmen 4 3113708, der Nenner 100000 iſt. Der Zähler iſt ein weniges kleiner als 20482, wie man auch durch die Diviſion findet. Auf dieſe Art verwandelt man immer die Logarithmen eigentlicher Brüche in Logarithmen von Decimalbrüchen, ſo wie man meiſtens die gemeinen Brüche in Decimalbrüche umſetzt.

88. Der Gleichförmigkeit wegen ſetzt man dem Logarithmen des Dividendus immer 10 zu, und zieht dieſe 10 auch von dem Logarithmen des Zählers des Decimal-

bruches ab. Gewöhnlich aber unterläßt man die Bezeichnung, weil man immer weiß, ob ein Logarithme zu einem eigentlichen oder uneigentlichen Bruche gehört. Auf dieſe Art iſt

l. 2,0482 = 0,3113724
l. 0,20482 = 9,3113724
l. 0,020482 = 8,3113724
l. 0,0020482 = 7,3113724
u. ſ. w.

Man ſieht, daß die erſte bedeutende Ziffer des Decimalbruches in der ſo vielten Stelle eintritt, als der Unterſchied der Charakteriſtik von 10 Einheiten hat.

89. Es iſt befremdend, daß Vega dieſe Art die Logarithmen der eigentlichen Brüche anzugeben, nicht lehrt, ſelbſt nicht in ſeiner vollſtändigen Sammlung, da ſie doch längſt allgemein üblich iſt, auch in allen trigonometriſchen Rechnungen vorkommt, wenn der Halbmeſſer des Kreiſes zur Einheit genommen wird. Er erklärt nur die hier zuerſt vorgetragene Bezeichnungsart, und nennt ſolche Logarithmen halbpoſitive. Käſtner konnte ſich auch an die bequemere Bezeichnungsart nicht gewöhnen. Segner (Anfangsgründe der Arithmetik ꝛc. S. 152.) nahm blos die Charakteriſtik negativ, auf folgende Art, log. 0,57932 = — 1,7629185, welches aber eine ſchlimme Zweydeutigkeit macht, weil man das Vorzeichen am natürlichſten auf den ganzen Logarithmen beziehen wird.

90. Wenn ein Bruch auf eine Potenz erhoben wird, ſo muß dieſes ſowohl mit dem Zähler als Nenner geſchehen, wie bey der Multiplication von Brüchen in einander die Zähler in einander multiplicirt werden, und eben ſo die Nenner. Daher muß auch der Logarithme des Zählers ſo wie des Nenners, alſo auch die ſubtractiven 10 mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt werden. Man wirft aber von dem Vielfachen der Charakteriſtik und der ſubtractiven 10 ſo viele Zehner weg, als ſich thun läßt.

Bey der Ausziehung einer Wurzel aus einem Bruche wird dieſelbe aus Zähler und Nenner gezogen. Alſo wird

der Logarithme des einen wie des andern durch den Exponenten der Wurzel dividirt. Um die ſubtractiven 10 in dem Logarithmen eines Decimalbruchs zu behalten, ſetzt man ſowohl in der Charakteriſtik als in dem Logarithmen des Nenners ſo viele 10 zu, daß der letztere ein Vielfaches des Exponenten werde.

Z. B.

	l 0,3	=	9,5228787
doppeltes	l 0,09	=	9,0457574
dreyfaches	l 0,027	=	8,5686361
vierfaches	l 0,0081	=	8,0915148
fünffaches	l 0,00243	=	7,6143935

u. ſ. f.

	l 0,003	=	7,5228787
Hälfte.	l 0,057..	=	8,7614393
Drittheil.	l 0,149..	=	9,1742929
Viertheil.	l 0,240..	=	9,3807197

u. ſ. f.

Zu einem Beyſpiele der logarithmiſchen Bruchrechnung dient das in 77. gegebene.

91. Bey den Berechnungen zuſammen geſetzter Intereſſen, der Leibrenten, Erſparungscaſſen u. dgl. thun die Logarithmen ſehr weſentliche Dienſte. Die Formeln dazu ſind in dem Artikel, geometriſche Reihe, 13. ff. gegeben.

I. Es werde der Werth eines Capitals a nach 20 Jahren geſucht, wenn der Zinsfuß 5 P. C. iſt. Dieſer iſt

$$= \left(\frac{21}{20}\right)^{20} a = (1,05)^{20}\, a.$$ Es iſt

$$\log.\ 1,05 = 0,0211893$$
$$20\text{faches} = 0,4237860$$

Der Werth iſt 2,653298 a; oder es muß das gegenwärtige Capital a mit der Zahl 2,653298 multiplicirt werden.

II. Man ſucht die Zeit, nach welcher der künftige Werth das Dreyfache des gegenwärtigen iſt. Hier iſt $(1,05)^n = 3$, und n die geſuchte Zeit. Es iſt

$n \log. 1{,}05 = \log. 3$, u. $n = \frac{\log. 3}{\log. 1{,}05} = \frac{0{,}4771212}{0{,}0211893}$
$= 22{,}5171$ Jahre.

III. Eine Schuld a ſoll durch eine jährliche Zahlung b, mit Einſchluß der Zinſen in 12 Jahren abgetragen ſeyn, wie verhalten ſich a und b gegen einander, den Zinsfuß zu 4 P. C. genommen? Hier iſt a. a. O. (17.) der Quotient $\frac{a}{b} = 25 - \left(\frac{25}{26}\right)^{12} \cdot 25$. Es iſt

log. 25	=	1,3979400
log. 26	=	1,4149733
l. (25 : 26)	=	9,9829667 — 10
zwölff.	=	119,7956004 — 120
oder	=	9,7956004 — 10
zu der Zahl	=	0,624598.

Alſo $\frac{a}{b} = 0{,}375402 \times 25 = 9{,}38505$.

Dieſe Zahl iſt der baare Werth einer Jahrrente 1 auf 12 Jahre Eine Rente auf beſtimmte Jahre iſt nichts anders als der jährliche Abtrag einer Schuld mit Einſchluß der ſchuldigen Zinſen. Es iſt $a = 9{,}38505 \times b$.

Umgekehrt iſt $b = \frac{a}{9{,}38505} = 0{,}1065524\,a$. Es iſt nämlich log. $9{,}38505 = 0{,}9724367$. Das arithmetiſche Complement, $9{,}0275633 - 10$, iſt der Logarithmus von $\frac{1}{9{,}38505}$.

In Tetens Einleitung zur Berechnung der Leibrenten, Tab. III. p. 543. iſt der Werth von $\frac{a}{b} = 9{,}3850737625$ angegeben. Die Multiplication des Logarithmen mit 12 macht die beiden letzten Ziffern des hier nöthigen Log-

arithmen unſicher. Die Multiplication mit 25 vergrößert den daher entſtehenden Fehler.

Wie die Logarithmen ſehr großer Zahlen, oder dieſe aus jenen gefunden werden.

92. In Sherwin's mathematical tables. p. 36—39, iſt eine von Sharp berechnete Tafel der Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100, und aller Primzahlen unter 1100 bis zu 61 Decimalſtellen enthalten. Dieſer iſt noch p. 40 und 64 eine Tafel der Logarithmen der Zahlen von 999980 bis 1000020 auf eben ſo viele Stellen beygefügt. Der Gebrauch dieſer Tafeln iſt, zu jeder Zahl den Logarithmen, und zu jedem Logarithmen die zugehörige Zahl bis auf die 61ſte Stelle der Ziffern zu finden. Sie dienen in der That mehr als Beweiſe von der unbegreiflichen Beharrlichkeit des Rechners, und zu zeigen, wie ſich die Logarithmen von merkwürdigen Irrationalzahlen, dergleichen der Umfang des Kreiſes oder der Modulus des briggiſchen Syſtems iſt, ungemein weit finden laſſen, als daß man ihrer zur Anwendung bedürfte.*) In Callets Ausgabe der Logarithmen (à Paris, 1795.) ſind dieſe Tafeln auch eingerückt, und mit den natürlichen, bis auf 48 Decimalſtellen berechneten, Logarithmen vergeſellſchaftet. Dieſe ſind aus Schulzens Sammlung von Tafeln genommen; die daſelbſt fehlenden Logarithmen ſind zugeſetzt. In der Tafel der briggiſchen Logarithmen ſind die zehn erſten Ziffern aus einer vorhergehenden Tafel, die bis zu 20 Decimalſtellen geht, zu ergänzen. Dieſe Tafel enthält alle Zahlen von 1 bis 1200. Noch ſind zwey Tafeln beygefügt. Eine enthält beiderley Logarithmen der Zahlen von 101000 bis 101179. Die andere enthält umgekehrt die Zahlen geordnet zu den Logarithmen 0,00000; 0,00001;

*) Wolfram, ein ſehr geübter Rechner, behauptet in einem Briefe an Lambert, daß nicht alle von Sharp berechneten Logarithmen richtig ſind. (Lamberts Briefwechſel. IV. S. 451.) Er hat aber eine ältere Ausgabe zur Hand gehabt. Die von 1742 iſt richtiger. S. eb. daſ. S. 485.

0,00002 . . . . . 0,00179 auf eben ſo viele Stellen als jene Tafeln und für beiderley Logarithmen.

Gardiner, der Herausgeber von Sherwins Tafeln giebt die Vorſchrift ohne Beweis ſo kurz gefaßt, daß ſie etwas Mühe macht. In der Einleitung zu Callets Ausgabe ſind ſo viele beſondere Vorſchriften für die verſchiedenen hier möglichen Fälle gegeben, daß man ſich leicht verwirrt. Daher wird eine Erläuterung ganz nützlich ſeyn.

93. Die gegebene Zahl ſey z. Es iſt nur nöthig, einen Multiplicator m zu z zu finden, ſo daß mz zwiſchen die Zahlen $10^6 - 20$ und $10^6 + 20$ falle. Nur muß zugleich m eine ſolche Zahl ſeyn, deren Logarithme ſich aus der erſten Tafel bis auf 61 Decimalſtellen finden laſſe, es ſey nun, daß ſie darin ſelbſt vorkomme, oder daß ſie aus Factoren beſtehe, deren Logarithmen in der Tafel enthalten ſind.

94. Es ſey $mz = 10^6 + a$, wo a auch ſubtractiv ſeyn mag, und nicht über 20 betragen muß. Iſt nun log $(10^6 + a)$ durch Hülfe der zweyten Tafel gefunden, in welcher die Logarithmen der Zahlen von $10^6 - 20$ bis $10^6 + 20$ ſich befinden, ſo wird auch log. z bekannt, nämlich $\log. z = \log. (10^6 + a) - \log\ m$.

Es iſt nun zu zeigen, wie der Factor m gefunden werde.

95. Dieſer Factor kann manche, eigentlich unendlich viele, Werthe haben, deren einige eine geſchwindere, andere eine langſamere Annäherung für log. $(10^6 + a)$ geben. Er liegt innerhalb gewiſſer Gränzen, die man findet, wenn die Zahlen $10^6 - 20$ und $10^6 + 20$ durch die gegebene Zahl z dividirt werden. Oder man dividire nur 10^6 durch z, wodurch man einen mittlern Werth für m erhält, den man noch etwas vergrößern oder verkleinern kann, bis zu den vorgeſchriebenen Gränzen.

96. Exempel. Es ſoll zu der Zahl z = 3,141592 653589 793238 . . . das iſt, dem halben Kreisumfange für den Halbmeſſer als Einheit, der Factor m gefunden werden, wodurch das Product mz die Form $10^6 + a$ erhalte, wo a unter 20 iſt. — Es erhellt gleich,

daß m zwiſchen 300000 und 400000 fällt, alſo aus 6 Ziffern bis zu den Einern beſteht. Um den Werth von m bis auf die Einer zu erhalten, dividire man 1000000 durch 3 14159, ſo iſt der Quotient 318310. Nimmt man dieſen Werth für m, ſo iſt mπ = 1000000,3574 ... In ganzen Zahlen kann man m bis 318316 auf einer Seite und 318304 auf der andern nehmen. Bey jenem erſten Werthe iſt a = 0,3574. Die nächſte Zahl der Tafel an $10^6 + a$ iſt 10^6 ſelbſt. Man kann $10^6 + a$ noch näher an dieſe bringen, wenn man m = 318310,2 nimmt. Es iſt dieſes m = 2. 9. 13. 61. 22,3. Dadurch wird $10^6 + a = 10^6 + 0,985882 \ldots$ Von dieſer Zahl iſt nun mit Hülfe der zweyten Tafel der Logarithme zu finden.

Dieſes geſchieht nach einer von den beiden oben (74 u. 78.) gewieſenen Methoden. Die erſtere wird die bequemſte ſeyn. Sie iſt auch die von Gardiner, dem Herausgeber von Sherwins Tafeln, befolgte.

97. Die an $10^6 + a$ nächſte Zahl ſey $10^6 + b$. Man ſetze $\frac{10^6 + a}{10^6 + b} = \frac{1 + y}{1 - y}$, ſo iſt $y = \frac{a - b}{2\,10^6 + a + b}$. Nun iſt

$$\text{log. nat. } \frac{1 + y}{1 - y} = 2\left(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \tfrac{1}{7}y^7 + \text{etc.}\right).$$

Die Reihe convergirt hier ſehr ſchnell, weil y kleiner als $\frac{1}{2.\,10^6}$ iſt. Nämlich $10^6 + a$ fällt zwiſchen zwey nächſte ganze Zahlen, deren eine $10^6 + b$ iſt, es mag b kleiner oder größer als a ſeyn. Es iſt alſo a — b ein eigentlicher Bruch. Nun iſt y kleiner als $\frac{a - b}{2.\,10^6}$, und dieſes kleiner als $\frac{1}{2.\,10^6}$, folglich y kleiner als dieſes letztere. Je näher a und b ſich kommen, deſto convergirender iſt die Reihe.

Es iſt nun, wenn die Reihe $= R$ geſetzt wird,
$\log.\ nat.\ z = \log.\ (10^6 + b) + R - \log.\ m$,
oder, wenn man die briggiſchen Logarithmen nimmt, deren Modulus $M = 0{,}43429 \ldots$ iſt, $\log\ Brigg.\ z = \log.\ (10^6 + b) - \log.\ m. + M.\ R.$

98. Die Formel, welche mittelſt der Differenzen berechneter Logarithmen den Logarithmen einer gegebenen Zahl angiebt, iſt die in dem Artikel, Einſchalten, 6, befindliche, welche ſchon oben (78.) bey zwey Differenzenreihen mit einer kleinen Abänderung angewandt iſt. Da hier mehrere Differenzenreihen nöthig ſind, ſo werden wir ſie ungeändert laſſen, um ein einfaches Geſetz der Coefficienten zu haben. — Eine Reihe von Zahlen ſey N; $N + 1$; $N + 2$; $N + 3$; etc. ihre berechneten Logarithmen, A, $A + \alpha$; $A + \beta$; $A + \gamma$; etc. Die Anfangsglieder der Differenzenreihen der Logarithmen ſeyn a, b; c, d; etc. ein eingeſchaltetes Glied in der Reihe der Zahlen ſey $N + u$; und der zu dieſen gehörige Logarithme $A + y$. Es iſt

$$y = au + \frac{bu(u-1)}{1 \cdot 2} + \frac{cu(u-1)(u-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{du(u-1)(u-2)(u-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

Hier iſt $N + u$, was vorher durch $10^6 + a$ ausgedruckt ward, da z die gegebene Zahl, deren Logarithme geſucht wird, und $mz = 10^6 + a$ iſt. Nachdem y gefunden iſt, iſt $A + y$ oder $\log.\ (10^6 + a)$ bekannt, und dadurch $\log.\ z = \log\ (10^6 + a) - \log.\ m.$ Es iſt am vortheilhafteſten, die Zahl $N + u$ mitten in die Reihe der ausgehobenen Zahlen zu ſetzen, damit ihr Logarithme ſowohl durch die vorhergehenden als nachfolgenden beſtimmt werde. Wenn eine krumme Linie durch gegebene Puncte gezogen werden ſoll, ſo wird ſie um die Mitte zwiſchen den äußerſten am wenigſten von der wahren abweichen, weil hier auf beiden Seiten Puncte ſind, welche die Richtung des Zuges beſtimmen, dagegen die

Puncte an dem einen Ende weniger Einfluß auf den Zug an dem andern Ende haben.

In dem Artikel, Einſchalten, Th. II. S. 55. iſt noch eine Einſchaltungsformel aufgeführt, nach welcher die Stelle des geſuchten Logarithmen ein Bruch ſeyn kann, weil das Glied der Hauptreihe, deſſen Stelle durch o bezeichnet wird, ſich in der Mitte der Hauptreihe befindet. Allein die Berechnung der Coefficienten iſt nach dieſer Formel weniger bequem.

In der zweyten Tafel von Sharp ſind die Unterſchiede bis zu der vierten Ordnung beygefügt, bis zu der 30ſten Decimalſtelle.

99. Zu einem Logarithmen von vielen Ziffern die zugehörige Zahl zu finden, dient die Formel (28.). Damit ſie aber convergent ſey, muß x ein eigentlicher Bruch ſeyn, und ein kleiner, damit ſie ſchnell convergire. Um einen gegebenen Logarithmen auf dieſe Form zu bringen, muß man den nächſten Logarithmen, den man haben kann, davon abziehen, oder jenen von dieſem. Alsdann kann man jene Reihe gebrauchen. Um die Multiplication mit c ($= 2{,}3025 \ldots$) in jener Formel zu vermeiden, verwandle man den gefundenen Logarithmen durch die Multiplication mit c in einen natürlichen und ſuche zu demſelben mittelſt der Reihe (29.) die Zahl. Dieſe wird mit der Hülfszahl, deren Logarithme abgezogen war, multiplicirt, oder es wird, wenn der Logarithme der geſuchten Zahl abgezogen war, die Hülfszahl durch die gefundene Zahl dividirt. Das Verfahren wird durch die folgende ſymboliſche Darſtellung deutlicher werden.

100. Es bedeute log. z den briggiſchen Logarithmen einer Zahl z; Log. z den natürlichen. Ferner ſey n die genommene Hülfszahl, ihr briggiſcher Logarithme $=$ log. n. Nun ſey log. z $-$ log. n $=$ log. $(1 + y)$, ſo iſt $z = n\,(1 + y)$. Man multiplicire beide Theile der Gleichung, log. z $-$ log. n $=$ log. $(1 + y)$, durch

A

$c = 2{,}302585\ 092994 \ldots$ ſo iſt c (log. z — log. n) $=$ Log. (1 + y). Dieſen nun gegebenen Logarithmen bezeichne man durch L, ſo iſt

$$1 + y = 1 + \frac{L}{1} + \frac{L^2}{1.2} + \frac{L^3}{1.2.3} + \frac{L^4}{1.2.3.4} + \frac{L^5}{1..5} + \text{etc.}$$

Wären n größer als z, ſo iſt log. z — log. n = log. (1 — y), wo beide Theile negativ ſind, und es iſt, da nun L negativ iſt,

$$1 - y = 1 - \frac{L}{1} + \frac{L^2}{1.2} - \frac{L^3}{1.2.3} + \frac{L^4}{1.2.3.4} - \frac{L^5}{1..5} + \text{etc.}$$

Dieſes iſt viel bequemer, als wenn man log. n — log. z $=$ log. (1 + y) nimmt, wodurch $z = \frac{n}{1+y}$ iſt.

Bezeichnet man den Werth der einen oder der andern Reihe durch R, ſo iſt in beiden Fällen $z = n.\ R.$

Geſchichte der Logarithmotechnie.

101. Die Geſchichte der Erfindung und der Ausbildung der Logarithmik iſt eine der merkwürdigſten und lehrreichſten in dem mathematiſchen Fache. Sie hat manches ähnliche mit der Geſchichte der Cyklometrie, ſo wie die Logarithmen mit dem Kreiſe manches ähnliche haben, obgleich der Uebergang von dem einen zum andern durchs Unmögliche geſchieht.

102. Archimedes verband ſchon in ſeiner kleinen Schrift, die er Sandrechnung betitelt hat, eine arithmetiſche Reihe mit einer geometriſchen, um die Stellen der Producte aus Gliedern der letztern Reihe durch die Summe der zugehörigen aus jener anzugeben.

103. Auch Stifel verband in ſeiner Arithmetica integra eine arithmetiſche und geometriſche Reihe, und zeigte die Analogie zwiſchen Producten, Quotienten, Potenzen und Würzeln in der letztern mit Summen, Unterſchieden, Vielfachen und Theilern in der erſtern. Da er aber bey den Zahlen der angenommenen Reihe ſtehen bleibt, ohne Einſchaltungen zu verſuchen, ſo bleibt von dieſen Bemerkungen noch ein großer Abſtand bis zu einem logarithmiſchen Syſtem. Man ſehe Käſtners Geſchichte der Mathematik, Th. I. S. 115. ff.

104. Neper in Schottland und Jobſt Byrg in Deutſchland ſind die erſten, welche, ohne etwas von einander zu wiſſen, logarithmiſche Tafeln berechnet haben. Ich beſchreibe des letztern Einrichtung, als die weniger vollkommene, zuerſt, zufolge der Nachricht welche Käſtner davon in der Fortſetzung der Rechenkunſt, als der zweyten Abtheilung des erſten Theils ſeiner mathem. Anfangsgründe, S. 93. ff. gegeben hat. Dazu füge ich noch einige Erläuterungen.

105. Byrgs Tafeln ſind äußerſt ſelten. Sie haben den Titel: Arithmetiſche vnd Geometriſche Progreſs Tabulen, ſambt gründlichen vnterricht, wie ſolche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen vnd verſtanden werden ſol. Gedruckt, In der alten Stadt Prag, Im Jahr 1620. 7½ Bogen in Quart. Der gründliche Unterricht fehlt bey dem Exemplar. Käſtner zeigt zwar, daß dieſe Tafeln logarithmiſche ſind, allein die Entſtehung der Berechnungsart hat er nicht gewieſen, worauf es doch zur Vergleichung der Logarithmen unſers Landsmanns mit den Neperiſchen ankommt. Die Benennung Logarithmen hat Byrg nicht. Er unterſcheidet Zahlen und Logarithmen durch die Farbe des Drucks, ſchwarze und rothe.

106. Käſtner giebt folgende Logarithmen und Zahlen aus der Byrgiſchen Tafel an.

Logarithmen	Zahlen
0	1 0000 0000
10	1 0001 0000
20	1 0002 0001
30	1 0003 0003
990	1 0099 4867
223 040	9 3025 4936
224 000	9 3922 7936
230 000	9 9730 3557
230 270 022	10 0000 0000

Man ſieht, daß Byrg die Glieder einer geometriſchen Reihe berechnet hat, deren beide erſte ſind 10000 und 10001, und daß er dieſe mit 10000 multiplicirt hat, um die Bruchtheile in der Geſtalt ganzer Zahlen anzuhängen. Die Glieder der Reihe konnte er durch die fortgeſetzte Diviſion durch 10 und ſtetiges Zuſetzen finden. Warum er die Stellen der Glieder durch Zehner angegeben hat, wüßte ich nicht zu ſagen, wenn die Reihe nicht eine aus einer ausführlichern ausgehobene iſt.

107. Wir wollen Byrgs Rechnung prüfen, welches am ſchärfſten bey der letzten Zahl geſchehen wird. Es iſt alſo die Frage, das wie vielſte Glied iſt 10 0000 in in der Reihe 1 0000 : 10001 : etc. oder das wie vielſte iſt 10 in der Reihe 1 : 1,0001 : etc.

Dieſe Stellenzahl ſey $= n$, ſo iſt $(1{,}0001)^n = 10$,

alſo $n \log. (1{,}0001) = \log. 10$, und $n = \frac{\log. 10}{\log. (1{,}0001)}$.

Da $10001 = 73 \cdot 137$ iſt, ſo giebt die (92.) angeführte Sharpſche Tafel den Logarithmen von 1,0001 ſo weit als es hier nur erforderlich iſt. Es iſt log. Br. 1,0001 = 0,000004 34272 76861. Der Quotient der Einheit (oder log. 10) durch dieſen Logarithmen dividirt, giebt nun die Stellenzahl für 10 oder n = 23027,002204. Da die Stellenzahlen von Byrg nach Zehnern angeſetzt ſind, ſo iſt in ſeiner Tafel n = 230270,02204. Das

Komma als Einerzeichen hat Byrg nicht geſetzt, aber der Columnentitel über den Logarithmen enthält die Zahl
o
230000, wo die o über der letzten Ziffer ohne Zweifel die Stelle der Einer anzeigt. Byrg hat alſo ſehr genau gerechnet. Die Tafel endigt ſich mit der Bemerkung, daß die rothe Zahl iſt 230270022 —; 230270023 +. Byrg hat dieſe Zahlen als Gränzen ſeines Logarithmen von 10 angeſehen, wo aber die drey letzten Ziffern als ein Decimalbruch abzuſchneiden ſind.

108. Die Zahl zu dem byrgiſchen Logarithmen 990 zu prüfen, ſuche man die 99ſte Potenz von 1,0001, da ſie das 99ſte Glied der angenommenen Reihe iſt. Es iſt

log. Brigg. 1,0001 = 0,00004 34273
99fache = 0,00429 93027

Die beiden nächſten Logarithmen ſind

log. 1,0099 = 0,00427 83722
log. 1,0100 = 0,00432 13738
Unterſchied = 0,00004 30016.

Alſo iſt der einfache Proportionaltheil, der hier hinlänglich iſt, 0,0000 4867, und $(1{,}0001)^{99} = 1{,}0099\,4867$, wie es Byrg hat, wenn man bey ihm die Stelle der Einer um 8 Stellen heraufrückt.

109. Man ſieht, daß Byrgs Logarithmen den natürlichen nahe kommen, wenn die Zahlen in ſeinem Syſtem durch 10^8, und die Logarithmen durch 10^5 dividirt werden. In dem natürlichen Syſtem nähern ſich der Logarithme und der Ueberſchuß der Zahl über die 1 deſto mehr der Gleichheit, je kleiner dieſer Ueberſchuß iſt (25.), in dem Byrgiſchen iſt der Unterſchied der beiden erſten Glieder 100000 und 100010 dem Logarithmen der letztern Zahl genau gleich geſetzt.

110. Nepers Logarithmen ſind, mit einer unweſentlichen Abänderung der Form, die natürlichen, ſo weit er ſich ihnen bey ſeiner Berechnungsart nähern konnte. Er ward darauf dadurch geleitet, daß er die trigonometriſchen Rech-

nungen abzukürzen ſuchte. Da nun der Radius oder Sinus totus oft als Multiplicator oder Diviſor vorkommt, ſo gab er dieſem die 0 zum Logarithmen, und ließ die Logarithmen der Sinus von 0 an zunehmen, indem ſie ſelbſt von 1000 0000, als dem angenommenen Werthe des Sinus totus abnehmen. Setzt man dieſen = 1, und dividirt ſeine Logarithmen auch durch 1000 0000, ſo ſind ſeine poſitiven Logarithmen in unſerm Syſtem negativ, und umgekehrt.

111. Neper, deſſen vaterländiſcher Name Napier oder Nepair, Baron von Merchiſton, iſt, machte ſeinen logarithmiſchen Canon für die Sinus und Tangenten der Winkel von Minute zu Minute, unter dem Titel bekannt: Mirifici Logarithmorum Canonis Deſcriptio, cet Edinb. 1614. 4. Hierin theilte er aber noch nicht die Methode mit, nach welcher er die Logarithmen berechnet hatte. Dieſes geſchah erſt nach ſeinem im J. 1618 erfolgten Tode durch ſeinen Sohn, in der neuen vermehrten Ausgabe jenes Buchs, Edinburgi, 1619, wo die Erklärung der Berechnungsart unter der Benennung: Mirifici canonis conſtructio, vorkommt. Die Originalausgaben ſind ſelten. Es iſt ein guter Nachdruck davon zu Lyon, von der Deſcriptio und den Tafeln 1619, von der Conſtructio 1620, herausgekommen.

112 Die Erklärung, welche Neper von den Logarithmen giebt, iſt merkwürdig. Sie lautet ſo: Der Logarithmus eines jeden Sinus iſt die Zahl, welche nächſtens die Linie (eine gerade) angiebt, die gleichförmig zugenommen hat, indem die Linie des Sinus totus proportionaliter bis zu dieſem Sinus vermindert iſt, wobey die Bewegung der jede der beiden Linien beſchreibenden Puncte gleichzeitig, und im Anfange gleich geſchwinde iſt. Er nennt proportionaliter abnehmen, wenn die in gleichen Zeitmomenten beſchriebenen Abſchnitte zu den Linien, wovon ſie genommen werden, durchgehends daſſelbe Verhältniß haben, das iſt, wenn die Linien oder die Größen überhaupt in geometriſcher abnehmender Progreſſion ſind,

Es ſey nämlich eine abnehmende Reihe Größen: a, b, c, d, e, etc. und a — b : a = b — c : b = c — d : c = d — e : d, u. ſ. f. ſo nehmen a, b, c, etc. proportionaliter ab. Es iſt nun a : b = b : c = c : d = d : e, u. ſ. f.

113. Hat Neper ſich die Geſchwindigkeit des ungleichförmig beweglichen Punctes als eine ſich ſtetig verändernde gedacht, ſo hat er gerade das natürliche Syſtem der Logarithmen ergriffen. In der Conſtructio Canonis, 25. ſagt er, daß die Geſchwindigkeit eines beweglichen Punctes, der ſich einem fixen Puncte geometriſch nähert (ſo daß die Abſtände in geometriſcher Folge abnehmen), dem Abſtande von dem fixen Puncte proportionirt iſt. Das hat eine ſtetig abnehmende Geſchwindigkeit zur Folge. Im Anfange ſoll die Bewegung der beiden Puncte, von welchen einer ſich gleichförmig bewegt, der andere auf die gedachte Art ungleichförmig auf dem Sinus totus fortrückt, gleich geſchwinde ſeyn. Das iſt gerade das eigenthümliche des natürlichen Syſtems, wenn Zahlen und Logarithmen durch gerade Linien dargeſtellt werden, die man durch Bewegungen eines Punctes beſchreiben läßt. Auch gebraucht Neper die oben (51, 52.) erklärte Einſchaltung, welche nur auf das natürliche Syſtem vollkommen paßt (53.). Daß Neper ſchon die Idee von einem Differentialverhältniſſe, wiewohl nur unentwickelt, gehabt hat, iſt in dem I. Th. S. 827. bemerkt.

114. Es iſt der Mühe werth zu ſehen, wie Neper es angefangen hat, dieſen Begriffen gemäß ſeinen logarithmiſchen Canon zu berechnen.

Er nahm zum Anfangsgliede die Zahl 1000 0000, zum nächſten Gliede oder erſten Proportional (nach ſeinem Ausdruck) die Zahl 999 9999. Hierauf berechnete er die erſten hundert Glieder in der geometriſchen Reihe (A) nach jenem Anfangsgliede, welches ſehr leicht durch Abziehung des zehnmillionſten Theils jedes Gliedes geſchieht. Das 100ſte Glied iſt 999 9900,000495.

Dann berechnete er auf ähnliche Art eine Reihe (B) von 51 Gliedern, von welchen das erſte Glied wieder

1000 0000, das nächſte aber 999 9900 iſt, nämlich das letzte Glied der vorhergehenden Reihe, ohne den Bruchtheil. Das 50ſte Glied nach dem Anfangsgliede iſt 999 5001,222927. Die vier letzten Ziffern des Decimalbruchs finde ich durch die Binomialformel 4804.

Noch berechnete er eine Reihe (C) von 69 Gliedern, deren erſtes iſt 1000 0000, zweytes 990 0000, letztes 504 8858,890. Jedes dieſer Glieder iſt wieder das Anfangsglied einer beſondern Reihe von 21 Gliedern, von welchen je zwey nächſte in allen Reihen das Verhältniß 10000 : 9995 haben. Es iſt 9995000 ſehr nahe das letzte Glied der obigen zweyten Reihe (B). Das letzte Glied jeder dieſer eingeſchalteten Reihen iſt nahe das erſte der folgenden Reihe. Das letzte Glied der 69ſten Particular-Reihe, oder Columne, wie Neper ſie nennt, iſt 499 8609,4034; nahe 500 0000, der halbe Sinus totus. Dieſe 69 Reihen enthalten 1449 Glieder, wozu noch 151 in den Reihen (A) und (B) kommen.

Die Zerlegung der Reihe (C) in 69 von einander unabhängige Reihen gewährt den Vortheil, daß die Rechnung ſo viel zuverläſſiger iſt, und zugleich erleichtert wird. Wenn man in ſtetigem Zuſammenhange eine Reihe von etwa eben ſo vielen Gliedern zwiſchen 10000000 und 500 0000 berechnen wollte, ſo würde die Rechnung entweder bald unſicher werden, oder man müßte die Glieder viel weiter als nach jener Methode berechnen, da das letzte Glied noch von den erſten abhangen würde. Die Reihen A und B dienen insbeſondere um die Grundlage zur Berechnung der Logarithmen zu geben. Wie dieſe gefunden ſind, iſt nun anzuzeigen.

115. Alles beruht auf dem Satze (52.) von den Gränzen eines Logarithmen in dem natürlichen Syſtem. Es ſeyn S und s zwey Sinus, der Sinus totus = r, ſo iſt

$$\log. s - \log. S < \frac{S - s}{s} r \text{ ; und}$$

$$\log. s - \log. S > \frac{S - s}{S} r.$$

Der Exponent (52.) iſt hier ein eigentlicher Bruch, und die Logarithmen der Sinus ſind hier poſitiv.

In der Reihe (A) iſt S der Sinus totus, alſo fällt log. s zwiſchen $\frac{r \quad s}{s}$ r und r — s. Der Logarithme der erſten Proportionalzahl 999 9999 fällt zwiſchen 1,000 0001 und 1,000 0000, daher man denſelben = 1,0000 0005 ſetzen mag. In der Tafel der Logarithmen iſt er gerade = 1 geſetzt. Neper erinnert aber zweymahl, daß er zwiſchen jene beiden Gränzen falle, kann aber keine nähere angeben. Die Logarithmen der übrigen 99 Glieder in der Reihe (A) werden durch Wiederholung dieſes Logarithmen gefunden. Der Log. des letzten Gliedes 9999900,000495 iſt 100 000005.

Die erſte Proportionale der Reihe (B) iſt 9999900. Dieſe ſey s, das letzte Glied der Reihe (A) ſey = S, ſo fallen die Gränzen der Unterſchiede der Logarithmen faſt zuſammen, und der Unterſchied iſt S — s ſelbſt nächſtens, oder 0,000495, und der Logarithme von 9999900 iſt = 100,0005. Aus dieſem finden ſich nun durch Wiederholung die Logarithmen der übrigen 49 Glieder. Der Logarithme des letzten Gliedes 9995001,222927, iſt daher 5000,025. Durch dieſen Logarithmen werden nun die Logarithmen der Glieder in der Reihe (C) gefunden.

Es iſt nämlich das zweyte Glied der erſten Particular-Reihe oder Columne in der Reihe (C) = 9995000. Dieſes ſey s, und jenes letzte in der Reihe (B) = S, ſo iſt S — s = 1,222927, welches man für den Unterſchied der Logarithmen dieſer Zahlen ſelbſt nehmen mag. Es iſt alſo log. 9995000 = 5001,248. Dieſer 20mahl genommen giebt den Logarithmen des letzten Gliedes, 9900473,578 in der erſten Columne der Reihe (C), welcher alſo iſt 100024,96. Aus dieſem Logarithmen wird der Logarithme des erſten Gliedes der zweyten Columne hergeleitet. Dieſes iſt = 9900000 = s, da 9900473,578 = S iſt. Es iſt S — s = 473,578. Die Gränzen des Unterſchiedes der Logarithmen ſind

478,36 und 478,34, das Mittel 478,35; alſo iſt log. 9900000 = 100503,31. Da der Logarithme des Verhältniſſes zweyer nächſten Glieder in allen Columnen der Reihe (C) derſelbe iſt, ſo hat man nun auch den Logarithmen des zweyten Gliedes der zweyten Columne, daraus denjenigen des letzten Gliedes, und auf dieſe Art erhält man die Logarithmen von jedem erſten und letzten Gliede jeder Columne. Aus dem des letzten Gliedes der letzten Columne wird nun auch der Logarithme von 500 0000 bekannt, das iſt der Logarithme des Verhältniſſes 2 : 1. Dieſen giebt Neper an = 6931469,22 in §. 51. Der natürliche Logarithme von 2 iſt 0,69314 71805 ..., woraus man ſieht, daß Neper genau genug gerechnet hat.

1:6. Weiter als bis nahe an 5000 0000 ſetzt Neper ſeine Reihe nicht fort. Denn die Logarithmen der Zahlen, die in den Bezirk ſeiner Reihe (C) und der beiden A und B fallen, findet er aus den Logarithmen dieſer Zahlen nach der angezeigten Methode. Die Logarithmen ſolcher Sinus oder Zahlen, die außerhalb jenes Bezirks fallen, zu finden, multiplicirt er dieſe Zahlen durch 2, 4, 8, 10, 20, 40, 80, 100, 200, u. dgl. oder durch irgend eine Zahl aus ſeiner logarithmiſchen Tafel, ſo daß ſie innerhalb der Gränzen dieſer angetroffen werde, worauf er wie vorher ihren Logarithmen berechnet. Die Logarithmen der Potenzen von 2 werden durch Multiplicationen des log. 2. erhalten. Den von 10 findet Neper folgendergeſtalt. Es iſt log. 8000000 = 2231434,68 vermittelſt ſeiner logarithmiſchen Tafel. Dazu muß das Dreyfache des Logarithmen von (2 : 1) addirt werden, um den log. 1000000 = 23025842,34 zu erhalten. Dieſer iſt = log. (10 : 1). Der natürliche Logarithme von 10 iſt = 2,30258 50929 94. Übrigens bemerkt Neper in §. 60. daß ſeine Tafel der Logarithmen der Sinus nicht völlig genau ſey, weil die nach zweyerley Methoden berechneten manchmahl von einander abweichen. Er ſchlägt daher eine Abänderung ſeiner

Rechnung, die aber nicht weſentlich iſt, vor, wodurch man eine größere Genauigkeit erhalten würde.

117. Zur Prüfung der Neperiſchen Rechnung diene der natürliche Logarithme von sin 1° = 0,0174524. Es iſt 174524 = 23 . 28 . 271, und

l. nat. 23	=	3,13549 42159
l. nat. 28	=	3,33220 45101
l. nat. 271	=	5,60211 88209
		12,06981 75469
l. 10^7	=	16,11809 56509
l. nat sin 1°	=	−4,04827 81040

Neper giebt dieſen Logarithmen an = 40482764.

118. In dem Neperiſchen Syſtem hat man nicht ſowohl Logarithmen von Zahlen als von Verhältniſſen. Wenn man alſo den log. 174524 mittelſt einer nach dieſem Syſtem verfertigten Tafel der Logarithmen ganzer Zahlen finden wollte, ſo müßte man 10^7 in drey Factoren zerfällen, als 10^2, 10^2, 10^3, und die Logarithmen der Verhältniſſe $10^2 : 23$; $10^2 : 28$; $10^3 : 271$ ſuchen, das iſt, die Unterſchiede der Logarithmen der Glieder dieſer Verhältniſſe nehmen, und dieſelben addiren.

119. Ueber die Neperiſchen Logarithmen iſt ein kleiner Zwiſt zwiſchen zwey gelehrten deutſchen Mathematikern, Karſten und Käſtner, entſtanden. Jener hatte in dem Lehrbegriffe der Mathem. Th. II. §. 146. geſagt, Neper habe 1 für den Logarithmen von 999 9999 angenommen. Dagegen machte Käſtner in der zweyten Sammlung ſeiner aſtronomiſchen Abhandlungen S. 70. ff. eine Erinnerung. Karſten ſuchte in der zweyten Ausgabe des Lehrbegriffs, Th. II. 1. Abth. S. 240. ff. den Mißverſtand, der hier zum Theil wirklich iſt, zu heben. Er bleibt übrigens dabey, daß das, was man jetzt Baſis eines logarithmiſchen Syſtems nennt (Neper hat und braucht dieſen Begriff nicht) die Zahl 0,999 9999 ſey. Allein Neper hat, wie oben angeführt iſt, zu der Zahl

9999999 nicht den Logarithmen 1 geſetzt, ſondern eine Zahl zwiſchen 1,000 0000 und 1,0000001, wofür am ſchicklichſten die Zahl 1,000 00005 genommen werden könne. Das hätte Käſtner erinnern müſſen, anſtatt daß er jene Annahme blos zweifelhaft macht. Er konnte ſich auch darauf berufen, daß er gleich vorher, §. 53. die Baſis des Neperiſchen Syſtems, der Annahme des Erfinders gemäß, berechnet, und 9999999,00000005 gefunden hatte. Dieſe findet ſich auch folgendergeſtalt ganz leicht. Es iſt log. Nep. 9999999 = 1,00000005. Nun ſind für Zahlen, die ſehr nahe an 1000 0000 fallen, die Veränderungen der Zahlen und der Logarithmen gleich und entgegengeſetzt, alſo iſt log. Nep. 9999999,00000005 = 1. Daher iſt die zu dieſem Logarithmen gehörige Zahl die Baſis des Syſtems. Käſtner hatte die Neperiſche Schrift von der Conſtructio canonis wahrſcheinlich nicht nachgeſehen. In ſeiner Geſchichte der Mathematik, Bd III. S. 70—86. giebt er erſt ausführliche Nachricht davon, in frühern Schriften nur von der Deſcriptio, da er jene erſt 1798 erhalten zu haben meldet.

120. Es würde, wie Käſtner bemerkt, zu mühſam ſeyn, ein entferntes Glied der Progreſſion, $10^7 : 10^7 - 1 :$ etc. mittelſt des binomiſchen Lehrſatzes zu berechnen, um zu ſehen, was Neper als Logarithmen (Stellenzahl) zu ihr ſetzt. Man würde hier auch die Zahl nicht genau in ſeiner Tafel finden. Allein durch unſere ſehr ſcharf berechneten Logarithmen läßt ſich aus der Zahl die Stellenzahl derſelben in jener Reihe leicht und ſehr genau finden. Es ſey nämlich N irgend eine Zahl, und die Stelle derſelben = n, ſo iſt $\frac{(10^7 - 1)^n}{(10^7)^{n-1}} = N$, oder $10^7 (1 - 10^{-7})^n = N$; alſo n log. $(1 - 10^{-7}) = $ l. N — l. 10^7. Nun iſt log. nat. $(1 - 10^{-7}) = - 10^{-7} - \frac{1}{2} . 10^{-14} - \frac{1}{3} . 10^{-21} -$ etc. Daher iſt n = (l. nat. 10^7 — l. nat. N) $(10^7 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} 10^{-7} -$ etc.). Nimmt man N = 174524, ſo iſt n =

40482779,016. Iſt Nepers Rechnung bis zu dieſem Gliede zuverläſſig, ſo hat er jene Progreſſion nicht zum Grunde gelegt, da bey ihm der Logarithme oder die Stellenzahl = 40482764 iſt. Allein es wäre auch ſehr möglich, daß kleine Vernachläſſigungen der Genauigkeit in den vorangehenden Gliedern der Reihe am Ende eine etwas merkliche Abweichung hervorgebracht hätten. Neper hat in der That auf das, was wir Baſis eines logarithmiſchen Syſtems nennen, gar nicht geachtet.

121. Die genauere Berechnung der Logarithmen, welche Neper in ſeiner Schrift über die Conſtruction derſelben, §. 60. vorgeſchlagen hatte, iſt in Deutſchland ausgeführt worden, von Benjamin Urſinus, Lehrer an einem Gymnaſium zu Berlin. Er lieferte die Logarithmen der Sinus der Winkel von 10 zu 10 Secunden, nebſt den Logarithmen der Tangenten, welche die Unterſchiede der Logarithmen jedes Sinus und Coſinus ſind, zugleich mit den natürlichen Sinus für einen Halbmeſſer von 10000 0000 Theilen. Dieſe große Tafel hat den Titel: Magnus Canon Triangulorum Logarithmicus. Coloniae 1624. in 4. Auf dem Titel wird noch bemerkt, daß dieſer Canon nach Nepers Wunſch und Angabe mit aller Anſtrengung berechnet ſey. Es gehört dazu noch ein Werk, worin die Berechnung der trigonometriſchen Linien und der Logarithmen gelehrt wird, mit der Anweiſung zu ihrem Gebrauche, unter dem Titel: Trigonometria cum magno Logarithmorum Canone, Coloniae, 1625. 4. Die Jahrzahl wird ſich blos auf dieſen Text beziehen. Montucla ſagt irrig: (Geſch. der Mathem Th. II. S. 27. 2te Ausg.), daß Urſinus in dieſer größern Ausgabe das von Neper und Briggs abgeänderte Syſtem angewandt habe.

122. Die Methode iſt weſentlich dieſelbe mit der von Neper angewandten. Zuerſt berechnet er eine geometriſche Reihe von 100 Gliedern nach dem Anfangsgliede 10000 0000, als dem Sinus totus, mit hinzugefügten Decimalbrüchen von acht Stellen, nebſt ihren Logarithmen. Das nächſte Glied nach dem Anfangsgliede

iſt 9999 9999, deſſen Logarithme iſt 1,000 000005. Dann folgt eine geometriſche Reihe von eben ſo vielen Gliedern, mit ihren Logarithmen. Das Anfangsglied iſt wiederum der Sinus totus, das nächſte Glied 99999900. Dieſe beiden Reihen nennt er tabulas mediatrices. Hierauf wird eine dritte Tafel berechnet, welche unmittelbar zur Erfindung der Logarithmen dient, und deswegen die tabula radicalis heißt. Sie beſteht aus 35 geometriſchen Reihen, jede von 100 Gliedern nach dem Anfangsgliede, mit ihren Logarithmen. Die Anfangsglieder machen wiederum eine geometriſche Reihe aus, und das letzte Glied jeder Reihe iſt von dem Anfangsgliede der folgenden nicht ſo viel verſchieden, als dieſes von dem darauf folgenden. Die Reihe der Anfangsglieder iſt $10^8 : 99 \cdot 10^6 : 9801 \cdot 10^4 : 970299 \cdot 10^2 :$ etc. Der Exponent iſt $\frac{99}{100}$, oder $1 - \frac{1}{100}$. Die beygefügten Bruchtheile zu Sinus und Logarithmen ſind blos Zehntheilchen.

123. Zur Probe der Berechnung diene wieder der Logarithmus des Sinus von 1°. Dieſer iſt nach Urſinus = 0,01745241, wenn nämlich der Sinus totus = 1 geſetzt wird. Da vorher (117) der log. nat. 174524 gefunden iſt, ſo kann daraus der Logarithme von 174524,1 gleich hergeleitet werden, deſſen Unterſchied von jenem höchſt nahe $\frac{0,1}{174524}$ iſt, oder 0,000000573.

$$\begin{array}{ll} \text{log. nat. } 174524,1 & = 12,06981\ 812 \\ \text{l. } 10^7 & = 16,11809\ 565 \\ \hline \text{l. nat. sin. } 1^\circ & = -4,04827\ 753. \end{array}$$

Urſinus hat 404827 782, welches in der That genau genug iſt, da er, ſo wie Neper eine discrete geometriſche Reihe zum Grunde der Berechnung legen mußte.

Einen Auszug aus des Urſinus Tafel enthalten Jo. Kepleri et Jac. Bartſchii Tabulae manuales logarithmicae, curante Eiſenſchmid. Argentor. 1700. Die Winkel gehen theils von 10 zu 10 Sec. theils von

15 zu 15; von 20 zu 20; und von 30 zu 30 Sec. Die Logarithmen der Tangenten, die hier Meſologarithmi heißen, für Winkel von 10 zu 10. Alle ſind um 3 Ziffern verkürzt.

124. Kepler ergriff Nepers Erfindung mit Eifer. Er bemerkte im J. 1621 auf einer Reiſe durch Oberdeutſchland, daß Mathematikverſtändige, welche ihr Alter bedächtlicher machte, nicht geneigt waren, von der neuen Rechnung Gebrauch zu machen. Es wäre, glaubten ſie, für einen echten Mathematiker nicht ſchicklich, aus einem Abkürzungsmittel der Rechnungen viel Weſens zu machen, und ohne durch kunſtgerechte Beweiſe ſich verſichert zu haben, ſich eines Verfahrens zu bedienen, welches doch wol, wo man es ſich am wenigſten verſähe, triegen könnte. Nepers Beweis beruhe, ſagten ſie ferner, auf einer erdichteten geometriſchen Bewegung, welche einen zu unſichern und ſchlüpfrigen Grund abgebe, als daß ſich ein gründlicher Beweis darauf bauen ließe. Dieſe Bedenklichkeiten bewogen Keplern auf einen guten Beweis zu denken, den er ſchon auf der Reiſe entwarf, und in Linz, ſeinem Wohnorte, ausführte. Seine Theorie machte er auch bald bekannt, und begleitete ſie mit einer Tafel der Logarithmen der Sinus. Der Titel iſt: Jo. Kepleri Chilias Logarithmorum ad totidem numeros rotundos, praemiſſa demonſtratione legitima ortus logarithmorum eorumque uſus. Marpurgi, 1624. 4. Dieſer Schrift folgte: Supplementum Chiliadis Logarithmorum continens praecepta de eorum uſu. Marpurgi, 1625. In England wird dieſes Werk ſehr geſchätzt. Maſeres hat in ſeiner großen Sammlung von logarithmiſchen Schriften beide Schriften ganz abdrucken laſſen, wo die äußere Pracht ſehr gegen das ärmliche Anſehen der deutſchen Originale abſticht. Auch Hutton hat in der Vorrede zu der von ihm beſorgten Ausgabe der Sherwinſchen Tafeln einen Auszug von 10 Seiten groß Quart in der gedachten Sammlung mitgetheilt. Des Urſinus gewiß ſchätzbares Werk ſcheint in England nicht recht bekannt gewor-

den zu ſeyn. Hutton erwähnt deſſelben nur mit wenigen Worten, und Maſeres hat es in ſeine Sammlung nicht aufgenommen. Aber Briggs erwähnt der Arbeit des Urſinus mit großem Lobe. Trigonometria Britannica, L. I. Cap. 16.

125. Keplers Logarithmen ſind dieſelben mit den Neperiſchen, nur die Anordnung in der Tafel iſt anders getroffen. Die Sinus gehen in arithmetiſcher Progreſſion nach Zehntauſenden fort, den Sinus totus = 10 Millionen geſetzt, daher die Winkel ungleichförmig zunehmen. Keplers Theorie iſt ausführlicher und kunſtgerechter als die Neperiſche, ſelbſt nach eines Engländers, Huttons, Urtheil. Er betrachtet die Logarithmen als Maßen von Verhältniſſen, was ſie urſprünglich ſind, daher auch in ſeiner Schrift ein völliges Syſtem über die Verhältniſſe (Proportionen nach Keplers Ausdruck) und ihre Vergleichungen errichtet iſt. Sein Vortrag kann demjenigen, der nicht an die unmittelbare Vergleichung verſchiedener Verhältniſſe gewöhnt iſt, Schwierigkeit machen. Auch iſt in der That derſelbe nicht immer deutlich. Der Beweis des ſechſten Satzes iſt unvollſtändig.

126. Die Berechnungsart, welche Kepler erſonnen hat, wird beſchwerlicher ſeyn als die Neperiſche. Er ſucht zuerſt den Logarithmen des Verhältniſſes

$100000{,}00 : 97656{,}25$, das iſt, den von $1 : \frac{10^5}{2^{10}}$,

durch Einſchaltung von 24 mittlern proportionalen, nach der Seite des erſten Gliedes. Der Unterſchied von 100000 und der hievon nächſten proportionale iſt das Maaß des Verhältniſſes beider, und dieſer 24mahl verdoppelt giebt ihm den Logarithmen des zweyten Gliedes jenes Verhältniſſes, nämlich 2371,6526. (Der natürliche Logarithme von $\frac{2^{10}}{10^5}$ iſt $= 0{,}02371\ 65266\ 17\ldots$

mit Keplers Rechnung ungemein genau zuſammenſtimmend. Zahlen und Logarithmen müſſen bey ihm durch 100000 dividirt, und jene umgekehrt werden, um ſie auf

unſer natürliches Syſtem zu bringen). Ferner ſucht Kepler auf gleiche Art den Logarithmen des Verhältniſſes 1000:500, das iſt, 1:½, welcher ihm iſt 69314,7193. (Es iſt log. nat. 2 = 0,69314 71805.). Hieraus leitet er den Logarithmen des Verhältniſſes $2^{10}:1$, aus dieſem und dem von $2^{10}:10^3$ den von $10^3:1$ her, woraus ſich der von 10:1 ergiebt, nämlich 230258,5141. (Es iſt log. nat. 10 = 2,30258 50929 94.). Daraus wird ferner der log. (5:1) gefunden.

127. Hierauf ſucht K. die Logarithmen der Zahlen 999; 998; 997; ... 900 in Beziehung auf 1000. In unſern Syſtemen wären es die Logarithmen der Quotienten von 1000 durch dieſe Zahlen dividirt. Es ſeyn zwey nächſte dieſer Zahlen z und z — 1; die Quotienten $\frac{1000}{z}$ und $\frac{1000}{z-1}$ geben zwey Gränzen für die Unterſchiede der Logarithmen der Zahlen z und z — 1. Von dieſen Gränzen nimmt er das arithmetiſche Mittel bis auf die achte Ziffer, weil bey den letzten Quotienten das arithmetiſche und geometriſche Mittel der beiden Gränzen in dieſer Stelle von einander abgehen. Die Summe dieſer Mittel nach der Reihe genommen giebt die Logarithmen einen nach dem andern. Es iſt nämlich für irgend eine Reihe, 0, A, B, C, D ... P, Q, R, in welcher die Unterſchiede ſind, a (=A), b, c, d ... q, r; $(A-0)+(B-A)+(C-B)\ldots+(Q-P)+(R-Q) = a + b + c \ldots + q + r$, das iſt $R = a + b + c + \ldots + q + r$.

Alles dieſes beruht darauf, daß in dem natürlichen Syſtem, welchem Kepler, ſo wie Neper, ſich möglichſt zu nähern ſucht, die Logarithmen ſolcher Zahlen, die von der Einheit wenig verſchieden ſind, nahe die Unterſchiede derſelben von der Einheit ſind: und daß der Unterſchied der Logarithmen zweyer Zahlen z und z — 1 zwiſchen $\frac{1}{z}$ und $\frac{1}{z-1}$ fällt.

128. Aus den Logarithmen der erſten 100 Zahlen von 999 bis 900 leitet Kepler die Logarithmen der Primzahlen her, außer den ſchon gefundenen von 2 und 5. Z. B. aus dem von 960 ergeben ſich die von 480, 240, 120, 60, 30, 15; aus dem letztern der von 3, da log. 5 ſchon bekannt iſt. Eben dieſer konnte auch aus dem von 900 gefunden werden. Der log. 990 giebt den log. 11; der Log. 980 den log. 7. u. ſ. w.

129. Als Nepers Logarithmen bekannt gemacht worden waren, beſchäftigte ſich Henry Briggs, Profeſſor der Geometrie am Gresham College in London*), eifrig damit, und fand daß es beſſer ſey, dem 10ten Theil des Halbmeſſers den Logarithmen 100000 . . . zu geben, d. i. das Verhältniß 10 : 1 zur Einheit nehmen, oder $L.\frac{1}{10} = 1$ ſetzen. Bey einem Beſuche, den er Nepern abſtattete, billigte dieſer die Abänderung, und bemerkte, daß es zugleich am beſten ſeyn würde, die Zahlen mit den Logarithmen zugleich wachſen zu laſſen, welches in der That nichts anders iſt, als die Vorzeichen der Logarithmen eigentlicher und uneigentlicher Brüche vertauſchen. Briggs iſt alſo nicht allein für ſich auf den Gedanken gekommen, das Verhältniß 1 : 10 zum Maße der Verhältniſſe zu machen, ſondern er hat auch logarithmiſche Tafeln dieſer Annahme zufolge berechnet, wiewohl nicht vollendet. In dem Anhange zu der Conſtructio canonis mirifici beſchreibt der Herausgeber, Nepers Sohn, die neue Einrichtung der Logarithmen, ohne den Antheil, welchen Briggs daran gehabt hat, zu erwähnen. Dieſes veranlaßte Briggs in der Vorrede zu ſeiner Arithmetica logarithmica ſeine Gerechtſame zu verwahren.

130. Briggs gab nun 1618 als Probe ſeines neuen logarithmiſchen Syſtems das erſte Tauſend, auf acht Decimalſtellen berechnet heraus: Logarithmorum Chilias prima. Die Ausgabe muß ſelbſt in England ſehr ſelten ſeyn. Im J. 1620 erſchien Edmund Gunters Canon triangulorum, worin ſchon die Briggiſchen Log.

*) Er iſt nachher Profeſſor der Geometrie zu Oxford geworden, wo er im J. 1630 geſtorben iſt.

arithmen der Sinus und Tangenten auf ſieben Decimalſtellen angegeben ſind. Gunter war Profeſſor der Aſtronomie am Gresham's Collegium. Dieſe Logarithmen ließ er in ſeinem Buche de Sectore et Radio zugleich mit dem erſten Tauſend der von Briggs herausgegebenen wieder abdrucken. Im J. 1624 erſchien die Arithmetica Logarithmica von Briggs, ein äußerſt mühſames Werk, worin die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 20000 und von 90000 bis 100000, bis auf 14 Decimalſtellen berechnet, enthalten ſind. In der Einleitung theilte er einen ausführlichen Unterricht über die Berechnungsart und den Gebrauch dieſer Logarithmen mit. Er forderte andere Rechner auf, ihm zu der Ausfüllung der noch anſehnlichen Lücke behülflich zu ſeyn, wozu er ſeine Anweiſung, und ſelbſt das dazu ſchon liniirte Papier anbot. Er ſelbſt beſchäftigte ſich beſonders mit der Tafel der logarithmiſchen Sinus und Tangenten durch alle Hunderttheile eines Grades, auf 14 Decimalſtellen, mit einer Tafel der natürlichen Sinus für einen Radius von 1000 Billionen; und einer Tafel der Tangenten und Secanten für einen Halbmeſſer von 10000 Millionen. Dieſe hat er auch vollendet. Sie iſt in Gouda, 1633, in Adrian Blacqs Verlage, gedruckt bey Peter Rammaſen, in Folio erſchienen. (S. Th. I. S. 682.). Dieſer Vlacq, ein Buchhändler und Mathematiker in Gouda, füllte die von Briggs gelaſſene Lücke aus, und gab die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100000, auf 10 Decimalſtellen berechnet, heraus zu Gouda, 2te Ausg. 1628, fol.

131. Zur Geſchichte der Mathematik gehört es, die ältern Methoden kennen zu lernen, wenn gleich dieſe wegen ihrer Beſchwerlichkeit nicht mehr angewendet werden. Den unermüdſamen Fleiß der Berechner der Logarithmen kann man nicht ſchätzen, wenn man ihre Methoden nicht kennt. Speidell ſagt in ſeiner Logarithmotechnie (London 1688), er habe gehört, daß acht Perſonen an den von Briggs herausgegebenen Logarithmen ein ganzes Jahr gearbeitet hätten.

132. In der Einleitung zu der Arithmetica Logarithmica erklärt Briggs zwey Verfahrungsarten zur Berechnung der Logarithmen, welche Neper ſchon angedeutet hatte. Dieſe Einleitung iſt mit Weglaſſung einiger Abſchnitte auch Vlacqs großer Logarithmen-Tafel vorgeſetzt.

133. Da es zu weitläuftig ſeyn würde, die Erörterung des Verfaſſers ſelbſt hier mitzutheilen, ſo werde ich die Methode kurz in ein paar Formeln darſtellen.

Es ſey eine geometriſche Reihe, $1 : a : a^2 : a^3 : a^4$: etc. angenommen, in welcher alſo a die Baſis eines logarithmiſchen Syſtems iſt. Ferner ſey N eine gegebene Zahl, deren Logarithme x in jenem Syſtem geſucht wird, daher $N = a^x$ iſt. Man erhebe N auf eine willkürliche mte Potenz, ſo iſt $N^m = a^{mx}$. Man ſuche m ſo aus, daß N^m nahe eine ganze Potenz von a werde, oder mx nahe eine ganze Zahl ſey. Wird nun mx durch m dividirt, ſo ergiebt ſich der geſuchte Logarithme x deſto genauer, je näher die Potenz N^m einer ganzen Potenz von a kommt.

Z. B. Es ſey $a = 10$, und $N = 2$, ſo iſt $2^{10} = 1024$; $2^{20} = 1048576$. Alſo $2^{10} > 10^3$, und $\log. 2 > 0{,}3$. Die zweyte Gleichung giebt daſſelbe. Ferner iſt $2^{1000} = 107 \ldots |302|$, wo die eingeſchloſſene Zahl die Anzahl der Ziffern in dieſer Potenz angiebt; eben ſo $2^{100000} = 99900 \ldots |30103|$. Der erſtere Werth giebt $2^{1000} > 10^{301}$, alſo $\log. 2 > 0{,}301$. Der andere Werth giebt $\log. 2 < 0{,}30103$, welches mit dem in unſern Tafeln, 0,30102 99956 . . ſehr genau zuſammentrifft. Briggs hat die Rechnung bis zu der Potenz von 2 mit dem Exponenten 100 Billionen verfolgt, und findet dadurch den Logarithmen von 2 bis auf die 14te Decimalſtelle. Auf dieſe Art hat er auch den Logarithmen von 7 eben ſo weit gefunden. Noch zum Beyſpiel gebe ich aus Lamberts Zuſätzen zu den . . Tafeln, S. 119, daß $3^{42} > 10^{20}$, und $3^{44} < 10^{21}$, daher log. 3 zwiſchen 0,4762 und 0,4773. In unſern Tafeln iſt $\log. 3 = 0{,}4771212 \ldots$ Bey dieſem Verfahren iſt es nicht nöthig, die Potenz von N vollſtändig

zu erhalten; ſondern es iſt genug, wenn man nur die Anzahl der Ziffern darin weiß, welches bey einer ſehr abgekürzten Multiplication leicht erhalten werden kann. Auch braucht man bey weitem nicht die Potenzen von N nach der Reihe zu machen. Briggs erklärt inzwiſchen dieſe Methode für beſchwerlicher als die folgende, welche ich auch der Kürze wegen und zur Deutlichkeit durch Formeln darſtellen werde.

134. Es ſey wiederum a die Baſis des Syſtems, und $a^{\frac{1}{m}} = 1 + y$; $a^{\frac{1}{n}} = 1 + y'$. Sind m und n große Zahlen, daher $1 + y$ und $1 + y'$ wenig von der Einheit verſchieden ſind, ſo iſt (23.), $\frac{1}{m} : \frac{1}{n} = y : y'$ nahe, und $\log. (1 + y') = \frac{y'}{y} \log. (1 + y)$. Briggs gründet dieſe Bemerkung auf ſeine numeriſche Rechnung. Der Quotient $\frac{\log. (1 + y)}{y}$ einmahl gefunden, dient den Logarithmen jeder Zahl $1 + y'$ zu finden, wenn y' klein genug iſt, daß jene Proportion mit hinlänglicher Sicherheit Statt findet. Es iſt jener Quotient der Modulus des Syſtems. Briggs treibt die Ausziehung der Wurzeln ſo weit, daß die erſte bedeutende Ziffer von y in die ſechszehnte Decimalſtelle kommt. Er ſucht die Zahlen $1 + y$ durch fortgeſetzte Halbirung des Exponenten von 10, nämlich die Potenzen $10^{\frac{1}{2}}$; $10^{\frac{1}{4}}$; $10^{\frac{1}{8}}$, etc. bis zu $m = 54$. Dadurch findet er auch den Modulus bis auf 18 Ziffern.

135. Den Logarithmus jeder andern Zahl N zu finden, wird aus ihr wiederholt die Quadratwurzel gezogen, bis daß man auf eine Potenz, $N^{\frac{1}{n}}$, kommt, die von der Einheit ſo wenig verſchieden iſt, daß dieſer Ueberſchuß und ihr Logarithme das vorher gefundene Verhältniß ſo nahe haben, als es zur Genauigkeit der Rechnung erfordert wird.

136. Um dieſe immer ſehr mühſame Rechnung etwas abzukürzen, ſuche man von der Zahl N eine ſolche Potenz N^m daß $N^m = (1 + p)\ 10^n$ iſt, wo p ein Decimalbruch iſt, je kleiner je beſſer, das iſt, man muß eine ſolche Potenz von N ſuchen, deren erſte Ziffer linker Hand $= 1$ iſt, und mehrere folgende Ziffern 0 ſind, und dieſe durch eine ſolche Potenz von 10 dividiren, daß p ein Decimalbruch wird. Nun ſucht man, wie vorher angewieſen iſt, den Logarithmen von 1 + p, ſo iſt log. N $= \frac{\log.(1 + p) + n}{m}$. Z. B. es iſt $6^9 = 10077696 = 1{,}0077696 \times 10^7$. Durch fortgeſetzte Ausziehung der Quadratwurzel aus der Zahl 1,0077696 wird der Logarithme von einer Wurzel derſelben bekannt, deren Exponent eine Potenz von 2 iſt, daraus der Logarithme von der Zahl ſelbſt, und log. 6 $= \frac{7 + \log. 1{,}0077696}{9}$.

137. Zur Abkürzung der ſchwierigen Ausziehung der Quadratwurzeln, das iſt, der fortgeſetzten Einſchaltung der mittlern Proportionalen zwiſchen der Einheit und der gegebenen Zahl, wozu der Logarithme gefunden werden ſoll, erſann Briggs die Methode der Differenzen, wovon in dem Artikel, Einſchalten, Th. II. S. 48. ff. ſchon Nachricht gegeben iſt. Er bedient ſich auch der Differenzen, Logarithmen durch Einſchaltung zwiſchen ſchon bekannten zu finden.

138. Die Lücke, welche Briggs in ſeiner Logarithmen-Tafel gelaſſen hatte, konnte ziemlich leicht ausgefüllt werden. Denn alle Zahlen, welche ſich auf 0 oder 5 endigen, ſind Zehnfache oder Fünffache von Zahlen, die in jener Tafel vorkommen. Die Logarithmen dieſer Zahlen, als 64380 ; 64385 ; 64390 ; etc. nach ihrer Folge haben dieſelben Unterſchiedsreihen als die Logarithmen ihrer Fünftheile, 12876 ; 12877 ; 12878 ; etc. Vermittelſt der Unterſchiedsreihen der letztern konnte alſo die Einſchaltung auch hier geſchehen, deſto leichter, da Vlacq nur 10 Decimalſtellen nahm, wo Briggs 14 Stellen

hatte. Wo keine Primzahlen in einer Pentade liegen, konnten die Logarithmen unmittelbar aus den Logarithmen der Factoren der Zahlen gefunden werden. In dem Bezirk von 20000 bis 90000 liegen etwa 6500 Primzahlen.

139. Nicolaus Mercator (Kaufmann), ein Holſteiner von Geburt, der meiſtens in England gelebt hat, wo er im J. 1690 ſtarb, gab im J. 1668 zu London heraus eine Schrift, die er Logarithmotechnia betitelte. Er zeigt darin ein neues Verfahren, wie ſich Logarithmen genau und leicht berechnen laſſen, wobey er ſich allerdings die wiederholten Ausziehungen der Wurzeln erſpart. Er gründet ſein Verfahren ganz auf die Meſſung der Verhältniſſe durch ein ſehr kleines Verhältniß, unterſcheidet auch ſehr genau Maßen und Exponenten der Verhältniſſe. Das Verhältniß 10 : 1 theilt er in 10 Millionen Theile oder ratiunculas. Zuerſt ſucht er die Logarithmen der Verhältniſſe 100,5 : 100, und 100 : 99,5, wo die Glieder gleiche Unterſchiede haben. Dieſe findet er auf die vorher ſchon angeführte Art, daß er Potenzen von 100,5 und 99,5 ſucht, die einer Potenz von 100 nahe kommen, ſowohl von einer Seite als von der andern. Das übrige beruht hauptſächlich auf dem Satze (52.), daß die Maßen der Verhältniſſe, deren Glieder gleiche Unterſchiede haben, (d. i. die Unterſchiede der Logarithmen der Glieder), ſich nahe umgekehrt wie die arithmetiſchen Mittel zwiſchen den Verhältnißgliedern verhalten. Nun hatte er gefunden log. 99 5 = 1,99782307, und log. 100,5 = 2,00216597. Jener iſt in der achten Decimalſtelle um 1 zu klein, dieſer um 9. Der Unterſchied dieſer Logarithmen iſt 0,00434290, das Maß des Verhältniſſes 99,5 : 100,5. Er findet daher durch einen einfachen Proportionalſatz die Logarithmen der Brüche, $\frac{99999}{100000}$; $\frac{99998}{99999}$; $\frac{99997}{99998}$, etc. oder der Verhältniſſe ihrer Zähler und Nenner, deren Unterſchiede = 1 ſind, wie in dem Verhältniſſe 99,5 : 100,5. Man ſetze zur Abkürzung 100 = a; 100000 = b, und

das arithmetiſche Mittel zwiſchen den Zählern und Nennern jener Brüche $= b - c$, ſo iſt $\frac{a}{b-c} \times 0{,}00434290$ der Logarithme des Bruches, für welchen das arithmetiſche Mittel $b - c$ gilt. Mercator löſet den Factor $\frac{a}{b-c}$ in eine Reihe auf, um die Diviſion in eine Multiplication zu verwandeln. Aus den Logarithmen der Brüche werden durch fortgeſetzte Addition derſelben die Logarithmen der Verhältniſſe jedes Zählers zu 100000, und daraus die abſoluten Logarithmen der Zahlen ſelbſt gefunden. Die Probe der Rechnung würde der Logarithme von 10000 ſeyn, der Zähler des Bruches $\frac{10000}{10001}$. Es iſt aber ſehr zu zweifeln, ob dieſer die Probe beſtehen würde, da alle vorhergehende Logarithmen nur genäherte ſind, und dieſes immer weniger, je weiter die Zahlen ſich von 100000 entfernen.

140. Mercator fand auch die Quadratur des Raumes zwiſchen einer gleichſeitigen Hyperbel und ihrer Aſymptote, welche den Geometern ſeiner Zeit viele Freude machte. Seine Methode beſtand in einer Summirung von Potenzen, deren Wurzeln in arithmetiſcher Progreſſion ſtehen, mit unendlich kleinen, gleich großen, Unterſchieden, auf die Art wie die Cavaleriſche Rechnung. Ferner bemerkt er, daß die ſehr kleinen hyperboliſchen Räume zwiſchen zwey immer gleich weit von einander abſtehenden Ordinaten auf dieſelbe Art berechnet werden, wie die Logarithmen der Verhältniſſe zwiſchen zwey ſich ſehr nahe kommenden Zahlen mit gleich großen Unterſchieden. Er bricht aber kurz ab, ohne weder für die hyperboliſchen Räume, noch für die Logarithmen eine Formel zu geben.

141. Mercators Reihe convergirt nicht, wenn die Abſciſſe auf der Aſymptote größer iſt als das doppelte von der Abſciſſe, die zu dem Scheitel gehört, eben ſo als wenn in (23.) z oder $1 + y$ größer iſt als 2. Wallis

fand hier ein Hülfsmittel, wodurch die Progreſſionalgröße der Reihe in jedem Falle ein Bruch iſt. Er ſuchte eine Reihe für die Area zwiſchen irgend zwey Ordinaten. Die Reihe wird dadurch dieſelbe wie für log. z — log. (z-b)
$$= \mathrm{l.}\ \frac{z}{z-b} = -\ \mathrm{l.}\left(1-\frac{b}{z}\right)$$, wo $\frac{b}{z}$ das iſt, was y in 38. Es ſind b und z zwey Abſciſſen auf der Aſymptote.

142. In demſelben Jahre 1668, worin Mercators Logarithmotechnie erſchien, gab Jakob Gregory heraus: Exercitationes geometricae, Londini, 4to. Darin erweiſet er geometriſch die Quadratur der Hyperbel. Er findet nicht allein eine Reihe für die Area von der erſten Ordinate zu dem Scheitelpuncte an, nach der Richtung der Aſymptote neben der Hyperbel hin, ſondern auch für die Area auf der andern Seite jener Ordinate nach dem Mittelpuncte hin. Beide Reihen ſind nur in den Vorzeichen der ungeraden Potenzen ihrer Progreſſionalgröße verſchieden. Daraus findet er alſo eine Reihe ſowol für

$\log.\ \frac{1+y}{1}$ als für $\log.\ \frac{1}{1-y}$, wie in (23; 38.), daher auch für $\log.\ \frac{1+y}{1-y}$, wie in (57.). Mercator hatte den Logarithmen eines ſolchen Bruchs mühſelig geſucht. Daß Gregory ſeine Formel angewandt habe, den Logarithmen jeder gegebenen Zahl mittelſt derſelben zu berechnen, finde ich nicht.

143. In eben dieſer Sammlung zeigte Gregory, daß die Addition der natürlichen Secanten eines Kreisbogens die Logarithmen der Tangenten giebt, ſo wie auch durch die Addition der natürlichen Tangenten die Logarithmen der Secanten entſtehen. Deutlicher: die Area der Curve, woran die Ordinaten die Secanten, und die Abſciſſen ihre zugehörigen Kreisbogen ſind, iſt der Logarithme der zu jedem angenommenen Bogen gehörigen Tangente; und die Area der Curve, woran die Ordinaten die

Tangenten, und die Abſciſſen ihre Bogen ſind, iſt der Logarithme der zugehörigen Secante. S. Linie, abbildende. Der erſte Satz dient zur Conſtruction der Seecharten. Halley hat die Relation zwiſchen den Summen der Secanten und den logarithmiſchen Tangenten auf eine feinere Art als Gregory erwieſen, in den Philoſ. Tranſ. Febr. 1696.

144. Newton hatte ſchon in den J. 1665 oder 1666 durch ſeine Fluxionenrechnung die Quadratur der hyperboliſchen Räume über einer der Aſymptoten gefunden, wie aus einem Briefe an Oldenburg, vom 24. Octob. 1676 erhellt, (Newtoni Opuſc. T. I. p. 332. vergl. Opuſc. I pag 6, et Opuſc. II p. 150. Oder Wallis Werke, T. III. p. 635.) Die Hyperbel iſt die gleichſeitige. Er gebt nicht die combinirten Reihen für $\log (1+y) \pm \log. (1-y)$, deren halbe Summe den $\log. (1+y)$, halber Unterſchied den $\log. (1-y)$ giebt. Zum Beyſpiele nimmt er $y = 0{,}1$ und $y = 0{,}2$. So erhält er die Logarithmen von 0,8 ; 0,9 ; 1,1 und 1,2. Da $\frac{1{,}2}{0{,}8} \times \frac{1{,}2}{0{,}9} = 2$ iſt, ſo wird nun der hyperboliſche Logarithme von 2 bekannt; daher auch der von 8; aus dieſem und dem von 0,8 der log. hyp. 10. Nun ſind ſogleich log. 5 und log. 11 auch gefunden. Nimmt man $y = 0{,}01$; 0,02, oder 0,001 ; 0,002, ſo laſſen ſich aus den Logarithmen von 0,98 ; 0,99; und denen von 0,998 ; 0,999 die Logarithmen der Primzahlen 7 ; 13, 17, 37, etc. herleiten. In der Methodus fluxionum et ſerierum infinitarum, Opuſc. T. I. p. 150, kommen alle drey Reihen, die von Mercator, Wallis und Gregory angegebenen, vor. Daſelbſt giebt Newton eine Formel zur Interpolation des Logarithmen einer Zahl, die zwiſchen zwey andern Zahlen, deren Logarithmen bekannt ſind, das arithmetiſche Mittel iſt. Bey dieſer iſt er aber durch ſeine geometriſche Conſtruction zu einem Umſchweife veranlaßt worden. Es iſt, um bey ſeinen Bezeichnungen zu bleiben, $\log. nat. n - \log. (n - x) =$

$\log.\frac{n}{n-x} = -\log.(1-\frac{x}{n}) = \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + \frac{x^3}{3n^3}$ + etc. und $\log.(n+x) - l.(n-x) = l.(1+\frac{x}{n}) - l.(1-\frac{x}{n}) = \frac{2x}{n} + \frac{2x^3}{3n^3} +$ etc.
Dieſe letztere Reihe nennt Newton $= 2d$, und ſetzt

$$\log.n - \log.(n-x) = \frac{\frac{dx}{2n} + \frac{dx^2}{2n^2} + \frac{dx^3}{3n^3} + \text{etc.}}{\frac{x}{n} + \frac{x^3}{3n^3} + \frac{x^5}{5n^5} + \text{etc.}},$$

woraus er durch Diviſion herleitet,

$$\log.n - \log.(n-x) = d + \frac{dx}{2n} + \frac{d^3x^3}{12n^3} + \text{etc.}$$

In der That iſt aber der Factor d im Zähler gleich dem Nenner. Die erſte Formel für $l.\,n - l.\,(n-x)$ iſt nicht allein ſchon hinreichend, ſondern iſt auch für jeden kleinen Werth von x brauchbar.

In derſelben Schrift (p. 177.) findet er auch die Reihe für die Zahl durch den Logarithmen, mittelſt ſeiner Methode, die Wurzeln einer Gleichung durch eine Reihe anzugeben. Die Rechnung iſt nur ein Beyſpiel zu der Aufgabe, aus der Area einer Curve die Abſciſſe und Ordinate herzuleiten. Dieſe Schrift iſt erſt 1736 bekannt gemacht.

145. Leibnitz fand die Reihe, welche die Zahl $1+y$ oder $1-y$ durch ihren Logarithmen angiebt. Dieſes hat er in einem Schreiben an Oldenburg vom J. 1676 gemeldet. Er hat ſie durch Umkehrung gefunden. In dieſem Schreiben, ſo wie in einem Aufſatze, in den Actis Erud. Febr. 1682, giebt er blos die Reihe für log. 2, welche bey ihm iſt $\frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{120} +$ etc. das iſt $\frac{1}{4}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} -$ etc.), mit je zwey zuſammen gezogenen Brüchen. Er ſetzt das gegebene Rechteck an der Hyperbel $= \frac{1}{4}$, welches ſo viel iſt, als den Modulus $= \frac{1}{4}$ nehmen, da es für die natürlichen Logarithmen $= 1$ iſt.

146. Halley lieferte in den engliſchen Transactionen für das J. 1695 eine Abhandlung über die bequemſte Berechnungsart der Logarithmen, ohne Rückſicht auf die Hyperbel, wobey er zugleich die ganze Theorie der Logarithmen entwickelte. Anſtatt der bis dahin gewöhnlichen Erklärung der Logarithmen, daß ſie ſeyn numerorum proportionalium aequidifferentes comites, ſetzte er dieſe: numeri rationem exponentes. Er gründet die Theorie derſelben ganz auf den Begriff von Zuſammenſetzung der Verhältniſſe. Das Verhältniß zweyer Zahlen ſetzt er aus einer unendlichen Menge von Elementarverhältniſſen (ratiunculis) zuſammen. Nun werde der Logarithmus des Verhältniſſes $1 : 1 + q$ geſucht. Man ſchalte zwiſchen den beiden Gliedern $m - 1$ Proportionalen ein, (dadurch wird das Verhältniß aus m gleich großen Verhältniſſen zuſammengeſetzt), ſo iſt $(1 + q)^{\frac{1}{m}}$ die erſte derſelben nach 1, und $(1+q)^{\frac{1}{m}} - 1$ verhält ſich wie der geſuchte Logarithme. Nun entwickelt Halley die mte Wurzel aus $1 + q$ nach dem binomiſchen Lehrſatze, läßt die niedrigern Potenzen von m gegen die höchſte in jedem Coefficienten weg, und ſo wird

$$(1+q)^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{1}{m}(q - \tfrac{1}{2}q^2 + \tfrac{1}{3}q^3 - \tfrac{1}{4}q^4 + \text{etc.}).$$

Den Theil rechter Hand nennt Halley den Logarithmen von $1 + q$, und ſagt, der unendliche Index m könne nach Gefallen angenommen werden; ſetze man $m = 1000000$ etc. ſo erhalte man Nepers Logarithmen. Dieſe Darſtellung iſt wegen des unendlichen großen Diviſors zu einer endlichen Größe undeutlich. Man muß noch in Gedanken einen unendlich großen Multiplicator zufügen. Deutlicher wäre folgendes. Da das Maß des Verhältniſſes $1 : 1 + q$ durch den Logarithmen deſſelben angegeben werden ſoll, ſo iſt, wenn dieſer durch L bezeichnet wird, $\frac{1}{m}L$ das Maß des Elementar-Verhältniſſes $1 : (1 + q)^{\frac{1}{m}} - 1$.

Da die Einheit bey allen Maßen willkürlich iſt, ſo kann man dieſes Maß zu dem Hintergliede $(1+q)^{\frac{1}{m}} - 1$ in irgend einem Verhältniſſe annehmen. Beide ſind unendlich kleine Größen. Setzt man $\frac{1}{m} L = M[(1+q)^{\frac{1}{m}} - 1]$, ſo iſt $L = M(q - \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 - \frac{1}{4}q^4 + \text{etc.})$, wo $M = 1$ die natürlichen Logarithmen giebt.

Auf gleiche Art verhält ſich der Logarithme des Verhältniſſes $1 : 1 - q$, wie $\frac{1}{m}(q + \frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{3}q^3 + \frac{1}{4}q^4 +$ etc.). Halley nimmt hier die abſolute Größe des Logarithmen. Der Gebrauch des Negativen war ihm, als Geometer aus der Schule der Alten, fremde. Er vermeidet es auf folgende Art.

Wenn der Logarithme eines Verhältniſſes $a : b$ geſucht wird, ſo läßt ſich dieſer auf zweyerley Art angeben. Es iſt nämlich $a : b = 1 : 1 + \frac{b-a}{a}$, und auch $a : b = 1 - \frac{b-a}{b} : 1$, wobey b größer als a geſetzt wird. Nach dem erſtern Ausdruck iſt $q = \frac{b-a}{a}$, nach dem zweyten iſt $q = \frac{b-a}{b}$. Nach jenem iſt nun $\log. \frac{b}{a} = \log. (1+q)$; nach dieſem iſt $\log. \frac{a}{b} = \log. (1-q)$. Dort wird die erſte logarithmiſche Reihe mit den ungleichnamigen Gliedern, hier die zweyte mit den gleichnamigen Gliedern gebraucht. Es iſt aber, wenn wir die Logarithmen der eigentlichen Brüche von denen der uneigentlichen durch die Negation unterſcheiden, $\log. \frac{a}{b} = -\log. \frac{b}{a}$.

Da log. $(1-q)$ alſo negativ iſt, ſo iſt log. $\frac{b}{a} = - \log. (1-q)$, eine poſitive Größe. Halley nimmt das Elementarverhältniß zu $1 : 1 - q$ mit dem $1 : 1 - q$ gleichnamig oder beide abnehmend, ihre Logarithmen auch gleichnamig, ohne Rückſicht auf das Elementarverhältniß zu dem $1 : 1 + q$. Er betrachtet beide Fälle für $1 : 1 + q$ und $1 : 1 - q$ jede unabhängig von einander, wie man es in der alten Geometrie gewohnt iſt.

147. Hierauf ſetzt Halley das Verhältniß $a : b$ aus den Verhältniſſen $a : \frac{1}{2}(a+b)$ und $\frac{1}{2}(a+b) : b$ zuſammen, und log. $(a : b)$ aus den Logarithmen dieſer beiden Verhältniſſe. Es iſt $a : \frac{1}{2}(a+b) = 1 - \frac{b-a}{a+b} : 1$. Der Logarithme dieſes Verhältniſſes wird durch die zweyte Reihe mit gleichnamigen Gliedern ausgedruckt. Zweytens iſt $\frac{1}{2}(a+b) : b = 1 : 1 + \frac{b-a}{a+b}$. Der Logarithme dieſes Verhältniſſes wird durch die erſte Reihe angegeben. Beide Reihen zuſammen genommen geben den log. $(a : b)$. Die Reihe iſt die in (57.) für log. $\frac{1+y}{1-y}$ gefundene, nur daß dort der Modulus $= 1$ geſetzt iſt. Halley findet ferner den Logarithmen des Verhältniſſes $ab : \frac{1}{4}(a+b)^2$ durch den Unterſchied der Verhältniſſe $a : \frac{1}{2}(a+b)$ und $\frac{1}{2}(a+b) : b$, das iſt durch die Subtraction des Logarithmen des letztern von demjenigen des erſtern. Das zweyte Verhältniß iſt das umgekehrte von dem bey der Addition der Verhältniſſe. Die Halbirung des Logarithmen giebt den von dem Verhältniſſe $\sqrt{ab} : \frac{1}{2}(a+b)$. Eine noch mehr convergirende Reihe findet er, indem er das Verhältniß $ab : \frac{1}{4}(a+b)^2$ aus zweyen zuſammenſetzt, eben ſo wie vorher das $a : b$. Hier nimmt er $b = a + 1$. Dieſe beiden Reihen ſind die oben (61; 62.) angegebenen. Beide Reihen gehören Halley eigen. So

auch die Reihe, welche eine Zahl durch ihren Logarithmen angiebt. Er findet ſie auf eine ähnliche Art, wie ſie in (28.) gefunden iſt. Newtons Umkehrungsmethode war um das J. 1695 kaum bekannt, und Leibnitzens Reihe iſt erſt durch das Commercium epiſtolicum, (ſ. Th. I. S. 849.) der Welt mitgetheilt worden. Halleys Methoden, Logarithmen und Zahlen, eins aus dem andern zu finden, ſind ſich analog, und machen ein Ganzes aus. Sie haben mit der von mir (18—29) vorgetragenen Theorie viel ähnliches.

148. In England haben ſelbſt geſchickte Mathematikverſtändige Halley's Vortrag dunkel und ſchwer gefunden. Das veranlaßte Francis Maseres in ſeiner Sammlung logarithmiſcher Schriften der Halleyiſchen Abhandlung einen Commentar beyzufügen. Gleich anfangs geſteht er aber offenherzig, daß er die beiden logarithmiſchen Reihen nach q, und die umgekehrte für die Zahl zu einem Logarithmen nie habe völlig verſtehen können. Die vorher gegebene Erläuterung wird hoffentlich alle Schwierigkeit heben. So dunkel, als Halley's Aufſatz nach Maseres in England durchgängig gefunden wird (Vol. I. Pref. VI. Vol. II. p. 92.), iſt er doch wahrlich nicht. Die von Maseres zu dem übrigen beygefügten Anmerkungen und Erweiterungen nehmen 30 Quartſeiten ein. Noch fügt M. einen Anhang bey, auch 30 S. ſtark, worin er die Berechnung der Logarithmen blos durch Hülfe des binomiſchen Lehrſatzes zeiget. Ein Commentar über Halley's Methode ſcheint zu ſeyn: An essay on Logarithms by Andrew Reid, London, 1767. Der Verf. zeigt darin, wie die Berechnung der Logarithmen aus dem binomiſchen Lehrſatze hergeleitet wird. Halley's Formeln erläutert er durch viele Beyſpiele.

149. Der binomiſche Lehrſatz iſt der eigentliche Grund, worauf die ganze Lehre von den Logarithmen beruht, man mag entweder mit Halley unmittelbar daraus die beiden logarithmiſchen Reihen für Logarithme und Zahl entwickeln, oder man mag aus der Gleichung, $z = a^x$,

durch Hülfe der Differentialrechnung die Reihe für den Logarithmen x herleiten. Bey weitem die meiſten Schriftſteller haben aber die Rechnung hier von der Geometrie abhängig gelaſſen. Bey den ältern Analyſten war dies ganz in der Regel, weil ſie alle analytiſche Unterſuchungen auf geometriſche Betrachtungen gründeten, oder doch die Reſultate der Rechnung durch geometriſche Conſtructionen darſtellten. So waren es hier die Hyperbel und die logarithmiſche Linie, welche die Differentialgleichung an die Hand geben mußten, jene durch die Flächenräume, welche den Logarithmen der zugehörigen Abſciſſen auf der Aſymptote proportional ſind; dieſe durch die Subtangente, welche an ihr eine unveränderliche Länge hat. In unſern Lehrbüchern von Käſtner, Karſten, Tempelhof, Segner iſt die logarithmiſche Differentialgleichung aus Betrachtung einer Figur hergeleitet. Der Beweis, den Segner in den Elem. Anal. Infin. P. I. §. 203. etc. giebt, iſt in der That identiſch, oder ſagt nichts mehr, als $d.\ \log.\ y = d.\ \log.\ y$. In Mitterpachers Analyſis, welche Pasquich herausgegeben hat, iſt die Reihe für den Logarithmen einer Zahl durch Hülfe des binomiſchen Lehrſatzes gefunden, doch mit Zuziehung eines Poſtulats, daß immer $a^m = m\mu + 1$ gemacht werden könne. Dieſes hat keinen Zweifel, wenn μ ſo wie m veränderlich iſt. Aber der Factor μ wird der Modulus des Syſtems, und iſt daher ſtillſchweigends als eine unveränderliche Größe betrachtet. Es iſt aber wirklich μ veränderlich. Denn wenn $a = 1 + b$ geſetzt wird, ſo wird μ eine Function von m, die mit m veränderlich iſt. Pasquich ſelbſt hat in den Elementis Analyseos et Geometriae sublimioris, Cap. I. durch die Methode der unbeſtimmten Coefficienten beide Reihen für Logarithmen und Zahl, ohne Hülfe des binomiſchen Lehrſatzes, herausgebracht, blos mit Zuziehung des Satzes, daß $\Delta \log.\ (1 + z) = \log.\ \left(1 + \frac{\Delta z}{1 + z}\right)$ iſt. Es iſt nämlich $\Delta \log.\ (1 + z) = \log.\ (1 + z + \Delta z)$

$-\log.(1+z) = \log.\left(1+\frac{\Delta z}{1+z}\right)$. Die Entwickelung der erſten Reihe iſt ſehr einfach; die der zweyten konnte mittelſt jener kürzer bewerkſtelligt werden.

150. Euler möchte nach Halley der erſte ſeyn, der die logarithmiſchen Reihen ganz auf den binomiſchen Lehrſatz gründete. In der Introd. in Anal. Infin. Cap. VII. ſetzt er $a^\omega = 1 + k\omega$, wenn ω unendlich klein iſt, ſo daß k eine beſtimmte Größe hat, die von a abhängt. (Wenn $a = 1 + b$ geſetzt wird, ſo giebt der binomiſche Lehrſatz, bey einem verſchwindenden ω, $k = b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \text{etc.}$). Nun ſetzt Euler die endliche $z = i\,\omega$, wo i unendlich groß iſt. So iſt $a^z = (1 + k\omega)^i$, oder $a^\omega = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)$. Dieſe Potenz entwickelt, giebt, wenn die unendlichen Factoren gegen einander aufgehoben werden, $a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1.2} + \frac{k^3z^3}{1.2.3} + \text{etc.}$ Die Reihe für z wird durch $a^z - 1$ auf ähnliche Art gefunden.

151. La Grange ſetzt an dieſer Herleitung aus, daß die Anwendung des Unendlichen, wenn ſie gleich überhaupt zuläſſig ſey, doch zur Begründung der Elementarlehren nicht die Augenſcheinlichkeit und Schärfe habe, welche bey dieſen erforderlich iſt. (Théorie des fonctions analytiques 22.). Er trägt deßwegen einen Beweis vor, der ebenfalls ganz auf dem binomiſchen Lehrſatz gegründet, aber völlig frey von der Einmiſchung des Unendlichen iſt. Da dieſer Beweis durch die dabey gebrauchte Schlußart merkwürdig iſt, ſo verdient er allerdings hier mitgetheilt zu werden.

152. Es ſey $y = a^x$, wo y eine Zahl in dem Syſtem mit der Baſis a, und x der zugehörige Logarithme iſt. Der Potenz a^x gebe man dieſe Form, $[(1 + a - 1)^n]^{\frac{x}{n}}$, und entwickele ſie nach dem bino-

Nn

miſchen Lehrſatze. Da n eine ganz willkürliche Zahl iſt, ſo hat ſie auf den Werth der Potenz gar keinen Einfluß, und es müſſen daher alle Glieder, welche n enthalten, ſich gegen einander aufheben. Auf dieſer Bemerkung beruht der ganze Beweis, und dieſer zufolge muß die in eine Reihe entwickelte Potenz nach den Potenzen von n geordnet werden. Zuerſt iſt, wenn 1 als der erſte Theil, a — 1 als der zweyte angeſehen wird,

$$(1 + a - 1)^n = 1 + n(a-1) + \frac{n.n-1.}{1.2}.(a-1)^2 + $$

etc. Dieſe Reihe werde nach den Potenzen von n geordnet, und die Coefficienten derſelben ſeyn durch A, B, C, etc. bezeichnet, ſo iſt

$$(1 + a - 1)^n = 1 + An + Bn^2 + Cn^3 + \text{etc.}$$

Hier iſt es nur nöthig, den Coefficienten A zu kennen. Es iſt, wie man leicht ſieht,

$$A = a - 1 - \tfrac{1}{2}(a-1)^2 + \tfrac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.}$$

Nun entwickele man die Potenz $(1 + An + Bn^2 + \text{etc.})^{\frac{x}{n}}$, wo 1 der erſte Theil iſt, und alles übrige den zweyten Theil ausmacht. Ich bezeichne dieſen zweyten Theil zur Abkürzung durch Pn, ſo iſt

$$y = 1 + \frac{x}{n}Pn + \frac{x.x-n.}{n.2n}P^2n^2 + \frac{x.x-n.x-2n.}{n.2n.3n}P^3n^3 + \text{etc.}$$

das iſt,

$$y = 1 + x.P + \frac{x.x-n.}{1.2}P^2 + \frac{x.x-n.x-2n.}{1.2.3}P^3 + \text{etc.}$$

Hier muß ſich alles aufheben, was die willkürliche Zahl n enthält. Dadurch bleiben von den Coefficienten blos die Theile x; $\frac{x^2}{1.2}$; $\frac{x^3}{1.2.3}$; etc. und von P der Theil A. Solchergeſtalt wird

$$y = a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Die Reihe für x durch y oder durch (y — 1) wird auf ähnliche Art gefunden. Man gebe der Gleichung $a^x = y$ dieſe Form:

$$(1 + a - 1)^{nx} = (1 + y - 1)^n,$$

und entwickele beide Theile der Gleichung, laſſe diejenigen Glieder, welche n enthalten, weg, ſo wird

$$x = \log . y = \frac{1}{A}(y - 1 - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \text{etc.}).$$

Dieſe Herleitung beider Reihen iſt ſehr einfach und ſinnreich. Ein Geometer des Alterthums möchte nur verlangen, auch noch bewieſen zu ſehen, welchergeſtalt die Glieder, welche n enthalten, ſich aufheben.

153. Vorher hatte la Grange die Gleichung $y = a^x$ zu Beyſpielen gebraucht, ſeine Derivationsmethode einer Function, f (x + u), aus der fx zu zeigen. Dieſe Methode iſt in dem Artikel, Differenzen-Rechnung, 15 — 40 erklärt worden. Die gedoppelte Entwickelung jener Gleichung iſt daſelbſt 24. 25. gewieſen. Es iſt da aus der Lehre von den Logarithmen als Hülfsſatz hergenommen, daß die Gränze des Quotienten $\frac{a^u - 1}{u}$ eine beſtimmte Größe iſt. Dieſes kann auch leicht unabhängig erwieſen werden. Denn wenn $a = 1 + b$ geſetzt wird,

ſo iſt $a^u = 1 + ub + \frac{u.u-1.}{1.2}b^2 + \text{etc.}$ und

$$\frac{a^u - 1}{u} = b + \frac{u-1}{1.2}b^2 + \frac{u-1.u-2.}{1.2.3}b^3 + \text{etc.}$$

wovon die Gränze, oder der von u unabhängige Theil, iſt $b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \text{etc.}$ eine durch a gegebene Größe. Bey den Entwickelungen der Werthe von log. x und a^x a. a. O. iſt es dienlich, die letztere jener vorgehen zu laſſen. In 25. daſelbſt vertauſche man den

Exponenten u von a^u mit x, um die Reihe für a^x, die vorgegebene Potenz, zu erhalten. Zu der Reihe für log. $(x + u)$ ſetze man noch dieſe, durch Abziehung von log. x auf beiden Seiten der Gleichung, entſtehende,

$$\log.(1 + \frac{u}{x}) = \frac{cu}{x} - \frac{cu^2}{2x^2} + \frac{cu^3}{3x^3} - \text{etc.}$$

154. Die Methode der unbeſtimmten Coefficienten in Verbindung mit der Entwickelung der Differenzen-Reihen hat L'Huilier auf eine ſinnreiche Art angewandt, in ſeinen Principiis calculi differentialis et integralis. In der Preisſchrift, woraus dieſes Werk erwachſen iſt, hatte der Verfaſſer die Theorie der Logarithmen auf die Betrachtung der logarithmiſchen Linie gegründet. Es ſey

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.}$$

Man ſetze nach der Reihe für x die Zahlen x, 2x, 3x, 4x, etc. und nehme von den Potenzen der Zahl a^x ſowol als von den Reihen die erſten, zweyten und folgenden Differenzen. Von den Potenzen werden die Anfangsglieder der Differenzen die Producte, $(a^x - 1)a^x$; $(a^x - 1)^2 a^x$; $(a^x - 1)^3 a^x$; $(a^x - 1)^4 a^x$; etc. Das erſte Glied dieſer Producte, wenn ſie mittelſt der Reihe für a^x entwickelt werden, iſt $A^n x^n$, wo n die Ordnungszahl der Differenzreihe iſt. Die Differenzen der Reihen ſelbſt enthalten in den Anfangsgliedern (die hier Reihen ſind) die Differenzen der Potenzen der natürlichen Zahlen, verbunden mit den Coefficienten A, B, C, D, etc. ſo viele ihrer nicht durch das fortgeſetzte Abziehen verſchwunden ſind. Z. B. in dem Anfangsgliede der erſten Differenzreihe kommt zu D die Differenz $2^4 - 1^4$ als Factor; in der zweyten die Differenz $(3^4 - 2^4) - (2^4 - 1^4)$, u. ſ. f. nach dem Geſetze, das in dem Artikel, arithmetiſche Reihen höherer Ordnungen (2.), angegeben iſt. In der vierten iſt das beſtändige Glied 1. 2. 3. 4. D (eb. daſ. 23.). Das Anfangsglied der vierten Differenzreihe hat nun zum erſten Terminus das Glied 1. 2. 3. 4. Dx^4, weil die Termini

mit niedrigern Potenzen von x durch das wiederholte Abziehen jedes Gliedes von dem folgenden verſchwunden ſind. Jenes Glied iſt gleich dem erſten Terminus des Anfangsgliedes der vierten Differenzreihe der obigen Producte, das iſt $A^4 x^4$. Daher iſt $D = \frac{A^4}{1.2.3.4}$. Der erſte Coefficient A bleibt unbeſtimmt. Er iſt das Reciproke des Modulus des Syſtems.

Die Reihe für den Logarithmen durch die Zahl findet L'Huilier auf folgende Art, bey deren Angabe ich aber für die Reihen eine abkürzende Bezeichnung gebrauchen will.

Es ſey $a^x = 1 + Px$, und $a^{\Delta x} = 1 + Q\Delta x$; auch ſey $n\Delta x = x$, und $a^x = 1 + y$. Es iſt nun $a^{n\Delta x} = (1 + Q\Delta x)^n$, daher $Q\Delta x = (1 + y)^{\frac{1}{n}} - 1$, und daraus $Qx = n\left((1 + y)^{\frac{1}{n}} - 1\right)$. Aus dem Reihenwerthe von a^x folgt, daß die Gränze von $\frac{a^x - 1}{x}$ iſt A, wenn x ohne Ende vermindert wird; alſo iſt von $\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ die Gränze = A, das iſt, die Gränze von Q iſt = A. Die Gränze des Products $n\,[(1 + y)^{\frac{1}{n}} - 1]$ iſt $y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 +$ etc. Folglich iſt $x = \frac{1}{A}(y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \text{etc.})$.

Noch ein anderes Verfahren, das blos auf die Methode der unbeſtimmten Coefficienten gegründet iſt, hat L'Huilier in ſeiner Anleitung zur Elementar-Algebra, Th. II. §. 191. 199. gebraucht.

155. Bürja hat in dem Leipziger Magazin für die Mathematik, 1. St. 1786, und ſehr ausführlich in den

Mém. de l'Acad. de Berlin pour 1786, 87 et 1788, 89 eine Methode angegeben, wie der Logarithme einer Zahl für jede Baſis, ohne Hülfe der analytiſchen Formeln, berechnet werden kann. Bey allem, was für die Berechnung der Logarithmen erdacht iſt, hatte er doch eine Methode verwißt, die zugleich direct und elementariſch wäre. Beides iſt in der That die Methode dieſes Mathematikers, aber zur Berechnung eines Canons doch bey weitem nicht ſo bequem als die analytiſchen Formeln, wiewol ſie bequemer ſeyn mag, als die von den ältern Rechnern gebrauchten Methoden. Sie beruht auf folgenden Bemerkungen. Es ſey eine Zahl $z = a^{3,467}$, ſo iſt $z = a^3 . a^{0,4} . a^{0,06} . a^{0,007}$. Es iſt daher, um den Logarithmen aus der Zahl oder umgekehrt zu finden, nöthig, diejenigen Potenzen von der Baſis a zu berechnen, deren Exponenten, erſtlich die Einer, die Zehner, die Hunderte ſind, ſo weit als man es für nöthig erachtet; dann die Brüche 0,9; 0,8; ... 0,1; ferner 0,09; 0,08 ... 0,01; weiter 0,009; 0,008 ... 0,001, u. ſ. f. Dann kann man mittelſt ſucceſſiver Diviſionen aus der Zahl z die Factoren, alſo die Theile des Logarithmen finden. Aus dem Logarithmen hat man die Factoren des Products, alſo die Zahl z. Bürja hat eine Tafel der Zahlen zu jenen Exponenten oder Logarithmen, für a = 10, berechnet, in welcher der letzte Logarithme iſt die 1 in der 16ten Decimalſtelle. Er hat noch eine Methode angegeben, auch ohne eine ſolche Hülfstafel die Logarithmen zu finden, wobey dieſe in Form eines Kettenbruches erſcheinen.

156. Eine Theorie der Logarithmen, ganz auf den Begriff von Verhältniſſen gebaut, die ein Anhang zu Euklids Lehre von den Verhältniſſen ſeyn könnte, iſt in Roberti Simsoni Operibus reliquis, Glasguae, 1776. enthalten. Von der Berechnung der Logarithmen iſt daſelbſt nicht die Frage.

Als Commentar über Nepers Theorie der Logarithmen kann dienen, was Maclaurin über Logarithmen und ihre Fluxionen vorträgt, Treatise on Fluxions

Chap. VI. Alles iſt hier auch auf Vergleichung von Verhältniſſen gebauet.

157. Es wird jetzt nur noch übrig ſeyn, von einigen numeriſchen Berechnungen der Logarithmen Nachricht zu geben.

Abraham Sharp, der größte Rechner ſeiner Zeit (geſt. 1742 im 91ſten J. ſeines Alters), machte ſich verdient durch ſehr weit getriebene Berechnungen von Logarithmen. Er berechnete die Logarithmen aller Primzahlen unter 1100 bis auf 60 Stellen ohne die Charakteriſtik, auch die Logarithmen der Zahlen von 999981 bis 1000015, eben ſo weit, zu dem Zwecke, den Logarithmen jeder Zahl eben ſo weit und umgekehrt zu finden, wie oben (92.) erklärt iſt. Seine Methode, Logarithmen leicht zu berechnen, ſteht in Gardiners Ausgabe von Sherwins mathematiſchen Tafeln. Flamſtead, Halley und andere Mathematiker ſeiner Zeit gebrauchten Sharp häufig zu verwickelten und mühſamen Rechnungen.

James Dodſon gab im J. 1742 einen Canon der Logarithmen heraus, den er Antilogarithmic Canon nannte, weil darin die Logarithmen in arithmetiſcher Progreſſion fortgehen, die Zahlen alſo in geometriſcher. Es ſind darin alle Logarithmen unter 100000 mit dem Unterſchiede = 1, und die zugehörigen Zahlen bis auf 11 Ziffern, zugleich mit ihren Unterſchieden und Proportionaltheilen enthalten. Die Berechnung iſt durch wiederholte Einſchaltungen gemacht. Zuerſt ſind zwiſchen 1 und 10 neun geometriſch Proportionale eingeſchaltet, zwiſchen je zweyen dieſen wiederum neun Proportionale, welche Einſchaltungen noch dreymahl wiederholt ſind. Bey der letztern genügte es, ſie durch Hülfe der Unterſchiede zu machen.

Wolfram, ein holländiſcher Artillerie-Officier, hat die natürlichen Logarithmen aller Primzahlen unter 10000 berechnet bis zu der 48ſten Decimalſtelle. Sie ſind in Schulzens Sammlung mathematiſcher Tafeln, und daraus in Vega's großer Sammlung mit einigen Ergänzungen und Berichtigungen abgedruckt. Von den erſten

2200 Zahlen ſind hier alle vorhanden; bis zu 6000 ſind die durch 2, 3, 5, auch einige andere leicht theilbare Zahlen ausgelaſſen; von 60000 an finden ſich nur die Primzahlen. Den braven Rechner lernt man näher kennen aus Lamberts deutſchem Briefwechſel, IV. Bande.

Die neuen trigonometriſchen Tafeln für die Decimaleintheilung des Quadranten berechnet von Hobert und Ideler erforderten eine neue Berechnung der Logarithmen der Sinus und Tangenten. Wie ſie dabey verfahren ſind, findet man in der lehrreichen Einleitung.

Als man im Anfange der franzöſiſchen Republik bey allen Maßen die Decimal-Eintheilung einführte, wurden auch neue Tafeln der trigonometriſchen Linien und ihrer Logarithmen erforderlich. Dieſer Unternehmung wollte man, wie allem, was auf das neue franzöſiſche Maßen-Syſtem Bezug hatte, einen auszeichnenden Charakter der Größe und Vorzüglichkeit geben, und trug dem Director der zur Verfertigung eines Lagerbuchs angeſetzten Commiſſion (Bureau du cadastre), Prony, auf, Tafeln berechnen zu laſſen, welche nicht allein äußerſt genau wären, ſondern auch durch ihren Umfang alles, was bisher ausgeführt oder nur entworfen worden, übertreffen ſollten. Das coloſſaliſche Werk iſt auch ausgeführt, aber noch nicht durch den Druck gemein gemacht. Einige Mathematiker vom erſten Range lieferten die Formeln und die Methode, wie die Differenzen bey der Rechnung gebraucht werden ſollten. Sieben oder acht in analytiſchen und numeriſchen Rechnungen geübte Männer berechneten nach den allgemeinen Formeln an beſtimmten Stellen die Zahlen und die zugehörigen Differenzen von mehrern Ordnungen bis auf diejenige, die als eine beſtändige betrachtet ward. Mittelſt der beſtändigen Differenzen füllten gemeine Rechner die Differenzen-Reihen und die Hauptreihe, von einer Anfangsſtelle bis zu einer Schlußſtelle aus, die für einen folgenden Abſchnitt wieder die Anfangsſtelle ward. Da dieſe zum voraus berechnet war, ſo konnte man die Rechnungen dadurch prüfen.

Dieſe mechaniſchen Rechnungen wurden von 60 bis 80 Leuten ausgeführt. Alles ward zweymal berechnet.

Die natürlichen Sinus ſind für jedes Zehntauſendtheilchen des Quadranten auf 25 Decimalſtellen mit ſieben oder acht Differenzenreihen berechnet. — Die Logarithmen der Sinus für jedes Hunderttauſendtheilchen des Quadranten auf 14 Decimalſtellen mit fünf Differenzenreihen. — Die Logarithmen der Verhältniſſe der Sinus zu ihren Bogen für die 5000 erſten 100000theilchen des Quadranten auf 14 Decimalſtellen mit drey Differenzenreihen. — Die Logarithmen der Tangenten. — Die Logarithmen der Verhältniſſe der Tangenten zu den Bogen. — Die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 auf 19 Decimalſtellen. — Die Logarithmen der Zahlen von 10000 bis 200000, auf 14 Decimalſtellen mit fünf Differenzenreihen.

Der Druck iſt angefangen, aber durch den Fall des Papiergeldes unterbrochen worden. Die Tafeln würden, außer einer ausführlichen Einleitung, 1200 Folioſeiten eingenommen haben. In dem Abdrucke ſollten ein paar Ziffern weggelaſſen werden. Die Tangenten und die Secanten ſind nicht berechnet worden.

Dieſe Nachrichten ſind aus der Notice sur les grandes tables logarithmiques et trigonométriques, calculées au Bureau du Cadastre, à Paris An IX. genommen.

158. Von den vorzüglichſten logarithmiſchen Tafeln iſt ſchon in dem Artikel, Cyklotechnie, Nachricht gegeben. Mehrere literariſche Nachrichten liefern

Scheibels Einleitung zur mathematiſchen Bücherkenntniß, VII. St. S. 3—88. XI. S. 403—417.

Käſtners aſtronomiſche Abhandlungen. Zweyte Sammlung S. 1—79. — Fortſetzung der Rechenkunſt. S. 79—107, worauf noch einige Anwendungen folgen. — Geſchichte der Mathematik. III. Bd. S. 13—18, und 70—100.

Murhards Literatur der mathem. Wiſſenſchaften. II. Bd. S. 181—199.

159. Francis Maſeres hat eine Sammlung von Schriften über Logarithmen und einige damit verbundene Gegenſtände in drey ſtarken großen Quartbänden herausgegeben: Scriptores Logarithmici; or a Collection of ſeveral curious tracts on the nature and construction of Logarithms. London 1791 — 1796. Es wird noch ein vierter Band hinzugekommen ſeyn. In dem erſten Bande befinden ſich die ausführliche Vorrede von Hutton zu ſeiner Ausgabe von Sherwins Tafeln, die größtentheils die Logarithmen betrifft, 121 S. ſtark; Keplers beide Schriften ſelbſt mit den Tafeln; Mercators Logarithmotechnie, nebſt einer Abhandlung über das Größte und Kleinſte von Ricci, welche der Logarithmotechnie beygedruckt worden iſt; Aufſätze von Brounker und Wallis aus den Tranſactionen, und ſehr weitſchweifige Bemerkungen des Herausgebers über dieſe Aufſätze 150 S. lang. — In dem zweyten Bande drey Abhandlungen und ein Schreiben von Jakob Gregory; zwey Schreiben von Newton, und eines von Leibnitz; das zwölfte Capitel aus Wallis's Algebra, und ein Schreiben deſſelben über die Summe der Secanten; Speidells Logarithmotechnie; Halleys Aufſatz über die Vergleichung der logarithmiſchen Tangenten mit der Summe der Secanten; deſſelben Formeln für die Logarithmen und des Herausgebers Erläuterungen darüber. Fünf Abhandlungen des Herausgebers über Newtons Binomialtheorem auf 225 S. und Landens Erweis durch die von ihm ſo ſogenannte Residual Analysis; endlich noch drey Abhandlungen des Herausgebers über Cardans Regel auf 202 S. — Den dritten Band eröffnet eine Vorrede von 104 Seiten. Dann folgen: zwey Stücke aus Jakob Bernoulli's Buche de arte conjectandi, betreffend den binomiſchen Lehrſatz, die Verſetzungen, Combinationen und Summen der Potenzen natürlicher Zahlen, mit einem Anhange von dem Herausgeber; Sharps Methode Logarithmen zu berechnen; deſſelben Methode die natürlichen Sinus, Tangenten und Secanten zu berechnen (auch in Gardiners Ausgabe von Sherwins Tafeln);

verſchiedene Abhandlungen über die Rectification des Kreiſes von Halley, Sharp, Machin, Hutton, Euler, Hellins und dem Herausgeber; drey Abhandlungen von dem letztern über Summirungen von Reihen, und über die Umkehrung der Reihen.

Nicht die Hälfte dieſer drey ſtarken Bände betrifft die Logarithmen. Es fehlen darin die merkwürdige Hauptſchrift über die Logarithmen, die von dem Erfinder ſelbſt, die von Urſinus, und die Abhandlungen von Briggs, welche vor ſeiner Arithmetica logarithmica und der Trigonometria Britannica, zwey ſeltenen Werken, ſtehen. Eine gute Recenſion der beiden erſten Theile dieſer Sammlung iſt in den Götting. gel. Anzeigen vom J. 1792, St. 119. befindlich.

Von den Logarithmen negativer Größen.

160. Logarithmen als Maßen der Verhältniſſe, ſind abſolute Zahlen, und daher keiner Entgegenſetzung fähig. Das Verhältniß 1 : 32 iſt das fünffache von dem 1 : 2, oder 1 : 2 iſt das fünftheilige von 1 : 32, und der Logarithme jenes zuerſt genannten iſt das fünffache von dem Logarithmen des andern, oder der Logarithme des zweyten der fünfte Theil von dem des erſtern, ohne daß irgend eine Relation der Verhältnißglieder gegen andere Größen eine Modification des Logarithmen hervorbrächte, ſo wenig als die benannte Einheit, wenn die Zahlen zugleich benannte Größen ſind. Eine Verneinung bezieht ſich blos auf den bey einer Rechnung zum Grunde gelegten Normalfall, der durch Veränderung der Vorzeichen (+ und —) in einen andern verwandelt wird, ſ. entgegengeſetzte Größen. Würde dieſer Fall zum Grunde der Rechnung gelegt, ſo würde die verneinte Größe poſitiv. Es muß übrigens durch keine nothwendige Bedingung bey der Frage die Negation unmöglich ſeyn. Denn ſo entſtünde die Unmöglichkeit von der Sache ſelbſt, nicht von den Logarithmen. Ich wüßte auch keinen Fall, wo Logarithmen als Functionen negativer Größen vorkämen. Der Fall in Eulers Mechanik, T. I.

§. 271 iſt kein ſolcher. Wenn ein beweglicher Punct durch den Mittelpunct der Kraft gegangen iſt, ſo iſt auf der einen Seite alles wie auf der andern. Es findet hier keine Entgegenſetzung Statt. — Sofern die Logarithmen nur Hülfszahlen beym Rechnen ſind, geht die Negation der Zahlen ſie vollends gar nichts an.

161. Ueber die Möglichkeit der Logarithmen negativer Zahlen iſt dennoch ein Streit zwiſchen mehrern angeſehenen Mathematikern geführt worden, der zwiſchen den Parteyen nicht zur Entſcheidung gekommen iſt. Es iſt ſehr ermüdend, das über dieſe Streitfrage geſchriebene zu leſen. Einen guten Bericht aus den Acten hat Thibaut in einer akademiſchen Schrift erſtattet: Historia controversiae circa numerorum negativorum et impossibilium logarithmos. Gottingae 1797. Die erſten, welche die Frage über die Logarithmen negativer Größen unter einander abhandelten, waren Leibnitz und Johann Bernoulli. Der erſtere wollte ſie nicht für möglich anerkennen, wofür Bernoulli ſie hielt. Dieſer fand keine Schwierigkeit darin, die logarithmiſche Linie ſich gedoppelt vorzuſtellen, mit negativen ſowohl als mit poſitiven Ordinaten. Allein alle Zahlen negativ nehmen, iſt in der That ſo viel, als ſie alle poſitiv nehmen. Das Verhältniß $-m : -n$ iſt in nichts von dem $+m : +n$ verſchieden. Leibnitz erwiederte insbeſondere, daß, wenn $\log. -2$ eine mögliche Größe ſey, es auch $\frac{1}{2} \log. -2$, das iſt, $\log. \sqrt{-2}$ ſeyn müßte, da doch $\sqrt{-2}$ eine unmögliche Größe iſt.

Nach geraumer Zeit ward die Streitfrage von Euler und d'Alembert wieder vorgenommen. Jener leugnete die Möglichkeit der Logarithmen negativer Größen, dieſer behauptete ſie. Zuerſt hatten ſie den Streit ſchriftlich geführt, nachher geſchah es öffentlich. Euler zeigte in den Mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1749, daß jeder poſitiven Zahl unendlich viele Logarithmen zukommen, unter welchen aber nur ein einziger möglicher iſt; ferner, daß jeder negativen, ſo wie jeder unmöglichen, Zahl unendlich viele Logarithmen, die alle unmöglich ſind, zuge-

bleibt, da $2k + 1$ nicht $= 0$ wird. — Wenn k unendlich groß, in einem endlichen Verhältniſſe zu u genommen wird, ſo bleiben die zugehörigen Wurzeln aus ± 1 unmöglich. — Da log. N = log. 1 + log. N iſt, und log. 1 außer o nur unmögliche Werthe hat, ſo hat log. N auch nur einen einzigen möglichen Werth. Da ferner — N = (— 1) N iſt, und log. (— 1) unmöglich iſt, ſo iſt auch log. (— N) unmöglich.

D'Alembert hat ſeine Gründe für die Möglichkeit der Logarithmen negativer Größen in ſeinen Opuscules mathématiques, T. I. Mém. VI. vorgetragen. Sie ſcheinen mir nicht Eulers Beweis zu entkräften. Das wichtigſte möchte dieſes ſeyn. In der Gleichung,

$y = c^x$, ſey $x = \frac{n}{2m}$, wo m und n ungerade Zahlen ſind.

Dann hat y zwey gleiche, entgegengeſetzte Werthe, nämlich $\pm \sqrt{c^{n:m}}$, und die Curve, welcher die Gleichung zugehört, hat auf der negativen Seite der Axe für jedes ſolches y einen conjugirten Punct. Dergleichen Puncte bilden aber keine ſtetige Linie, oder man müßte der Baſis auch einen negativen Werth geben. Das iſt aber, was ſtreitig iſt. Deßwegen ſagt d'A. auch, daß er dadurch nur zeigen wolle, es ſey möglich eine ſtetige Curve aus conjugirten Puncten zu bilden. Eigentlich wird durch die Annahme einer negativen Baſis die ganze Frage geändert. Wenn man — 10 ſtatt + 10 ſetzt, ſo wird die Grundreihe dieſe, $1 : -a : + a^2 : -a^3 +$ etc.

Der Chevalier Daviet de Foncenex ſuchte in den Miscellaneis Taurinensibus, T. I. Eulers Behauptung durch neue Gründe zu beſtärken. D'Alembert ſetzte ihm wieder Gründe entgegen, in einem Zuſatz zu der angeführten Abhandlung, a. e. d. O. Dadurch wurde Foncenex bewogen ſeine Meynung zu ändern, und der logarithmiſchen Curve einen doppelten Zweig zuzugeſtehen.

Gregorio Fontana (Profeſſor zu Pavia) lieferte in die Sammlung: Memorie di Matematica et **Fisica**

della Societá Italiana, T. I. 1782 einen Aufſatz über die negativen Logarithmen, worin er Eulers Satz von den unendlich vielen unmöglichen Werthen eines Logarithmen auf eine andere Art bewies, und überhaupt von den Formen unmöglicher Größen durch Logarithmen oder Exponentialgrößen handelt. Er leitet dieſe Formen aus den Werthen unmöglicher Kreisbogen her, die Th. S. 876 ff. und Th. II. S. 593 f. entwickelt ſind. Walmesley hat dieſes Verfahren, die Formen der Logarithmen negativer und unmöglicher Größen zu finden, ſehr gut und kurz angewandt, in den Mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1755. Aus Thibauts Diſſertation ſehe ich, daß Fontana an Riccati einen Gegner gefunden hat, wodurch Malfatti veranlaßt iſt, in dem Giornale de' Letterati Modenese. T. XVI, 1795 einen Verſuch zur Beylegung des Streites zu machen.

Weitläufig hat Karſten dieſen Gegenſtand unterſucht in einer Sammlung mathematiſcher Abhandlungen, Halle, 1786, S. 285—390. Kürzer hat es Käſtner gethan in dem Leipziger Magazin für Mathematik, 4ten St. 1786. S. 531—540. Daraus führe ich noch an: Mallet de Logarithmis Logarithmorum negativorum, in Novis Actis R. S. S. Upsal. V. 1784.

162. Die Seltenheit eines Streites in der reinen Mathematik mag die umſtändlichere Nachricht von dieſem entſchuldigen. Walmesley ſagt am Schluſſe ſeines kurzen Aufſatzes, daß die Frage, welche der Streit betrifft, gar keinen Grund habe. Er erklärt es für ungereimt, ein Verhältniß zwiſchen poſitiven und negativen Größen anzunehmen, da ein Verhältniß ſich blos auf die Quantität beziehe. Subtractiv oder additiv ſeyn, ſey eine Beſchaffenheit der Größen, welche ihre Zuſammenſetzung angehe, aber mit ihrem Verhältniſſe nichts zu thun habe. Bey jedem Verhältniſſe vergleiche man die Quantität nicht die Qualität. Beides mit einander zuſammen mengen, ſey ſo viel, als wenn man bey der Vergleichung des räumlichen Inhalts zweyer Körper ihre Dichtigkeit, Weichheit, Gewicht u. dgl. mit aufnehmen wollte.

163. Da die Formeln, welche Walmesley und Fontana für unmögliche Logarithmen gebraucht haben, die Sache am faßlichſten machen, ſo ſetze ich ſie noch her. Es iſt (Th. I. S. 876.)

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1} ;$$
$$e^{-\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1} .$$

Daraus folgt

$$\varphi\sqrt{-1} = \log.\text{nat.}(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}).$$
$$-\varphi\sqrt{-1} = \log.\text{nat.}(\cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1}).$$

Wird nun der Winkel φ durch ſeinen Sinus oder Coſinus gegeben, ſo hat φ unendlich viele Werthe, und der Logarithme einer Größe von der Form $A + B\sqrt{-1}$ hat unendlich viele unmögliche Logarithmen.

Es ſey I. $\cos\varphi = +1$; II. $\cos\varphi = -1$; III. $\sin\varphi = +1$; IV. $\sin\varphi = -1$; ſo iſt

I. $2m\pi\sqrt{-1} = \log.\text{nat.}(+1)$.
II. $(2m+1)\pi\sqrt{-1} = \log.\text{nat.}(-1)$.
III. $(2m+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1} = \log.\text{nat.}(\sqrt{-1})$.
IV. $(2m-\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1} = \log.\text{nat.}(\sqrt{-1})$.

Für m können hier alle ganze Zahlen nebſt o geſetzt werden. Setzt man in der erſten Formel $m = 0$, ſo wird $0 = \log.(+1)$. Alle andern Werthe von m geben für $\log.(+1)$ unmögliche Werthe.

Es ſey $t = \tan\varphi$, ſo iſt (Th. I. S. 877.)

$$e^{2\varphi\sqrt{-1}} = \frac{(1+t\sqrt{-1})^2}{1+t^2}, \text{ alſo}$$

$$2\varphi\sqrt{-1} = l.(1+t\sqrt{-1})^2 - l.(1+t^2).$$

und $l.(1+t\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}l.(1+t^2) + \varphi\sqrt{-1}$.

Hier wird der Logarithme einer unmöglichen Größe aus einem möglichen und unmöglichen Theile zuſammengeſetzt.

Darſtellung der Logarithmen und Zahlen durch Kettenbrüche.

164. Da log. nat. $(1 + y) = y\,(1 - \frac{1}{2}\,y + \frac{1}{3}\,y^2 + \frac{1}{4}\,y^3 - \frac{1}{5}\,y^4 + \frac{1}{6}\,y^5 - \text{etc.})$ iſt, ſo läßt ſich nach dem in dem Artikel, Kettenbruch, 60. gewieſenen Verfahren dieſe Reihe in einen Kettenbruch verwandeln. Das geſchieht leichter durch unmittelbare Rechnung als nach allgemeinen Formeln, die bald zu verwickelt werden. Da aus jedem Reſte der Diviſionen ein Diviſor und daraus ein Dividendus wird, ſo braucht man für alle dieſe drey Beziehungen die Reihe nur einmahl hinzuſetzen, und ſie in Gedanken ſucceſſiv für Reſt, Diviſor und Dividendus zu nehmen. Die Rechnung ſelbſt, welche ein gutes Übungsexempel iſt, braucht hier nicht gemacht zu werden; es genügt die Quotienten von den Diviſionen anzugeben. Der Factor y werde abgeſondert.

Dieſe Quotienten ſind: I. 1. II. $\frac{2}{y}$. III. 3. IV. $\frac{1}{y}$. V. 5. VI. $\frac{2}{3y}$. VII. 7. VIII. $\frac{1}{2y}$ u. ſ. w.

Daraus wird der Kettenbruch für log. nat. $(1 + y) =$

$$\cfrac{y}{1 + \cfrac{y}{2 + \cfrac{y}{3 + \cfrac{y}{1 + \cfrac{y}{5 + \cfrac{3y}{2 + \cfrac{3y}{7 + \cfrac{2y}{1 + \text{etc.}}}}}}}}}$$

Wo die Quotienten Brüche ſind, iſt mit dem Nenner der Zähler und der ganze Nenner des Ergänzungsbruches multiplicirt, nach der Vorſchrift, Kettenbruch, 26.

Das Geſetz, welches die Zahltheile der Nenner beobachten, iſt klar genug, nicht dasjenige der Coefficienten von y.

165. Hieraus ergeben ſich die angenäherten Werthe für log. (1 + y), nämlich I. y. II. $\frac{2}{2+y}$.

III. $\frac{6 + y}{6 + 4y}$ y. IV. $\frac{6 + 3y}{6 + 6y + y^2}$ y.

V. $\frac{30 + 21y + y^2}{30 + 36y + 9y^2}$ y.

VI. $\frac{60 + 60y + 11y^2}{60 + 90y + 36y^2 + 3y^3}$ y. u. ſ. f.

Die Folge dieſer Brüche (ohne den Factor y) wird nach den Formeln (Kettenbruch, 4. 5) jeder aus zwey vorher gehenden leicht gefunden. Nur iſt zu merken, daß man mit den Brüchen, woraus folgende ſollen beſtimmt werden, keine Reductionen vornehmen darf. Es iſt deshalb bequem ſtatt $\frac{1}{y}$ zu ſetzen u. Wenn die Brüche alle gefunden ſind, ſo kann jede dienliche Reduction damit vorgenommen werden. Die Bruchwerthe mit ungeraden Ordnungszahlen ſind zu groß, die mit geraden zu klein.

Sollen die Werthe annähernde ſeyn, ſo muß y ein eigentlicher Bruch ſeyn, wie für die Reihe ſelbſt.

166. Auf gleiche Art läßt ſich ein Kettenbruch für e^x finden. Es iſt

$$e^x = 1 + x(1 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{24}x^3 + \tfrac{1}{120}x^4 + \tfrac{1}{720}x^5 + \text{etc.}).$$

Hier kommen negative Quotienten abwechſelnd mit poſitiven vor. Weil das Vorzeichen eines Ergänzungsbruchs den ganzen Bruch angeht, (a. a. O. 17.), in dem Nenner aber wieder ein Quotient negativ ſeyn kann, ſo iſt es, um Verwirrung zu vermeiden, beſſer, das Vorzeichen der Ergänzungsbrüche ſelbſt durchgehends + ſeyn zu laſſen, d. i. die Einheit poſitiv zu nehmen, die Negation

Man wird finden, daß dieſes mit dem (a. a. O. 17.) gewieſenen Verfahren übereinkommt. Das Geſetz der Formation iſt hier ganz einfach und offenbar.

167. Die annähernden Werthe von e^x ſind:

$$\text{I. } 1+x. \quad \text{II. } 1+\frac{2}{2-x}x. \quad \text{III. } 1+\frac{6+x}{6-2x}x.$$

$$\text{IV. } 1+\frac{12}{12-6x+x^2}x. \text{ V. } 1+\frac{60+6x+x^2}{60-24x+3x^2}x.$$

$$\text{VI. } 1+\frac{120+2x^2}{120-60x+12x^2-x^3}. \text{ u. ſ. f.}$$

Man muß auch hier bemerken, daß um die Annäherungswerthe nach der Reihe zu finden, keine Reduction der Brüche vorgenommen werden darf, auch keine durchgängige Vertauſchung der Vorzeichen im Zähler und im Nenner. Der zweyte Annäherungswerth iſt (ohne den Factor x) zufolge der zweyten Formel in Kettenbruch, 4, dieſer, $\frac{-2u}{-2u+1}$, wenn $x=\frac{1}{u}$ geſetzt wird. In dieſem multiplicirt man Zähler und Nenner durch den dritten Quotienten, -3, und addirt in jenem den Zähler des erſten Werthes $\frac{1}{1}$, in dieſem den Nenner deſſelben, ſo iſt der dritte Annäherungswerth $\frac{6u+1}{6u-2}$. So verfährt man weiter nach den Formeln a. a. O. 4 oder 5.

168. Man nehme x negativ, ſo verwandelt ſich e^x in $\frac{1}{e^x}$, und in dem Kettenbruche iſt $-x$ anſtatt $+x$ zu ſetzen. Dividirt man die Einheit ſowol durch $\frac{1}{e^x}$ als durch den Kettenbruch, ſo wird erhalten,

Gränze von $1 + y$, für unendlich abnehmende y iſt hieraus $1 + \log.(1 + y)$. Setzt man $(1 + x)^m = 1 + y$, ſo iſt die Gränze von $(1 + x)^m$ dieſe: $1 + m\,l.(1 + x)$.

Die zweyte Gränzgleichung folgt aus der in (28.) gebrauchten Gleichung, $a^x = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n$, oder $a^x = \left(1 + \frac{px}{u}\right)^u$, wenn e ſtatt a, und bey einem unendlich großen u für p die Gränze 1 geſetzt wird.

Logarithmiſche oder **logiſtiſche Linie** iſt die krumme Linie, an welcher die Ordinaten in geometriſcher Progreſſion ſind, wenn die zugehörigen Abſciſſen in arithmetiſcher Progreſſion genommen werden.

1. Es ſey (Fig. 116.) XAX′ die Abſciſſenlinie, auf welcher der Anfang der Abſciſſen in A iſt, und AB eine willkürlich zu beſtimmende Ordinate, ſenkrecht auf jene, wie alle. Die Abſciſſenlinie werde in eine Menge gleicher Theile getheilt, deren einer PQ iſt. Durch die Theilungspuncte ziehe man Ordinaten, die eine geometriſche Progreſſion bilden, mit irgend einem Exponenten. Die erſte AB ſey a; die folgenden ſeyn b, c, d, e, f, etc. Da $a : b = b : c = c : d$ u. ſ. f. iſt, ſo iſt, wenn die Progreſſion eine zunehmende iſt, $a : b - a = b : b - c$ $= c : c - d$, u. ſ. f. Man nehme zwey Ordinaten, PM und QN in einem gegebenen Abſtande PQ, ziehe Mm parallel mit PQ, ſo iſt das Verhältniß PM : Nm für jede zwey Ordinaten in demſelben Abſtande wie PQ daſſelbe oder ein gegebenes, ſo wie das der Ordinaten PM, QN auch ein gegebenes iſt.

2. Man ziehe durch die Puncte M, N eine gerade Tt, welche die Abſciſſenlinie in T ſchneide. Es iſt nun Nm : Mm = MP : PT, oder Nm : MP = PQ : PT. Folglich iſt PQ : PT ein gegebenes Verhältniß, und daher iſt für eine gegebene PQ auch PT eine gegebene oder unveränderliche Linie.

3. Die Linie PT oder die Subſecante verändert ſich bey verändertem Abſtande der Ordinaten. Nimmt man

die Abſtände unendlich klein, ſo verwandelt ſich die Subſecante in die Subtangente.

4. Die logarithmiſche Linie iſt alſo diejenige Curve, an welcher die **Subtangente eine unveränderliche Größe** iſt. Der allgemeine Ausdruck für die Subtangente iſt $t = \frac{y\,dx}{dy}$ (berührende Linie, 13.). Es iſt alſo an der logarithmiſchen Linie $\frac{y\,dx}{dy} = M$, wo M eine unveränderliche gerade iſt. Oder es iſt $dx = M \cdot \frac{dy}{y}$.

5. Dieſes folgt auch aus dem Ausdruck für die Subſecante. Es ſey $AP = x$; $PQ = \Delta x$; $PM = y$; $Nm = \Delta y$, und die Subſecante $= S$, ſo iſt $S = \frac{y\,\Delta x}{\Delta y}$. Die Gränze von S iſt die Subtangente M, die Gränze von $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ iſt $\frac{dx}{dy}$.

6. Die logarithmiſche Linie ſtellet durch ihre Coordinaten ein gewiſſes logarithmiſches Syſtem dar. So wie in einem logarithmiſchen Syſtem die Unterſchiede der Logarithmen zu den Gliedern gleicher Verhältniſſe gleich groß ſind, ſo ſind an dieſer Curve die Abſtände zweyer Ordinaten, deren Verhältniß dem von PM : QN gleich iſt, durchgehends dem Abſtande PQ gleich. Durch zwey Ordinaten PM, QN und den Abſtand PQ wird die ganze Curve beſtimmt, eben ſo wie z. B. durch das Verhältniß 3 : 4 und den Unterſchied der zugehörigen Logarithmen, 0,1249388 ... das briggiſche Syſtem; durch den Unterſchied 0,2876821 ... das natürliche Syſtem ſich ergiebt. Die **Subtangente** an der Curve iſt der **Modulus** des durch ſie dargeſtellten Syſtems. Denn an der Curve iſt die Subtangente $= \frac{y\,\partial x}{\partial y}$, und in dem logarithmiſchen Syſtem iſt $\partial x = M \frac{\partial y}{y}$.

7. In dem Artikel, Logarithmus, 23. ſetze man $n\,(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \frac{1}{S}$. Hier iſt $a^{\frac{1}{n}}$ das erſte Glied nach 1 in der erweiterten Reihe, und $\frac{1}{n}$ der Abſtand beider, da 1 der Abſtand der Baſis a von 1 iſt. Setzt man $AB = 1$; $PQ = \frac{1}{n}$; $a^{\frac{1}{n}}$ = der Ordinate nach AB in dieſem Abſtande, ſo iſt S die Subſecante. Denn es iſt $a^{\frac{1}{n}} - 1 : \frac{1}{n} = 1 : S$. Da die Subtangente die Gränze der Subſecante S iſt, und $\frac{1}{M}$ die Gränze des Products $n\,(a^{\frac{1}{n}} - 1)$ oder von $\frac{1}{S}$, ſo iſt M gleich der Subtangente, wenn AB zur Einheit genommen wird.

8. Auf der Seite, nach welcher die Ordinaten zunehmen, entfernt ſich die Curve ins Unendliche hin von der Abſciſſenlinie, auf der andern, wo die Ordinaten abnehmen, nähert ſie ſich derſelben, ſo daß dieſe hier ihre Aſymptote iſt.

9. An der Parabel iſt die Subnormale unveränderlich, und ihrem halben Parameter gleich (berühr. Linie, 43). Dieſer Umſtand giebt eine artige Verbindung der Parabel mit der logarithmiſchen Curve an die Hand.

Es ſey Ll (Fig. 117.) eine logarithmiſche Linie zu der Abſciſſenlinie XX′, und MP eine Ordinate. Die berührende in M ſey MT, alſo die Subtangente PT. Man ziehe MN ſenkrecht auf TM, ſo iſt PT : PM = PM : PN. Man ſetze $PT = \frac{1}{2}a$, ſo iſt $PN = \frac{2yy}{a}$, wenn $PM = y$ iſt. Man halbire PN in V, ſo iſt

$PV = \frac{yy}{a}$. Alſo iſt M ein Punct einer Parabel, deren Parameter = a, und Scheitel V iſt, und welche in M die logarithmiſche Linie unter einem rechten Winkel ſchneidet. Verſchiebt man dieſe Parabel, ſo daß ihre Axe immer auf der Abſciſſenlinie XX' bleibt, ſo ſchneidet ſie die logarithmiſche Linie beſtändig rechtwinklicht.

10. Umgekehrt verſchiebt man die logarithmiſche Linie, deren Subtangente = $\frac{1}{2}$ a iſt, ſich ſelbſt parallel, bey derſelben Abſciſſenlinie, ſo ſchneidet ſie die Parabel, VMv, deren Parameter a iſt, über derſelben Abſciſſenlinie, durchgehends rechtwinklicht.

11. Der Flächeninhalt zwiſchen zwey Ordinaten iſt leicht gefunden. Das Differential der Area ABMP (Fig. 116.) iſt $= y\partial x = M\partial y$, alſo die Area $= M(\text{const.} + y)$. Man ſetze AB = a, ſo iſt, wenn die Area bey AB anfängt, dieſelbe $= M(y - a)$, dem Rechteck von der Subtangente in den Unterſchied der AB und der Ordinate. Überhaupt iſt die Area zwiſchen zwey Ordinaten gleich dem Rechteck von der Subtangente in ihren Unterſchied.

12. Die unendlich lange Area von AB längs der Abſciſſe AX' auf der Seite der abnehmenden Ordinaten iſt ſo groß als das Rechteck von AB in die Subtangente.

13. Der körperliche Raum zwiſchen den Kreisflächen mit den Halbmeſſern AB und PM, und der von BM durch die Umdrehung um die Axe der Abſciſſen beſchriebenen Fläche iſt $= \frac{1}{2} M\pi(y^2 - a^2)$, wo man auch anſtatt der Ordinate AB jede andere nehmen kann. Es iſt nämlich das Differential des Raumes von der Kreisfläche durch AB bis zu der durch MP $= \pi y^2 \partial x$ (Cubirung), das iſt $M\pi y \partial y$; davon das Integral $= \frac{1}{2} M\pi y^2 + \text{const.}$ Damit es bey AB anfange, muß const $= -\frac{1}{2} M\pi a^2$ ſeyn.

14. Der unendlich lange runde Körper, der von dem unendlich langen Bogen Bs, auf der Seite der

abnehmenden Ordinaten beſchrieben wird, iſt $=$ $\frac{1}{2}\pi M a^2$.

15. Edmund Gunter (Logarithmus, 130.) ſoll die logarithmiſche Linie angegeben haben; allein in der Sammlung ſeiner Schriften findet ſich nichts davon. Vermuthlich iſt es ein Mißverſtand. Gunter hat die Logarithmen der Zahlen, Sinus und Tangenten auf einen Maßſtab, in England Gunter's scale genannt, zum leichtern Gebrauch für Ungeübte getragen. Die erſtere dieſer Linie heißt auch die logarithmiſche Linie. Huygens hat der in dieſem Artikel betrachteten Curve ihren Namen gegeben, ſagt aber, daß ſie ſchon von andern unterſucht ſey. Dissert. de causa gravitatis, wo er am Ende die Eigenſchaften dieſer Linie aufführt.

Logarithmiſcher Maß- oder Rechenſtab iſt eine eingetheilte Länge, auf welcher die Theile, von dem Anfangspuncte an, die Logarithmen der zu den Theilungspuncten geſetzten Zahlen ſind. Anſtatt der Zahlen laſſen ſich auch die Winkel ſetzen, deren Sinus oder Tangenten die correſpondirenden Längen zu Logarithmen haben.

A	Q	M	N	P	B
1	$\frac{n}{m}$	m	n	mn	1000

Es iſt nach irgend einem gleichtheiligen Maßſtabe AB der Logarithme von 1000; AM der Logarithme der Zahl m, AN der Zahl n. Trägt man AN von M nach P, ſo befindet ſich bey P das Product $m \times n$; trägt man MN von M nach Q, ſo ſteht bey Q der Quotient $\frac{n}{m}$. Hieraus ſieht man leicht, wie mittelſt eines ſolchen Rechenſtabes Multiplicationen und Diviſionen vorgenommen werden können.

Es ſey AB $=$ log. rad; AM $=$ log. sin α; AN $=$ log. sin β; AQ $=$ log. sin γ, ſo werden bey B,

M, N, Q die Winkel 90°, α, β, γ beygezeichnet. Iſt nun rad : sin α = sin β : sin γ, ſo iſt AB — AM = AN — AQ, oder MB = NQ, oder BN = MQ, wodurch alſo aus α und β der Winkel γ ſogleich gefunden wird. Auf gleiche Art werden die Tangenten gebraucht, nur kommt zu AB als Radius der Winkel von 45°.

Dieſe logarithmiſchen Rechenſtäbe hat zuerſt Edmund Gunter, wie gleich vorher ſchon angeführt iſt, angegeben. Er beſchreibt den mannichfaltigen Gebrauch in einem beſondern Buche: The croſs-staff, welches in einer Sammlung ſeiner Werke, 5te Ausg. London 1673, befindlich iſt. Wingate, um 1627, zeichnete den logarithmiſchen Maßſtab auf zwey Stäben, die neben einander verſchoben werden können, um den Gebrauch des Zirkels zu erſparen. Oughtred, um dieſelbe Zeit, trug denſelben auf concentriſche Kreiſe; Milburne, um 1650, gab denſelben eine ſpiraliſche Form. In Deutſchland beſchrieb Scheffelt den logarithmiſchen Rechenſtab nebſt andern ausführlich in einem Buche: Neu erfundener Maßſtab, Ulm, 1699. 4to. Von Lambert iſt eine kleine Schrift: Beſchreibung und Gebrauch der logarithmiſchen Rechenſtäbe, Augsburg 1761. Sie dient zur Erklärung der von Brander verfertigten Rechenſtäbe. Die Stäbe ſind gedoppelt, um ſie neben einander hin und her ſchieben zu können. Die Beyſpiele zu dem Gebrauche ſind ſehr brauchbar. Dieſe Rechenſtäbe, wenn ein guter Rechner gleich ihrer gar nicht bedarf, ſind doch für Anfänger ſehr dienlich, um die logarithmiſchen Rechnungen deſto beſſer einzuſehen, und ſich geläufig zu machen.

Logistica bedeutet bey den Alten im Gegenſatze gegen Arithmetik die Anwendung der abſtracten Rechenkunſt auf die Vergleichung der Größen in der Geometrie, Aſtronomie, der Muſik und im gemeinen Leben. Der Logiſtiker, ſagt Proklus (Cap. XIII. in I. L. Eucl.)

betrachtet nicht die Verbindungen (παθη) der Zahlen an ſich, ſondern an ſinnlichen Gegenſtänden, (von welchen er ihnen auch Namen beylegt. Plato unterſcheidet in dem Dialog, Gorgias, Arithmetik und Logiſtik; beide beſchäftigen ſich mit dem Geraden und Ungeraden, die letztere noch dazu mit der Berechnung und Vergleichung der Menge. Bey den Neuern bedeutet Logiſtik auch die Theorie der gemeinen Arithmetik oder ſelbſt die Algebra. Barlaam, ein Mönch aus Calabrien im 14ten Jahrhundert, hat die Beweiſe der gemeinen Rechnungen mit ganzen Zahlen, gewöhnlichen und ſechzigtheiligen Brüchen in einer griechiſch verfaßten Schrift, mit dem Titel, Logiſtik, vorgetragen, welche zu Paris 1600. 4 von Chambers herausgegeben iſt. Vieta gebraucht für algebraiſche Rechnungen die Benennung, Logistica. Die Buchſtabenrechnung heißt auch bisweilen Logistica speciosa.

Logiſtiſche Logarithmen ſind Logarithmen, die zur Rechnung mit ſechzigtheiligen Brüchen beſonders eingerichtet ſind. Sie ſind der Überſchuß des Logarithmen von 3600 Secunden über den Logarithmen der gegebenen Zahl von Secunden. Der Logarithme von 3600″ iſt 3,55630. In einer Tafel der logiſtiſchen Logarithmen ſtehen in der oberſten Zeile die Minuten nach der Reihe, von 1 bis 60, auch noch weiter, und in der erſten Columne die Secunden; in dem zu einer Zahl von Minuten und Secunden gehörigen Winkelfache iſt der logiſtiſche Logarithme verzeichnet. Z. B. zu 25′ 24″ gehört der logiſtiſche Logarithme 3733, wobey die Charakteriſtik 0 weggelaſſen iſt. Es iſt nämlich

$$\begin{array}{lcl} \text{l. } 3600 & = & 3{,}55630 \\ \text{l. } 1524 & = & 3{,}18298 \\ \hline & & 0{,}37332 \end{array}$$

Dieſe Logarithmen brauchen nur bis auf die vierte Decimalſtelle geſucht zu werden. Die Tafel der logiſtiſchen Logarithmen liefert dieſelben zugleich für Zahlen, wenn man dieſe als eine Anzahl Secunden betrachtet, und die Minuten davon abſondert, ſoweit nämlich als die Tafel geht.

Der Gebrauch iſt, den Proportionaltheil zwiſchen zwey Zahlen, welche aus aſtronomiſchen Tafeln unmittelbar gegeben werden, leicht zu finden. Ein Proportionsſatz enthält entweder in allen Gliedern Minuten und Secunden, oder dieſe nur in zweyen, in den beiden andern aber abſolute Zahlen. Z. B.

	60′ 0″	....	0,0000
:	46′ 12″	....	0,1135
=	8 7	....	0,8688
:	6 15	....	0,9823

Wenn 60′ das zweyte Glied ſind, ſo wird der Logarithme des erſten Gliedes, wie allemal, abgezogen, oder das arithmetiſche Complement addirt. Z. B.

46′ 12″ :	60′ 0″ =	6′ 15″ :	8′ 7″
9,8865	0,0000	0,9823	0,8688

Die große Charakteriſtik 9 zeigt an, daß 10 zu ſubtrahiren ſind, daher bey der Addition die hervorgehenden 10 weggeworfen werden.

Auf gleiche Art verfährt man, wenn abſolute Zahlen vorkommen. Z. B.

60′ :	1531 =	46′12″ :	1179
0,0000	0,3713	0,1135	0,4848

Wo Stunden und ihre Minuten vorkommen, nimmt man die Stunden als Bogen-Minuten, und ihre Minuten als Bogen-Secunden an. So haben 24 St. den logiſtiſchen Logarithmen 0,3979 wie 24′ eines Grades; und 8 St. 7′ den logiſt. Log. 0,8688, wie 8′7″ eines Grades.

Die logiſtiſchen Logarithmen erſparen die Reduction auf Secunden (der Stunden auf Minuten); und die Addition oder Subtraction eines beſtändigen Logarrithmen.

Die logiſtiſchen Logarithmen ſind von Kepler eingeführt. Sie finden ſich in ſeinen Tabulis ~~Rudolphinis~~, ſowol für Stunden und Minuten, als für Minuten und Secunden. Auch ſind darin die Ganzen mit den Sexageſimaltheilen beygefügt, welchen jene Logarithmen als negativ zukommen. Es iſt z. B. der Quotient von 60¹ dividirt durch 4'15'' = 14°7'4'', wo der Circellus Ganze anzeigt. Noch ſind beygefügt die Winkel, zu deren Sinus die logiſtiſchen Logarithmen gehören. Die Logarithmen ſind Neperiſche. In Callets Ausgabe logarithmiſcher Tafeln gehen die Minuten bis zu 80, oder die Secunden bis zu 5280. Die Logarithmen über den von 3600 ſind negative, mit der Charakteriſtik 9, der Gleichförmigkeit wegen, da die Logarithmen der Zahlen unter 3600 von dem Logarithmen dieſer Zahl abgezogen ſind. So iſt hier für log. 5280 angeſetzt 8337, das iſt 9,8337, oder log. 3600 — log. 5280.

Die in logarithmiſchen Tabellen verfaßte Sexagen-Rechnung von M. Joh. Jac. Zimmermann, Hamburg 1691, begreift dreyerley logiſtiſche Logarithmen. Erſtlich, die Logarithmen der auf Secunden reducirten Grade, Minuten und Secunden; zweytens, die arithmetiſchen Complemente der logiſtiſchen Logarithmen, nach der obigen Erklärung; drittens, logiſtiſche Logarithmen für Stunden und Minuten in Beziehung auf die Zahl 1440 = 24 . 60, ſo daß die Complemente der Logarithmen von den Quotienten der Zahl 1440 durch die Minutenzahl angegeben ſind. Dieſe Tafeln verdienen wieder in Erinnerung gebracht zu werden.

Logiſtiſche Linie, ſ. Logarithmiſche Linie.

Logiſtiſche Spirale, ſ. Spirale.

Longimetrie heißt in einigen Schriften derjenige Theil der praktiſchen Geometrie, welcher die Methoden

zur Ausmeſſung gerader Linien lehrt, in horizontaler, geneigter oder lothrechter Richtung.

Loxodromiſche Linie iſt die gedoppelt krumme Linie auf einer Kugelfläche, welche alle, aus einem Pole gezogenen größten Kreiſe unter demſelben Winkel ſchneidet. Anſtatt einer Kugel kann auch ein elliptiſches Sphäroid genommen werden. Ihr Gebrauch iſt in der Schifffahrt. Sie iſt als Beyſpiel in dem Artikel, Krumme Linien von gedoppelter Krümmung, 17. gebraucht. Leibnitz nennt ſie die linea rhombica. Acta Er. 1691. Opp. T. III. p. 243.

Lunula, auch Meniscus (Μηνισκος), mondförmiger Flächenraum, iſt der zwiſchen zwey Kreisbogen, die nach derſelben Seite hin hohl ſind, beſchloſſene Raum. Unter gewiſſen Beſtimmungen iſt eine Lunula oder die Summe zweyer quadrirbar.

1. Es iſt ACB (Fig. 118.) ein Halbkreis, in welchem das rechtwinklige Dreyeck ACB eingezeichnet iſt. Ueber den Katheten AC, BC beſchreibe man die Halbkreiſe ADC, BEC. Die Flächen der drey Halbkreiſe verhalten ſich wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer, weil ſie zu denſelben ein beſtimmtes Verhältniß haben (Quadratur). Es iſt alſo $ADCA : BECB = AC^2 : BC^2$, und daher $ADCA + BECB : ADCA = AC^2 + BC^2 : AC^2 = AB^2 : AC^2$. Da nun iſt $ACBA : ADCA = AB^2 : AC^2$, ſo iſt die Summe der beiden Halbkreiſe über AC und BC gleich dem Halbkreiſe ACBA. Zieht man beiderſeits die Segmente AdC, BeC ab, ſo bleibt die Summe der beiden Monde gleich dem Dreyeck ACB.

2. Macht man $AC = BC$, ſo ſind die beiden Monde einander gleich, und jeder iſt gleich der Hälfte des gleichſchenkligen Dreyecks über AB.

3. Es ſey ADBEA (Fig. 119.) ein Kreis über dem Durchmeſſer AB aus dem Mittelpuncte C beſchrie-

ben, und DCE ein Durchmeſſer ſenkrecht auf AB. Aus E beſchreibe man mit dem Halbmeſſer AE einen Kreisbogen AFB, ſo iſt dieſer ein Quadrant, weil AEB ein rechter Winkel iſt. Die ganzen mit AC und AE beſchriebenen Kreiſe verhalten ſich wie die Quadrate ihrer Halbmeſſer, das iſt, wie 1 : 2, alſo iſt der Halbkreis ADBA gleich dem Quadranten AEBFA. Von beiden nehme man das Segment ABFA weg, ſo bleibt die Lunula ADBEA gleich dem Dreyeck AEB.

Dieſes iſt zwar nur ein veränderter Beweis des gleich vorher gefundenen Satzes. Er führt aber auf die Quadratur gewiſſer Abſchnitte der Lunula.

4. Man ziehe aus dem Puncte E irgend eine gerade EG an den Halbkreis ADB, welche den Quadranten AFB in H ſchneide; auch werde CG gezogen. Es iſt Sect. ACG : Halbkreis ADBA = ACG : 2R, und Sect AEH : Quadr. AFBE = AEH : R. Nun iſt ACG = 2 AEH, alſo ſind dieſe beiden Verhältniſſe ſich gleich. Da gleich vorher gezeigt iſt, daß ADBA dem Quadranten gleich iſt, ſo iſt Sect. ACG = Sect. AEH. Nimmt man beiderſeits das Trilineum AKH weg, ſo bleibt das Trilineum AHG + ΔGCK = ΔAEK, oder es iſt Trilineum AHG = ΔAEK — ΔGCK, alſo quadrirbar.

5. Das Dreyeck GCK verhält ſich zu ECK wie GK : EK. Man nehme auf AK den Theil KL ſo, daß KL : KC = GK : EK ſey, und ziehe EL, ſo iſt das ΔLEK = ΔGCK, und ΔAEL = Trilineum AHG.

Ich weiß nicht, ob dieſe Quadratur ſchon bemerkt ſey. Hutton führt in ſeinem Wörterbuche eine andere an, welche ich hier mit einiger Abänderung des Beweiſes mittheile.

6. Es ſeyn wie vorher, EG, CG gezogen. Man nehme den Bogen HN = AH, und ziehe AN und EN, ſo iſt der W. AEN = ACG, und der Sect. ACG iſt ähnlich dem Sect. AEN. Beide verhalten ſich wie die Quadrate der Halbmeſſer, das iſt wie 1 : 2. Da die Dreyecke ACG und AEN ſich auch ſo verhalten, ſo

Namen angegeben wird. So werden Linien durch irgend eine angenommene Linie, die man Linie, Zoll, Fuß, Elle, Metre, Yard, Klafter, Ruthe, Meile nennt, gemeſſen. Flächen werden am gewöhnlichſten durch das Quadrat der Längen-Einheit gemeſſen, auch wol durch eine der Fläche ähnliche oder ſonſt übereinſtimmende Figur, zum Beyſpiel eine Kreisfläche durch eine andere, da Kreisflächen ſich wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer verhalten. Eben ſo werden Körper meiſtens durch den Würfel der Längen-Einheit gemeſſen, aber auch durch Körper, die ihnen entweder ähnlich ſind, oder zu derſelben Gattung gehören. Für Kugeln kann man bequem eine Kugel zur Einheit nehmen, wie es in der Artillerie wirklich geſchieht; für Cylinder einen Cylinder, wie beym Viſiren der Fäßer; für Parallelepipeda ein anderes von gegebener Länge, Breite und Höhe. So gebraucht man bisweilen *Schachtruthen*, die eine Ruthe lang und breit, und einen Fuß hoch ſind; auch *Balkenruthen*, die eine Ruthe lang, und einen Fuß breit und hoch ſind. Auf ähnliche Art gebraucht man auch für Flächen eine *Riemenruthe*, eine Ruthe lang und einen Fuß breit.

Winkel ſind eine eigenartige Größe, die man bald durch einen rechten Winkel, als Einheit, mißt, am gewöhnlichſten durch Grade, die der 90ſte Theil eines rechten Winkels ſind. Ein Grad wird in 60 Theile oder Minuten, eine Minute in 60 Secunden, eine Secunde in 60 Tertien, oder gewöhnlicher in Decimaltheile getheilt. *Gellibrand* war der erſte, der den Grad in 100 Theile theilte. Die Theilung des rechten Winkels in 90 Grade behielt er noch bey. Die franzöſiſchen Geometer unſerer Zeit ſuchen die Eintheilung des Quadranten in 100 Theile einzuführen. Der Centeſimalgrad wird in 100 Minuten, die Centeſimalminute in 100 Secunden getheilt.

Verhältniſſe werden durch ein Grundverhältniß mittelſt der Zuſammenſetzung und Theilung gemeſſen, wie in dem Artikel, Logarithmus, gezeigt iſt. Die Größe eines Verhältniſſes wird durch den Unterſchied der Logarithmen

veranlaßt, daß ein allgemeines Maß eingeführt werden möchte. Dieſes geht eigentlich die Längenmaßen an, von welchen die Flächenmaßen meiſtens, zum Theil auch die körperlichen abhangen. Mouton, ein Aſtronom zu Lyon im 17ten Jahrhundert, ſchlug dazu die von ihm ſogenannte virgula geometrica vor, eine Länge, deren ein Grad der Erde 600000 enthalten ſollte. Um die Länge deſſelben auf immer unverändert zu erhalten, bemerkte er, daß ein Pendel von dieſer Länge in einer halben Stunde 3959⅕ Schwingungen mache. Observationes diametrorum Solis et Lunae apparentium. Lugd. 1670. Dieſes Fußmaß iſt wenig mehr als ein halber franzöſiſcher Fuß, da ein mittlerer Grad 342049 Fuß enthält. Picard that um dieſelbe Zeit in der Schrift über die Meſſung der Erde den Vorſchlag, den dritten Theil der Pendellänge für eine Secunde mittlerer Zeit zum allgemeinen Fuß zu nehmen. Huygens, welcher an den Gewichtuhren das Pendel anbrachte, zeigte, daß dadurch die Länge eines einfachen Secundenpendels gefunden werden kann. Den dritten Theil derſelben ſchlug er auch zum allgemeinen Fuße vor, als ein Maß, das an jedem Orte und zu jeder Zeit gefunden werden könnte. (Horologium oscill. Prop. 25.) Er wußte noch nicht, daß die Secundenpendel in verſchiedenen geographiſchen Breiten etwas verſchieden ausfallen. Nach Huygens Rechnung verhielte ſich der Pariſer Fuß zu dieſem neuen wie 864 zu 881. Die königliche Geſellſchaft zu London fand den Vorſchlag annehmlich. Auch Amontons (Mém. acad. 1703.) wiederholte den Vorſchlag. Bouguer (Fig. de la terre, p. 300.) wollte die Länge des Secundenpendels in der Breite von 45° zum allgemeinen Maße gemacht haben, weil dieſes eine mittlere Länge hat, auch am leichteſten und ſicherſten beobachtet werden kann. Du Fay hatte ſchon von dem Miniſter die Genehmigung eines Entwurfs zu einer Verordnung erhalten, welche durch den Tod beider nicht zur Ausführung kam. De la Condamine trug die Sache wieder vor, in den Abhandlungen der Akademie 1747.

Um die Länge des Metre auf das genauſte zu beſtimmen, ward eine neue Meſſung des Meridianbogens, der durch die Pariſer Sternwarte geht, von Dünkirchen an, über die Gränzen des Reichs bis Barcelona unternommen, mit viel genauern Werkzeugen als bey den vorigen Meſſungen gebraucht waren, auch mit einer ungleich größern Genauigkeit ſowol in der Meſſung ſelbſt als in den Berechnungen. Die Vergleichung der mittlern Länge eines Grades auf dieſem Bogen mit derjenigen auf dem in Peru ehedem gemeſſenen gab die Länge des Quadranten eines für elliptiſch angenommenen Meridians 5130740 Toiſen. Das Metre iſt alſo 0,5130740 Toiſen, oder 443,296 Lin. Dieſes iſt das Mètre définitif, welches von dem durch die vorher angeführten Decrete proviſoriſch beſtimmten Metre, 443,44 Lin. zu unterſcheiden iſt. Dieſes gründete ſich auf die damals angenommene Größe des Meridiangrades. Ein Exemplar des Metre nach der zu den Meſſungen gebrauchten Toiſe, nebſt einem Exemplar des Kilogramme, wurden der Regierung in einem Behältniſſe mit vier Schlöſſern feyerlich überliefert. Da die Temperatur einigen Einfluß auf die abſolute Größe der Maßen hat, ſo iſt für das Urmaß die Temperatur beym Gefrierpuncte des Waſſers zur normalen angenommen. Damit man zu jeder Zeit die wahre Länge des Metre wieder finden könne, ohne nöthig zu haben, eine neue Meſſung anzuſtellen, ward das Verhältniß deſſelben zu der Länge des Secundenpendels auf das genaueſte beſtimmt. Nach Borda's auf der Sternwarte zu Paris angeſtellten Verſuchen iſt die Pendellänge = 0,993827 Metre, oder das Metre = 1,0062123 Pendellänge.

Man hätte ein einförmiges Maßenſyſtem für Frankreich unendlich leichter einführen, es ſelbſt zu einem ſehr allgemeinen, zwar nicht für das gemeine Leben, aber doch im Gebrauche für Gelehrte, die mit Meſſungen zu thun haben, erheben können. Man brauchte nur den vorhandenen Pariſer Fuß als das Grundmaß feſtzuſetzen, und deſ-

dabey wenigſtens die Zeiteintheilung etwas willkürliches ſey. Allein jedes Maß iſt ſeiner Natur nach willkürlich, und es kommt nur darauf an, welche Größe am bequemſten zur Vergleichung gebraucht werden kann. Die Länge des Secundenpendels, wie ſie zu Paris iſt, kann jeder an ſeinem Orte durch gute Beobachtungen erfahren, mit Anbringung einer gewiſſen Reduction, wegen des Unterſchiedes der Breite. Iſt es gleich ſchwer, die höchſte mögliche Genauigkeit zu erhalten, ſo iſt dieſe auch nicht zu jedem Gebrauche nothwendig, und man muß doch auch, wenn man das Metre ſich nicht unmittelbar aus Paris ſchicken laſſen kann, zur Beobachtung der Pendellänge an ſeinem Orte ſich wenden. Es iſt willkürlich, daß man den Quadranten des Meridians zum Grunde der Maßbeſtimmung genommen hat; warum nahm man nicht den Halbmeſſer des Äquators, oder einen mittlern Halbmeſſer der Erde, welcher die natürliche Meßruthe für unſer Planetenſyſtem iſt? Die Länge des Quadranten iſt nicht weniger etwas gefolgertes, als es dieſe Halbmeſſer geweſen wären. Es iſt willkürlich, daß man den Meridian von Paris gewählt hat, der vermuthlich von andern Meridianen verſchieden iſt. Willkürlich iſt es, daß man gerade den zehnmillionſten Theil des Quadranten genommen hat, freylich um der halben Toiſe durch das Metre nahe zu kommen.

Die Ableitung größerer und kleinerer Einheiten aus einer Grund-Einheit iſt etwas willkührliches. Die ſinnliche Abmeſſung derſelben geſchieht am leichteſten und ſicherſten durch fortgeſetzte Verdoppelung und Halbirung. Zu Berechnungen iſt aber die Decimal-Progreſſion die bequemſte. Bey Berechnungen von Längen, Flächen und körperlichen Räumen iſt es nicht einmahl durchaus nöthig, verſchiedene, einander untergeordnete Einheiten mit beſondern Benennungen zu unterſcheiden, es ſey denn zur Vergleichung mit den Angaben einer Größe nach Einheiten aus einer andern Progreſſion, z. B. der Duodecimalen.

Was noch insbeſondere die Theilung der Winkel betrifft, ſo kann man immer die Eintheilung des Quadran-

dern zuſammengeſetzten Commiſſion zur Beſtimmung des neuen Maßen- und Gewichts-Syſtems beyzuwohnen.

Maßſtab iſt erſtlich eine eingetheilte Länge, welche eine gegebene Länge zu meſſen dient. Sie enthält die Einheit entweder einfach oder mehrfach, mit den Unterabtheilungen.

Auf dem verjüngten Maßſtabe ſind die zweyten Unterabtheilungen, welche durch Puncte nicht mehr angegeben werden können, durch die in einem Dreyecke, über einer der erſten Unterabtheilungen, mit dieſen parallel gezogenen geraden, unterſchieden. Man findet die Beſchreibung und den Gebrauch in jedem Handbuche der Geometrie.

Eine andere Art Maßſtäbe dient ſtatt einer Tabelle, indem zu den Längen die Quantität einer andern Art von Größe, die jener zugeordnet wird, beygezeichnet iſt. Dergleichen ſind die quadratiſchen und cubiſchen Maßſtäbe. Auf den erſtern ſteht neben einer Länge die Anzahl der in dem Quadrate der Länge enthaltenen Quadrate von der Einheit; auf dem cubiſchen die Anzahl der Würfel von der Einheit in dem Würfel der Länge. Der cylindriſche Maßſtab iſt ein quadratiſcher, wo die Einheit der Durchmeſſer eines Cylinders iſt, mit welchem andere Cylinder von derſelben Höhe gemeſſen werden ſollen. Die Linien der Chorden, der Sinus, der Tangenten enthalten neben den Längen dieſer Linien die zugehörigen Bogen oder Winkel. Der logarithmiſche Maßſtab iſt in dem Artikel, logarithmiſcher Maß- oder Rechenſtab, ſchon erklärt.

Mathematik iſt die Wiſſenſchaft von den Formen der Größen, das iſt aller Arten, wie eine Größe aus andern zuſammengeſetzt wird. Jede Größe hängt von andern, wenigern oder mehrern, Größen ab, bald auf eine einfache, bald auf eine verwickelte, nicht ſelten ſehr verwickelte Art ab. Die Mathematik entwickelt den Zuſammenhang der Größen, die auf irgend eine Art mit einander verknüpft ſind; ſie findet die verſchiedenen Formen, unter welchen eine und dieſelbe Größe dargeſtellt werden kann; ſie lehrt, wie aus

gewiſſen bekannten Größen die unbekannten, welche mit ihnen in Verbindung ſtehen, gefunden werden, es ſey ganz vollſtändig, oder näherungsweiſe.

Der Name Mathematik iſt griechiſchen Urſprungs. Mathemata heißen im Griechiſchen überhaupt alle Kenntniſſe, die gelehrt und erlernt werden. Unſere Mathematik hat die Benennung: Kenntniſſe, vorzüglicher Weiſe erhalten, weil die alten griechiſchen Philoſophen bey ihrem Unterrichte ſich häufig auf ſie bezogen. In der Pythagoriſchen und Platoniſchen Schule geſchah dieſes vorzüglich. Platon hat, wie erzählt wird, über der Thür ſeines Hörſnals geſchrieben: Kein Unkundiger der Geometrie komme herein. Xenokrates, einer ſeiner Nachfolger, antwortete einem, der an ſeinem Unterrichte Theil nehmen wollte, aber in der Geometrie und Arithmetik fremd war: bleibe weg, du haſt nicht die Handhaben zur Philoſophie; anſas philosophiae non habes. Dieſe Philoſophen wollten, daß der Lehrling durch das Studium der Mathematik ſich ſchon gewöhnt haben ſollte, abſtracte Begriffe zu faſſen, und eine Reihe von Schlüſſen zu verſtehen, um des Unterrichts über unſinnliche Gegenſtände fähig zu ſeyn. Die mathematiſchen Begriffe, ſagt Proklus, ein ſpäterer platoniſcher Philoſoph, halten das Mittel zwiſchen dem Untheilbaren und dem materiellen Theilbaren. Hippokrates empfahl ſeinem Sohne das Studium der Arithmetik und Geometrie, weil es ſeinen Verſtand ſchärfen, und ihn ſelbſt zu Unterſuchungen über die Heilkunſt tüchtiger machen würde.

Die Mathematik wird eingetheilt in die reine und in die angewandte. Die reine, welche die eigentliche Mathematik iſt, heißt darum ſo, weil alle Begriffe, alle Schlüſſe, alle Zuſammenſetzungen und Zerlegungen der Größen unmittelbar durch den Verſtand gebildet werden, ganz rein und unabhängig von aller Hülfe der ſinnlichen Erkenntniß und Erfahrung. Die Symbole in den arithmetiſchen Verbindungen der Größen, und die Figuren in den geometriſchen ſind nur Hülfsmittel, um die Glieder der Schlußkette feſt zu halten, und die Aufmerkſamkeit auf jedes Glied zu heften, ohne das

Ganze darüber zu verlieren. Die angewandte Mathematik enthält die Anwendungen der allgemeinen abſtracten Lehrſätze und Auflöſungsmethoden, theils auf die Eigenſchaften und Veränderungen der natürlichen Körper, ſo fern ſie ſich meſſen laſſen, theils auf eine Menge von Gegenſtänden zum Gebrauch des menſchlichen Lebens.

Vier Urbegriffe des Verſtandes ſind es, worauf die ganze reine Mathematik beruhet, Vielheit, Ausdehnung, Lage, Verhältniß.

Vielheit iſt die allgemeine Form der Vorſtellung, die wir haben, wenn wir Dinge unterſcheiden, ohne darauf zu achten, was ſie ſind. Thiere, beſonders die höhern Gattungen, haben ohne Zweifel auch die Vorſtellung einer Mehrheit von Dingen, allein immer mit den vorgeſtellten Dingen vermiſcht; wir aber können die Dinge wechſeln, vermindern oder vermehren, und behalten immer dieſelbe Vorſtellung von Vielheit, gleichſam als eine Tafel, worauf eine Zeichnung ausgelöſcht und eine andere an die Stelle geſetzt wird. Darum iſt Vielheit ein Urbegriff, eine in dem Verſtande ſelbſt entſpringende Form von Vorſtellung, die wir auf alle ſinnliche Dinge und ſelbſt auf unſere Vorſtellungen anwenden.

Eine Vielheit gleichartiger, oder als gleichartig betrachteter Dinge heißt eine Anzahl. Bey dieſem Begriffe nehmen wir eine Ausſonderung des Gemeinſamen vor, welches ſich an jedem der unter der Vielheit begriffenen Dinge findet, und die Einheit heißt, z. B. Thaler, Buch. Jedes dieſer Dinge mit ſeinen Beſonderheiten heißt ein Einzelnes, ſo daß Einheit ein bloßer Begriff, nämlich der Begriff des Gemeinſamen, das Einzelne aber ein Gegenſtand, es ſey ein wirklicher oder blos gedachter, iſt.

Iſt die Einheit unbeſtimmt, ſo iſt die Vielheit eine Zahl, und die Einheit erhält nun die Benennung, Einer. Die Vielheit in einer Zahl kann auch unbeſtimmt gelaſſen werden, ſo erhalten wir den Begriff einer unbeſtimmten Zahl. Dieſer iſt es, der in der Analyſis gebraucht wird, weil wir in dieſer blos die Verbin-

dung der Größen betrachten, um allgemeine, auf jeden beſondern Fall anwendbare, Formeln zu erhalten.

Der zweyte Urbegriff, der in der Mathematik zum Grunde liegt, iſt die Vorſtellung des Ausgedehnten. Dieſes iſt auch eine Vielheit, aber eine zuſammenhängende, oder ſtetige Vielheit. Es ſind dreyerley Arten des Ausgedehnten: Körper, Flächen, Linien, ſ. Ausdehnung.

Die Form des Ausgedehnten macht es zu einem Gegenſtande mathematiſcher Unterſuchungen. Körper erhalten ihre Form durch die Art der Begränzung, oder auch durch die Art, wie ſie durch die Bewegung einer Figur erzeugt werden, dieſe mag ſich parallel bleiben oder ſich um eine Axe drehen, dieſelbe ſeyn oder ſich nach einem gewiſſen Geſetze verändern. Die Form einer ebenen Fläche beſteht in der Beſchaffenheit und Lage der Begränzungslinie; einer krummen in der Beſchaffenheit der ebenen Figuren, durch deren Bewegung ſie nach einem gewiſſen Geſetze erzeugt wird. Die Form der Linien iſt die Art, wie ihre Elemente ſtetig nach einander folgen. Die Form geben wir dem Ausgedehnten eigenmächtig, und dadurch iſt die ganze Geometrie ein unbeſtreitbares Eigenthum des Verſtandes.

Die Form kann ganz unabhängig von der Größe gedacht werden. Bey einer Kugel braucht man nicht auf die Größe des Halbmeſſers zu achten; bey einer Ellipſe iſt es nur nöthig, das Verhältniß der Axen zu kennen oder anzunehmen, wenn ſie der Art (species) nach beſtimmt werden ſoll. Die abſolute Länge der Axen iſt nur bey der Anwendung auf ſinnliche Gegenſtände erforderlich. Es verhält ſich hier ſo wie bey den allgemeinen analytiſchen Zuſammenſetzungen einer Größe aus andern, wo die Quantität unbeſtimmt bleibt.

Der dritte Urbegriff, der in der Mathematik zum Grunde liegt, iſt der Begriff von Lage, es ſey der Linien gegen einander, oder der Flächen, oder der Linien und Flächen. Dieſer Begriff, mit dem der Ausdehnung ver-

bunden, giebt die Form der Körper. Lage iſt die Art des Nebeneinanderſeyns, nämlich des idealiſchen.

Der vierte Urbegriff iſt der von einem Verhältniſſe. Dieſes iſt die einfachſte Vergleichung zweyer Größen, es ſey numeriſcher oder geometriſcher, ohne dabey auf eine beſtimmte Einheit Rückſicht zu nehmen. Selbſt wenn zwey Größen in Abſtracto gegeben oder gedacht werden, ſo kommt es bey ihrer Vergleichung blos auf ihre relative Größe an, wobey man einen ganz unbeſtimmten Theil derſelben als Maß gedenkt, nicht auf ihre abſolute in Beziehung auf eine gegebene Einheit.

Die zweyerley Formen der Größen geben die zwey großen Abtheilungen der reinen Mathematik, die Arithmetik im weiteſten Verſtande und die Geometrie. Jene enthält die gemeine Rechenkunſt, die Buchſtabenrechnung, die Algebra, die höhere Arithmetik über Formen und Eigenſchaften der Zahlen, die Analyſis endlicher Größen und die Analyſis unendlicher Größen. Die letztere unterſcheidet ſich von der Analyſis des Endlichen dadurch, daß ſie die Gränzverhältniſſe der Unterſchiede in zwey oder mehrern Reihen veränderlicher Größen als ein Mittel gebraucht, die Relationen derſelben gegen einander und zu den unveränderlichen Größen zu entwickeln. Von allen dieſen einzelnen Abtheilungen ſehe man die davon handelnden Artikel.

Die Geometrie, als Wiſſenſchaft von den Formen des Ausgedehnten, betrachtet es entweder völlig als ein ſolches, und nimmt bey denſelben gar keine Einheit an, auch keine unbeſtimmte, wie die Geometrie der Alten es ſich zur Regel gemacht hat, oder ſie nimmt die Eigenſchaften der Gleichungen und die Lehren der Analyſis, auch der Differential- und Integralrechnung zu Hülfe, wo die Mittel der alten Geometrie nicht zureichen. Die Goniometrie iſt ein Syſtem von Sätzen über die Lage der Linien gegen einander. Dieſe können aus ein paar erſten Sätzen, die mittelſt einer Conſtruction gefunden ſind, durch Rechnung hergeleitet werden. Die Trigonometrie zeigt, wie aus drey gegebenen Beſtimmungsſtücken in einem ebe-

ihn ſelbſt unabhängig gebildeten Formen der Größe hergeleitet werden, oder daß die Grundlage ihrer Unterſuchungen eine ſolche Beſchaffenheit ſehr nahe habe, und hypothetiſch für gleichgeltend genommen werden könne.

Auf die letztere Art entſteht eine Wiſſenſchaft, welche man faſt ohne Einſchränkung eine Wiſſenſchaft a priori nennen kann, die reine Mechanik, welche durch die neuern Mathematiker von Newton bis Laplace mit ſo glänzendem Erfolge bearbeitet iſt, und dem Scharfſinne des menſchlichen Verſtandes die größte Ehre macht, größere als man, ohne nähere Kenntniß davon zu haben, nur begreifen kann. In ihr finden die feinſten Anwendungen der höhern Geometrie und der tiefern Analyſis Statt. In der zweyten Abtheilung dieſes Werks wird von dieſer Wiſſenſchaft theils im Allgemeinen, theils im Beſondern gehandelt werden; hier folgt nur zur Ueberſicht des Gebiets der Mathematik einiges zur vorläufigen Erklärung.

Man gebe dem geometriſchen Körper noch Daſeyn, das iſt, man ſehe ihn als etwas an, das auf andere Dinge ſeiner Art wirken, aber auch von ihnen Veränderungen leiden kann. Die allgemeinſte Veränderung, die ein Körper erfahren kann, iſt Veränderung ſeines Orts, oder ſeiner Stelle in dem allgemeinen Raume, einer abſtrakten unbegränzten Ausdehnung, worin irgendwo jeder Körper vorhanden iſt. Die Veränderung des Orts iſt Bewegung, eine Vorſtellung, die ſchon in der reinen Geometrie gebraucht wird. Kein Körper ändert ſeinen Zuſtand der Ruhe oder der Bewegung ohne Einwirkung von außen. Daher iſt die Bewegung gleichförmig, wenn der Körper keine Einwirkung von andern Körpern leidet, oder ſo fern dieſe bey Seite geſetzt wird. Dann iſt das Verhältniß der beſchriebenen Räume das Verhältniß der Zeiten. In derſelben Zeit iſt bey gleichförmigen Bewegungen das Verhältniß der Räume dasjenige der Geſchwindigkeiten. Bey ungleichförmigen Bewegungen iſt das letzte Verhältniß der in gleichen Zeitelementen beſchriebenen Räume dasjenige der

fähig ſind, ſo wie dieſelben ſich nach weggenommenen oder verminderten äußern Druck wieder ausdehnen.

Zufolge der Beſchaffenheit der Körper erhält die Mechanik zwey Haupttheile: die Mechanik der feſten Körper, und die Mechanik der flüſſigen. Die erſtere betrachtet die Körper entweder im Stande des Gleichgewichts, Statik, oder in der Bewegung begriffen, Mechanik insbeſondere. In dieſer wird erſtlich unterſucht, wie die Bewegungen beſchaffen ſind, die durch Schwerkräfte (beſchleunigende Kräfte) entſtehen, entweder ſo daß der Körper ſich frey in einem leeren Raume oder in einem widerſtehenden Mittel bewegt, oder daß er einen vorgeſchriebenen Weg (z. B. ein Pendel) zu nehmen genöthigt iſt. Die Unterſuchung des erſten Falles giebt die Grundlage zu der phyſiſchen Aſtronomie. Sie wird ſehr ſchwer, wenn mehr als ein Mittelpunct der Kräfte vorhanden iſt. Man könnte dieſen Theil der Mechanik ſchicklich die Phoronomie nennen, wenn dieſer Ausdruck nicht ſchon einen weitern Umfang erhalten hätte. In einem andern Theile der Mechanik, den man die Dynamik nennen mag, wird unterſucht, wie die Bewegungen verſchiedener Körper, die durch Fäden oder Stangen (beide als Linien betrachtet) mit einander verbunden ſind, indem ſie von einer Schwerkraft getrieben werden, ſich gegenſeitig abändern, was überhaupt die Geſtalt eines Körpers für einen Einfluß auf die Bewegung hat, er mag ſich ſchwingen oder auf einer Fläche fortgehen, insbeſondere aber die drehende Bewegung eines feſten Körpers um eine Axe und die Schwankungen derſelben, wovon in der phyſiſchen Aſtronomie auf die Erde eine ſehr feine Anwendung gemacht wird.

Die Lehre von dem Gleichgewichte und der Bewegung unelaſtiſcher flüſſiger Körper heißt die Hydrodynamik. Der Theil, der den Stand des Gleichgewichts flüſſiger Körper unter ſich und mit feſten beſtimmt, heißt Hydroſtatik, wobey die erſtere Benennung für die Bewegung insbeſondere genommen wird. — Die Aero=

Verſtand im Stande war, aus einer allgemeinen Theorie den Weltkörpern ihre Bahnen vorzuzeichnen, ſelbſt auch ſehr kleine Wirkungen der Nebenkräfte neben denen der Hauptkräfte in Rechnung zu bringen. — Die praktiſche Aſtronomie endlich ſucht die vortheilhafteſte Einrichtung der Werkzeuge, die bequemſten und ſicherſten Arten der Beobachtung, und liefert Tafeln zur möglichſt genauen Berechnung des Ortes jedes Weltkörpers für jeden Ort der Erde in jedem Augenblicke der Zeit.

Mit der Aſtronomie iſt genau verbunden die mathematiſche Geographie, weil eine genaue Kenntniß der Geſtalt der Erde und der Lage jedes Ortes, wo Beobachtungen gemacht werden, zu den aſtronomiſchen Berechnungen erfordert wird. Auch iſt der Halbmeſſer der Erde die Meßruthe, deren man ſich am Himmel bedient. Die Methoden zur Verfertigung der Landcharten gehören auch in die mathematiſche Geographie. — Die Chronologie iſt eine Anwendung der aſtronomiſchen Beſtimmungen der Länge des Sonnenjahres und des Mondenmonats zur Eintheilung der bürgerlichen Zeiten. Dieſer Anhang der Aſtronomie iſt faſt ganz hiſtoriſch, indem darin die verſchiedenen Wege erzählt und verglichen werden, welche von jeher zur Einrichtung der Zeitmaßen eingeſchlagen ſind. — Die Gnomonik, welche die Verfertigung der Sonnenuhren lehrt, iſt eine Anwendung der geometriſchen Lehre von den Projectionen auf die Schattenlinien einer Stange, welche der Erdaxe parallel iſt. Nur wegen der verſchiedenen Fälle der Entwerfung und der mancherley dabey erſonnenen Künſteleyen hat man eine eigene Abtheilung daraus gemacht.

Die dritte mathematiſch-phyſiſche Wiſſenſchaft iſt die Optik. Es iſt in den meiſten Fällen erlaubt, das Licht als geradlinichte Ausflüſſe des leuchtenden Körpers zu betrachten, und einen Lichtſtrahl als eine gerade Linie, die nach einem gewiſſen Geſetze von ſpiegelnden Flächen zurückgeworfen, und an der Oberfläche durchſichtiger Körper gebrochen wird. Dieſe Geſetze ſind der Grund, worauf die beiden Abtheilungen in der mathematiſchen Lehre

II. Die praktiſche Geometrie begreift die Feldmeßkunſt, theils die gemeine, theils die höhere zur Vermeſſung ganzer Länder; die Forſtgeometrie insbeſondere; das Nivelliren und die Markſcheidekunſt.

III. Die praktiſche Mechanik ſoll die vortheilhafteſte Einrichtung der Maſchinen angeben. Dieſe dienen theils zum Heben und Ziehen; theils zur Verfertigung von allerhand Bedürfniſſen mit Erſparung menſchlicher Kräfte; theils zur Erhebung des Waſſers, hydrauliſche Maſchinen (Hydraulik); theils zur Meſſung der Zeit, Uhren und einige andere ähnliche Maſchinen.

IV. Die bürgerliche Baukunſt giebt nur zu einigen mathematiſchen Fragen Anlaß, die Feſtigkeit der Mauern, der Gewölbe und Dächer betreffend, und über die Figuren der Durchſchnitte zweyer Gewölbeflächen. Die Rechnungen, die beym Bauanſchlage und etwa ſonſt noch vorkommen, ſind ganz unbedeutend.

V. Die Waſſerbaukunſt oder Hydrotechnik handelt von der Anlegung der Dämme, Kanäle, Häfen und von der Leitung der Flüſſe. Wegen der vielen Rückſichten auf örtliche Umſtände kommt es hier hauptſächlich auf Erfahrung an, ſo daß die Theorie nur zur Unterſtützung desjenigen dienen kann, was man nach der Analogie der Erfahrungen als ausführbar anſieht.

VI. Die Kriegswiſſenſchaften ſind: die Artillerie, die Befeſtigungskunſt, die Führung des Angriffs und der Vertheidigung einer Feſtung und die Taktik. Die erſte dieſer Abtheilungen legt eine ſchwere Frage vor, über den Weg der Bomben und Kanonenkugeln in der Luft, als einem widerſtehenden Mittel, und giebt Veranlaſſung noch zu einigen mathematiſch-phyſiſchen Unterſuchungen von Wichtigkeit. Die Befeſtigungskunſt kann mit Hülfe der gemeinen Geometrie und Trigonometrie fertig werden. Nur die Frage von der Stärke der Futtermauern mag Schwierigkeit machen.

VII. Die Wiſſenſchaften des Seeweſens ſind: der Schiffbau, die Regierung des Schiffes, die Lei-

Die Beſtimmung, welche ich der mathematiſchen Phyſik gegeben habe, wird dienlich ſeyn, die Gränzen zwiſchen angewandter Mathematik und Phyſik zu ziehen. Es bleibt freylich dem Gutbefinden eines jeden Schriftſtellers überlaſſen, was er zu dem Umfange einer von ihm abgehandelten Wiſſenſchaft aus einer verwandten nehmen will. Allein in einer ſyſtematiſchen Anordnung unſerer Kenntniſſe muß jede ihr angewieſenes Fach haben, nicht in einem andern unvollſtändig wiederholt werden. Die Aſtronomie gehört der Mathematik ganz allein zu. Inzwiſchen mag in einem phyſikaliſchen Lehrbuche eine Überſicht des Weltgebäudes mitgetheilt werden, aber als etwas entlehntes, um den Zuſammenhang unſerer Erde mit dem Ganzen zu zeigen, und die Analogie einiger Erſcheinungen zu bemerken. Was in der mathematiſchen Mechanik und Optik bewieſen wird, braucht in der Phyſik nicht erwieſen zu werden, ſondern wird da, wo es gebraucht wird, als Lehnſatz angeführt. Dieſes wird den Vortheil haben, daß man in der Phyſik ſich nicht auf die leichtern Sätze wird einſchränken dürfen, welche durch die elementariſchen Sätze der Mathematik erwieſen werden können, daß man den Raum erſpart, der ſelbſt durch dieſe Beweiſe weggenommen ward, und daß die mangelhaften Beweiſe ſolcher Phyſiker, die der Mathematik nicht genugſam kundig ſind, ſich nicht zum Nachtheil der Leſer verbreiten. Die Grundbegriffe der Mechanik mögen der Phyſik zu eigen verbleiben, eben ſo wie ihr die Erfahrungen gehören, worauf die optiſchen Wiſſenſchaften gegründet werden.

Die Gewißheit der mathematiſchen Lehren wird von jedem anerkannt, auch von ſolchen, die ihre Richtigkeit nicht prüfen können, ohne Bedenken angenommen. Worin dieſe gegründet ſey, iſt aus der Beſchaffenheit der mathematiſchen Begriffe und Schlüſſe nicht ſchwer zu erörtern. Die Begriffe von Vielheit, Ausdehnung, Lage, Verhältniß entſpringen in unſerm Geiſte ſelbſt; ſinnliche Dinge geben nur die Bilder, woran wir ſie uns klar vorſtellen. Die Formen dieſer Begriffe ſind unſer eigenes

Begriffs (einer allgemeinen Vorſtellung) Allgemeingültigkeit für alle mögliche Anſchauungen, die unter denſelben Begriff gehören, in der Vorſtellung ausdrücken muß. So conſtruire man ein Dreyeck, indem man den dieſem Begriffe entſprechenden Gegenſtand, entweder durch bloſße Einbildung, in der reinen, oder nach derſelben auch auf dem Papiere, in der empiriſchen Anſchauung, beidemahl aber völlig a priori, ohne das Muſter dazu aus irgend einer Erfahrung geborgt zu haben, darſtellt. Die einzelne hingezeichnete Figur iſt empiriſch, und dient gleichwol den Begriff, unbeſchadet ſeiner Allgemeinheit, auszudrücken. — Die philoſophiſche Erkenntniß (ſagt Kant ferner) betrachtet das Beſondere nur im Allgemeinen, die mathematiſche das Allgemeine im Beſondern, ja gar im Einzelnen, gleichwol doch a priori und vermittelſt der Vernunft. In dieſer Form beſtehe der weſentliche Unterſchied dieſer beiden Arten der Vernunfterkenntniß, und beruhe nicht auf dem Unterſchiede ihrer Materie oder ihrer Gegenſtände. Diejenigen, welche Philoſophie von Mathematik dadurch zu unterſcheiden vermeineten, daß ſie von jener ſagten, ſie habe blos die Qualität, dieſe aber nur die Quantität zum Object, hätten (ſagt er) die Wirkung für die Urſache genommen. Die Form der mathematiſchen Erkenntniß ſey die Urſache, daß dieſe lediglich auf Quanta gehen kann. Denn nur der Begriff von Größen laſſe ſich conſtruiren, d. i. a priori in der Anſchauung darlegen, Qualitäten aber laſſen ſich in keiner andern als empiriſchen Anſchauung darſtellen. Daher könne eine Vernunfterkenntniß derſelben nur durch Begriffe möglich ſeyn. — „Die Mathematik (ſagt K. weiterhin) conſtruirt nicht blos Größen (Quanta), wie in der Geometrie, ſondern auch die bloße Größe (Quantitatem), wie in der Buchſtabenrechnung, wobey ſie von der Beſchaffenheit des Gegenſtandes, der nach einem ſolchen Größenbegriffe gedacht werden ſoll, gänzlich abſtrahirt. Sie wählt ſich alsdann eine gewiſſe Bezeichnung aller Conſtructionen von Größen überhaupt, und, nachdem ſie

hen kann, ſondern umgekehrt, weil die Mathematik ſich ausſchließlich mit Quantis beſchäftigt, hat die Erkenntniß in derſelben eine eigene Form. Denn das Weſen einer Wiſſenſchaft beruht auf ihrem Gegenſtande, und ihre Methode wird durch dieſen beſtimmt.

Kant ſcheint den Ausdruck, Erkenntniß aus Begriffen, auf dasjenige einzuſchränken, was aus einem einzelnen Begriffe folgt, wie ich aus dem von ihm gebrauchten Beyſpiele ſchließe. Man ſolle einem Philoſophen den Begriff eines Dreyecks geben, um ihn nach ſeiner Art ausfindig machen zu laſſen, wie ſich wol die Summe ſeiner Winkel zu einem rechten verhalte. Er werde aus dem Begriffe eines Dreyecks allein nichts Neues herausbringen. Der Geometer aber nehme ſogleich eine Conſtruction des Dreyecks vor, ziehe daran durch einen der Winkelpuncte eine parallele mit der gegenüber liegenden Seite, und finde nun durch eine Kette von Schlüſſen, immer durch die Anſchauung geleitet, eine völlig einleuchtende und allgemeine Auflöſung der Frage. Wenn Kants Philoſoph es in ſeinem Fache nicht beſſer macht als in der Geometrie, ſo wird er daſelbſt eben ſo wenig etwas herausbringen. Wie kann man ohne Verbindung mehrerer Begriffe, ohne Mittelſätze, zu irgend einem neuen Satze gelangen? Die von Kant ſo genannten analytiſchen Sätze, die aus einer Erklärung unmittelbar hergeleitet werden, ſind ein kahles Idem per idem, nur zu Zwiſchenſätzen in einer Schlußfolge brauchbar.

Allein bey dieſem Exempel iſt noch zu bemerken, daß hier in der That nichts aus dem Begriffe eines Dreyecks hergeleitet wird, ſondern aus Sätzen über die Lage gerader Linien gegen einander. Der Satz betrifft nicht das Dreyeck, als eine von drey geraden Linien eingeſchloſſene Figur, ſondern die Lage dreyer Linien gegen einander, und iſt eigentlich dieſer: Wenn zwey ſich ſchneidende gerade Linien von einer dritten geſchnitten werden, ſo iſt der Winkel jener das Complement der beiden innern Winkel eben derſelben mit der dritten zu zwey rechten. Alles wird aus dem Begriffe von Parallelen hergeleitet. Zuerſt hatte der

und die mit den Dingen ſelbſt vorgenommenen nicht denen mit bloßen Zahlen auf dem Papiere. So fern man bey ſinnlichen ausgedehnten Größen nur auf die Ausdehnung nach der Länge, Oberfläche oder des räumlichen Inhalts, oder die Lage ſieht, muß alles, was ſich darauf bezieht, mit der Rechnung oder den gefundenen Verhältniſſen zuſammentreffen.

Die mathematiſche Methode iſt ein Muſter einer ſtreng wiſſenſchaftlichen. Sie gebraucht vollkommen beſtimmte und deutliche Begriffe, geht von unbezweifelbaren Grundſätzen aus, und kettet die Schlüſſe ſo zuſammen, daß nirgends eine ſchwache Stelle oder gar eine Lücke entſteht. Dieſes wird durch die Form der mathematiſchen Schlüſſe, die auf ihrem Gegenſtande beruht, möglich. Die Beſchaffenheit unſerer Erkenntniß in andern Dingen läßt es nicht zu jenes Muſter zu erreichen, allein im Allgemeinen muß man eben ſo verfahren, beſonders muß man ſuchen mit den Begriffen aufs Reine zu kommen, und ſich darüber gegenſeitig zu verſtändigen. Die philoſophiſchen Streitigkeiten haben vielleicht am häufigſten ihre Quelle in der Bildung der Begriffe, und der Unbeſtimmtheit, worin man ſie läßt.

Die äußere Form der mathematiſchen Methode iſt, daß man den Sätzen ihre Benennungen beyfügt: Lehrſatz, Aufgabe, Zuſatz, Lehnſatz, Anmerkung (Scholium); daß man den Satz, der erwieſen werden ſoll, vor dem Beweiſe aufſtellt; daß man eben ſo den Inhalt einer Aufgabe vorträgt, auch wol die Vorbereitung, die Auflöſung und den Beweis jedes abgeſondert folgen läßt; endlich, daß jedem Gliede der Schlußkette und jeder Forderung die Paragraphenzahl zugeſetzt wird, wo der Beweis oder die Anweiſung gegeben iſt. Dieſes hat allerdings ſeinen Nutzen, beſonders was die Aufſtellung der Sätze, und die Auflöſungen der Aufgaben betrifft, um die Überſicht des Ganzen zu erleichtern. Das Citiren iſt nicht durchgängig nothwendig, nur bey wichtigern Sätzen, weil der Leſer nicht zur Bequemlichkeit verwöhnt werden muß. Allein die Form macht nicht

Zeugniß aus einer äſthetiſchen Schrift her. Die Verſe hätten nur etwas wohlklingender ſeyn ſollen.

Archimedes und der Lehrling.

Zu Archimedes kam ein wißbegieriger Jüngling;
 Weihe mich, ſprach er zu ihm, ein in die göttliche Kunſt,
Die ſo herrliche Früchte dem Vaterlande getragen,
 Und die Mauern der Stadt vor der Sambuca beſchützt.
Göttlich nennſt du die Kunſt! Sie iſt es, verſetzte der Weiſe.
 Aber das war ſie, mein Sohn, eh' ſie dem Staat noch gedient.
Willſt du nur Früchte, die kann auch eine Sterbliche zeugen;
 Wer um die Göttinn freyt, ſuche in ihr nicht das Weib.

Mathematiker, eine der Mathematik kundige Perſon, im Franzöſiſchen gewöhnlich Géometre. Hier folgen einige Bemerkungen über das Talent des Mathematikers aus dem Artikel, Géometre in dem Dictionnaire encyclopédique, welcher d'Alembert zum Verfaſſer hat.

Ein Mathematiker, wenn er ſich auch darauf einſchränkt, nur dasjenige zu verſtehen, was von andern erfunden iſt, muß doch verſchiedene, nicht ſehr gewöhnliche Fähigkeiten mit einander verbinden; ein richtiges Unterſcheidungsvermögen für Wahrheit und Irrſchlüſſe, eine leichte Faſſungskraft ſowol für das Einzelne als das Ganze, beſonders bey verwickelten Beweiſen, Gedächtniß, um nicht allein die Sätze, ſondern auch wenigſtens den Geiſt der Beweiſe zu behalten, um davon, wo es nöthig, Gebrauch zu machen. Der Mathematiker aber, der zu den Entdeckungen ſeiner Vorgänger noch neue hin-

ſpiele, daß beides mit einander vereinigt iſt. Paſcal, der ein ſo ſchönes geometriſches Werk über die Cykloide geliefert hat, und der vielleicht der größte Geometer auf der Welt geworden wäre, wenn er nicht aus einer zu ängſtlichen Religioſität ſein Talent zurückgeſetzt hätte; dieſer Paſcal war zugleich ein ſehr witziger Kopf; ſeine Lettres provinciales ſind ein Meiſterſtück von Scherz und Beredſamkeit, das iſt, ein Muſter in zweyerley, dem Scheine nach unverträglichſten, Gattungen der Schreibart. Fontenelle, der ein angenehmer Schriftſteller und Mathematiker zugleich war, darf vielleicht nicht angeführt werden, weil man ſagen möchte, er ſey (als Secretär der Akademie der Wiſſenſchaften) zufällig ein Mathematiker geworden. Dagegen aber kann man Descartes anführen, deſſen philoſophiſche Werke für ſeine Zeit ungemein gut geſchrieben ſind; ferner die Gedichte von Manfredi, die Fontenelle mit ſo vielem Grunde gelobt hat; das Gedicht, welches Halley den Newtoniſchen Principien der Naturwiſſenſchaften vorgeſetzt hat, und noch andere ſolche Beyſpiele.

Die Mathematik, ſagt man ferner, giebt dem Geiſte eine Dürre. Das mag ſeyn, wenn die Anlage von Natur ſchon da iſt, und in dieſem Falle würde man an den Schönheiten in den Werken der Einbildungskraft nicht mehr Geſchmack finden, wenn man auch die Mathematik gar nicht ſtudirt hätte. Wer aber mit dem Talent zur Mathematik von der Natur zugleich einen für andere Gegenſtände biegſamen Geiſt erhalten hat, der bedacht iſt, dieſe glückliche Gewandtheit ſich zu erhalten, dadurch, daß er nicht unabläſſig über Linien und Rechnungen gebückt ſitzt, ſondern auch mit der angenehmen Literatur und Philoſophie ſich beſchäftigt, der wird über der Sorgfalt für die nothwendige Strenge in den Beweiſen den Geſchmack an den Werken der ſchönen Kunſt nicht verlieren; er wird im Stande ſeyn, ein Problem aufzulöſen und einen Dichter zu leſen, die Bewegungen der Planeten zu berechnen, und an einem Schauſpiele Vergnügen zu finden.

Brücke, welche Euler darüber geſchlagen hat, leicht über- ſteiglich geworden ſey. Anders ſey es mit der Kunſt zu ſchreiben beſchaffen. Die Schreibart eines de la Fontaine laſſe ſich nicht erlernen, und bey der zwölften Zeile könne man ſchon abnehmen, ob ein Schriftſteller einen eigenen Styl habe, oder ob er aus dem Gedächtniß ſchreibe.

Mercier, ſagt man, iſt eiferſüchtig über das große Anſehen, welches die Mathematiker und Phyſiker in dem National-Inſtitut haben. Freylich laſſen ſich die ma- thematiſchen Sätze, welche ſchon erfunden ſind, erlernen; allein ſie zu entdecken war ſo gut ein Werk des Genies, als in der Dichtkunſt die Hervorbringung eines Original- ſtücks.

Media et extrema ratio, ſ. extrema et media ratio. Th. II. S. 177.

Mediale, ſ. Irrational. Th. II. S. 950.

Medietates, ſ. Mittel.

Mercators Reihe für die Hyperbel, ſ. Logarithmus (139) und Quadratur.

Mesolabum iſt die Benennung, welche Eratoſthenes einem von ihm erdachten Inſtrument, zwey oder mehrere geometriſch mittlere Proportionalen zwiſchen zwey gegebenen zu finden, gegeben hat, ſ. Th. I. S. 723. Auch iſt Mesolabum der Titel einer Schrift von Slüſe (Slusius) über die Aufgaben zwiſchen zwey gegebenen geraden Linien zwey mittlere proportionale zu finden, einen Winkel in drey Theile zu theilen, oder Aufgaben, die auf cubiſche Gleichungen führen, vermittelſt der Durchſchnitte zweyer Kegelſchnitte aufzulöſen, ſ. Th. I. S. 61.

Mesologarithmus iſt in Keplers Rudolphiniſchen Tafeln der Neperiſche Logarithme der Tangente eines Winkels. Die Benennung iſt daher, weil in Nepers und Urſinus Tafeln die Columne der logarithmiſchen Tangenten zwiſchen den Columnen der logarithmiſchen Sinus und

Die Benennung, Meteoroscopium, bedeutet etwas, das zur Betrachtung des in der Höhe befindlichen dient, von μετεωρος, hoch oder erhaben, und σκοπειν, betrachten.

Methode iſt erſtlich eine gewiſſe Anordnung der Sätze und Aufgaben, hier der mathematiſchen. Dieſe mag auf mancherley Art gemacht werden. Es verſteht ſich, daß zu dem Beweiſe eines jeden Satzes die Prämiſſen alle in dem vorhergehenden ſich finden, und daß zu allem, was bey der Auflöſung einer Aufgabe zu conſtruiren oder zu berechnen iſt, die Art, wie es bewerkſtelligt wird, in dem Vorhergehenden gezeigt ſey. Dann aber muß auch die Reihe der Sätze und Aufgaben ſo eingerichtet werden, daß die Beweiſe und die Auflöſungen ſo kurz und ſo faßlich, als es nur möglich ſeyn mag, werden. Ein Satz findet überhaupt da ſeine Stelle, wo alles zu deſſen Erweiſe nöthige vorbereitet worden iſt, und zwar ſo, daß der Beweis dadurch aufs kürzeſte und einleuchtendſte werde. Wenn ein Beweis zu umſtändlich wird, ſo muß man ſuchen, ob man den Weg dazu nicht durch Mittelſätze erleichtern möge, die gleichſam Ruheplätze für den Leſer abgeben. Auf gleiche Art verhält es ſich mit den Auflöſungen der Aufgaben.

Es laſſen ſich nicht immer die Sätze und Aufgaben nach dem Gegenſtande anordnen. Denn ſehr oft findet dasjenige, was über einen Gegenſtand beygebracht werden ſoll, nicht alles in dem Vorhergehenden ſeine Erweisgründe. Die Anordnung nach dem Inhalte muß der Anordnung, die der Schärfe der Beweiſe gemäß iſt, immer nachſtehen. Euklides handelt in dem erſten Buche ſeiner Elemente von Linien, Winkeln und Flächen durcheinander. Dieſes iſt gar nicht wider die gute Methode. Denn ihm kam es auf diejenige Anordnung an, wobey die Strenge der Beweiſe die Regel iſt. In den folgenden Büchern, nachdem die Prämiſſen zu den Erweiſen der Sätze und der Auflöſungen in dem erſten niedergelegt ſind, beobachtet er die Anordnung nach dem Inhalte.

ßerdem, daß ſie ſehr eingeſchränkt iſt. S. Centrobaryca methodus. Th. I. S. 428 ff.

Die Methode der unbeſtimmten Coefficienten iſt ein ſehr bequemer Weg irgend einen analytiſchen Ausdruck einer Größe in eine Reihe zu verwandeln.

Taylors Lehrſatz, la Grange's Lehrſatz, Hindenburgs combinatoriſche Analyſis, Arbogaſts Derivationsrechnung ſind noch andere Beyſpiele von Methoden in der Mathematik.

Million bezeichnet eine Zahl von tauſend mahl tauſend Einern, ſ. Zahl.

Minuendus iſt die Zahl, von welcher eine andere Zahl abzuziehen iſt.

Minus, ein Kunſtwort, welches anzeigt, daß die Größe, welcher es vorgeſetzt wird, von einer andern abgezogen werden muß. Das Zeichen iſt —. Wo das zufolge einer allgemeinen Formel gefundene Reſultat einer Rechnung dieſes Vorzeichen bekommt, deutet es an, daß der in der allgemeinen Berechnung angenommene Fall der Verbindung der Größen ein anderer iſt, als der Fall der Aufgabe, und daß in jenem die geſuchte Größe durchaus ihr Vorzeichen ändern muß, worauf das Reſultat das Vorzeichen + erhalten wird. S. entgegengeſetzte Größen.

Minute iſt der ſechzigſte Theil einer Einheit, gewöhnlich der Grade oder der Stunden. Der ſechzigſte Theil einer Minute iſt minutum ſecundum, oder kurz, Secunde. Davon der ſechzigſte Theil iſt minutum tertium, oder Tertie, u. ſ. w. Dieſe für unſere genauern Berechnungen unbequeme Eintheilung mag daher beliebt worden ſeyn, weil die Zahl 60 viele Theiler hat, und daß daher ein Bruchtheil durch die Brüche, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, und die Producte derſelben, wo nöthig, mit einigen Einern in den Zählern, ausgedruckt werden kann.

Z. B. 42 Min. ſind $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$ eines Grades; 37 Min. ſind $\frac{3}{5} + \frac{1}{60}$. Ptolemäus theilt auch den Halbmeſſer in 60 Theile, und jeden Theil in eben ſo viele. Z. B. die Chorde von 36° giebt er an zu 37°4′55″, das iſt 37,08194 ... ſolcher Theile, deren der Halbmeſſer 60 hat. Nimmt man dieſen = 1, ſo wird ch. 36° = 0,618032, und sin 18° = 0,309016 nahe wie in unſern Tafeln.

Die Bezeichnung der Minuten geſchieht durch ein Strichelchen oben an der Zahl′, der Secunden durch zwey u. ſ. f. Z. B. 53′28″17‴.

Mittel iſt eine Größe, die zwiſchen zwey andern enthalten iſt, und aus dieſen auf eine gewiſſe Art beſtimmt wird. Dieſe Art iſt dreyerley.

1. Das arithmetiſche Mittel zwiſchen zwey gleichnamigen Größen macht mit ihnen eine ſtetige arithmetiſche Proportion aus, z. B. 10, 15, 20. Es iſt die halbe Summe derſelben, wie hier $15 = \frac{1}{2}(10 + 20)$ iſt. Das arithmetiſche Mittel zwiſchen n gleichnamigen Größen iſt die Summe derſelben durch n dividirt. Dieſes Mittel kommt meiſtens in praktiſchen Rechnungen vor, z. B. wenn verſchiedene Beobachtungen oder Berechnungen einer und derſelben Größe aus jenen gemacht ſind, ſehr häufig in der Aſtronomie. Die Anzahl der Gebornen, Geſtorbenen und Getraueten an einem Orte giebt man nach einem arithmetiſchen Mittel, einem Durchſchnitt, mehrerer Jahre an, eben ſo den Ertrag eines Landgutes oder einer andern etwas veränderlichen Einnahme oder Ausgabe.

2. Das arithmetiſche Mittel zwiſchen zwey ungleichnamigen Größen iſt auf gleiche Art die Hälfte ihres Unterſchiedes abſolut genommen, oder, zwiſchen a und — b iſt das arithmetiſche Mittel $= \frac{1}{2}(a - b)$. Man kann ſich dieſes durch eine Zeichnung zweyer ſich ſchneidenden geraden mit ihren Coordinaten noch deutlicher machen.

3. Das arithmetiſche Mittel mehrerer ungleichnamigen Größen iſt das Aggregat derſelben, jeder mit ihren Vorzeichen genommen, dividirt durch die Anzahl aller. —

Denn man ſetze zu jeder derſelben eine Größe, wodurch die ſubtractiven oder negativen Größen alle poſitiv oder den andern gleichnamig werden. Alsdann wird das Mittel nach (1.) beſtimmt. Nimmt man von dieſem den nten Theil der n mahl zugeſetzten Größe, d. i. ſie ſelbſt, weg, ſo erhält man das Mittel der vorgegebenen Größen.

4. Das geometriſche Mittel zwiſchen zwey Größen iſt die mittlere geometriſche Proportionale zwiſchen denſelben, oder die Quadratwurzel aus ihrem Producte. Die beiden äußern Größen ſeyn a und c, das Mittel b, ſo iſt $a : b = b : c$, wo $bb = ac$. In der Geometrie kommt es vorzüglich vor.

5. Das arithmetiſche Mittel zweyer Größen iſt größer als das geometriſche zwiſchen denſelben. — Denn es ſey b das geometriſche Mittel zwiſchen a und c; β das arithmetiſche, ſo iſt $bb = ac$ und $2\beta = a + c$. Da $4\beta^2 = a^2 + 2ac + c^2$ iſt, ſo iſt $4\beta^2 - 4b^2 = a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2$, und $\beta^2 - b^2 = \frac{1}{4}(a - c)^2$. Da das Quadrat immer poſitiv bleibt, ſo iſt β größer als b.

6. Das harmoniſche Mittel b zweyer Zahlen a und c iſt $= \frac{2ac}{a + c}$. Es iſt nämlich $a - b : b - c = a : c$. (Harmoniſche Proportion, Th. II. S. 697).

7. Die drey Mittel laſſen ſich geometriſch bequem neben einander darſtellen. Es ſeyn AD, DB, (Fig. 120.) die beiden äußern Größen auf der geraden AB. Dieſe werde in C halbirt, ſo iſt AC oder CB das arithmetiſche Mittel. Man beſchreibe aus C mit dem Halbmeſſer AC einen Halbkreis AEB, und ziehe durch D auf AB die ſenkrechte DE bis an den Kreis in E, ſo iſt DE das geometriſche Mittel. (Kreis, 29). Aus D ziehe man DF ſenkrecht auf CE, ſo iſt EF das harmoniſche Mittel. — Was das letztere betrifft, ſo iſt in den ähnlichen Dreyecken CDE, EFD, CE : ED = ED : EF. Da nun auch AD : ED = ED : DB, oder ED : AD = DB : ED iſt, ſo iſt durch Zuſam-

menſetzung der Verhältniſſe, CE : AD = DB : EF, und EF iſt das harmoniſche Mittel zwiſchen AD und DB (6.)

Pappus führt dieſe Conſtruction der drey Medietäten an als eine von einem Ungenannten herrührende. Collect. Mathem. L. III. p. 12. Den Beweis hat dieſer nicht zugeſetzt. Er ſelbſt giebt eine andere Conſtruction, die jener aber weit nachſteht.

8. Die Alten haben noch ſieben Arten von Medietäten betrachtet, die etwas verwandt mit der harmoniſchen ſind. Es ſey a — b : b — c wie c : a, oder wie c : b, oder wie b : a, ſo iſt b eine Medietät. Die erſte dieſer dreyen iſt die contraharmoniſche. Ferner ſey a — c : a — b wie b : c, oder wie a : b, oder wie a : c, oder es ſey a — c : b — c wie b : c, ſo iſt b auch eine Medietät. Es iſt nicht der Mühe werth, darüber noch Vergleichungen anzuſtellen. Die Pythagoräer haben ſich viel mit den Medietäten beſchäftigt, wie man aus des Theons Schrift über die mathematiſchen Kenntniſſe zum Verſtändniß der platoniſchen Schriften, Cap. 61. ſieht.

9. Eratoſthenes hat von den Medietäten (περι μεσοτητων) in zwey Büchern gehandelt. Pappus erwähnt derſelben in der Vorrede zu dem ſiebenten Buche ſeiner mathematiſchen Sammlungen, ohne aber von der Behandlung das geringſte anzuführen. Das griechiſche Kunſtwort, μεσοτης, Medietät, bedeutet, nach der Erklärung, die Pappus im dritten Buche giebt, was wir eine ſtetige Proportion nennen, es ſey eine arithmetiſche, geometriſche oder harmoniſche. Die geometriſche nannten die Alten insbeſondere Analogie. Daher ſagt Pappus, jede Analogie ſey eine Medietät, aber nicht umgekehrt. Vielleicht hat Eratoſthenes insbeſondere ſich mit den ſchwerern Fällen der harmoniſchen Medietät beſchäftigt, wo der mittlere Terminus zwey Werthe erhält. Montúcla glaubt (Hist. des Mathém. T. I. p. 280.), daß folgende zwey Aufgaben von Eratoſthenes behandelt ſeyn möchten.

10. Es ſind in einer Ebene zwey gerade Linien gegeben; in derſelben werde noch eine dritte gezogen, die als Axe zu den Ordinaten an jene beiden Linien diene. Es wird der Ort geſucht, woran die Ordinaten das dritte Glied einer ſtetigen Proportion, es ſey arithmetiſchen, geometriſchen oder harmoniſchen, zu den correſpondirenden Ordinaten an jene beiden Linien ſind. Oder, es ſind in einer Ebene drey gerade Linien gegeben, und eine vierte wird gezogen, die auf gleiche Art als Axe dient; es wird der Ort geſucht, woran die Ordinaten die vierte Proportionale zu den Ordinaten an die drey geraden iſt, in einer der drey Proportionen.

Man kann hierzu noch die Aufgabe ſetzen, den Ort für die mittlere Proportionale zwiſchen den Ordinaten an zwey gegebene geraden zu finden. — Montücla ſagt, daß jene beiden Aufgaben durch die neuere Analyſis leicht aufgelöſet werden. Sie verdienen, daß die Auflöſung hier angezeigt werde.

11. Zuerſt ſeyn zwey gerade Linien gegeben. Die Gleichungen für dieſelbe ſeyn

$$\text{I. } t = ax + b; \quad \text{II. } u = cx + d.$$

(Linie, 13). Die Coordinaten für den geſuchten Ort ſeyn x und y, von welchen x die für den Ort und die beiden geraden Linien gemeinſchaftliche Abſciſſe iſt. Erſtlich ſey die Ordinate y die dritte arithmetiſch-proportionale zu t und u, ſo iſt $y = 2u - t$, und es iſt.

$$y = (2c - a)x + 2d - b.$$

Der Ort iſt alſo eine gerade Linie.

Zweytens ſey y die dritte geometriſch-proportionale, ſo iſt $y = \frac{uu}{t}$, und

$$(ax + b)y = (cx + d)^2, \text{ oder}$$

$$c^2x^2 - axy + 2cdx - by + d^2 = 0.$$

Die Gleichung gehört für einen Kegelſchnitt. Daß dieſer keine Ellipſe ſeyn könne, ergiebt ſich aus der Beſchaffenheit der Aufgabe ſogleich; aber auch keine Parabel, weil für unendliche entgegengeſetzte x die unendlichen Or-

dinaten auch entgegengeſetzt ſind. Der Ort iſt alſo eine Hyperbel, und wegen des fehlenden Gliedes y^2 iſt die eine ihrer Aſymptoten der Axe der y parallel (Krumme Linien der erſten Claſſe, 3 u. 33). Zur Vergleichung unſerer Gleichung mit der allgemeinen am a. O. hat man die Bezeichnungen x und y mit einander zu vertauſchen. Wenn man $x = -\frac{b}{a}$ nimmt, ſo wird y unendlich groß, und die eine Aſymptote geht durch den aus dieſer Gleichung beſtimmten Punct in der Richtung der y. Setzt man x unendlich groß, ſo wird $y = \frac{c^2 x}{a}$. Mit der geraden Linie, die durch dieſe Gleichung beſtimmt wird, iſt die andere Aſymptote parallel, wenn ſie es nicht ſelbſt iſt.

Drittens ſey y die dritte harmoniſch-proportionale zu t und u, ſo iſt $y = \frac{tu}{2t - u}$, und der Ort für dieſe proportionalen iſt ebenfalls eine Hyperbel.

12. Es ſeyn drey gerade Linien gegeben, durch die Gleichungen: I. $t = ax + b$; II $u = cx + d$; III. $v = ex + f$. Nun iſt entweder $y = u + v - t$; oder $y = \frac{uv}{t}$, oder $y = \frac{tv}{2t - u}$. In dem erſtern Falle iſt der Ort eine gerade Linie, in den andern beiden eine Hyperbel.

13. Sind zwey gerade Linien gegeben, und nimmt man $yy = tu$, ſo iſt $y^2 - acx^2 - (ad + bc)\, x - bd = 0$. Dieſe Gleichung gehört für eine Hyperbel, wenn a und c gleichnamige Größen ſind, aber für eine Ellipſe, wenn ſie ungleichnamig ſind (a. a. O. 31 u. 29). Die Ordinate y hat nur mögliche Werthe, wenn t und u gleichnamig ſind. Sind a und c gleichnamig, ſo ſchneiden die beiden geraden Linien die Abſciſſenlinie nach derſelben Gegend hin unter gleichnamigen Winkeln, und nur innerhalb gewiſſer Gränzen von dem Anfangspuncte an ſind die Ordinaten t und u ungleichnamig, nämlich zwiſchen

ihren Durchſchnittspuncten mit der Abſciſſenlinie. Daher iſt hier eine Hyperbel der geſuchte Ort, da dieſe krumme Linie auch innerhalb gewiſſer Gränzen unmögliche Ordinaten hat. Sind aber a und c ungleichnamig, ſo ſind die Durchſchnittswinkel auch ungleichnamig, und die Ordinaten t und u ſind nur innerhalb der Durchſchnittspuncte gleichnamig; daher der Ort eine Ellipſe iſt.

14. Der Ort für die mittlere Proportionale jeder der drey Arten möchte noch eher von Eratoſthenes unterſucht ſeyn, als der für die dritte oder vierte Proportionale. Jene Aufgabe folgt natürlicher Weiſe auf die von der Beſtimmung einer einzelnen mittlern Proportionale.

Modulus iſt überhaupt was einen Maßſtab abgiebt, insbeſondere bey Logarithmen, wo der Modulus das Verhältniß der Logarithmen in einem Syſtem zu denen in dem natürlichen Syſtem, bey gleichen zugehörigen Zahlen angiebt, ſ. Logarithmus, 24. Das Kunſtwort iſt in dieſer Materie von Cotes eingeführt, Harmonia mensurarum, im Anfange. Er nennt ratio modularis ein beſtimmtes und unveränderliches Verhältniß, das zur Meſſung aller andern dient. Dieſes iſt ihm das von e : 1, oder 2,7182818 . . : 1, wo e die Baſis des natürlichen Syſtems iſt. Der Modulus in irgend einem Syſtem der Verhältnißmaßen iſt das Maß dieſes Verhältniſſes. Es iſt nämlich M = log. artif. e (Logar. 35), alſo das Maß des Verhältniſſes e : 1 in dem künſtlichen Syſtem. So wie man überhaupt eine Menge mit der Einheit A auf eine gleichgeltende Menge mit der Einheit B bringt, durch die Multiplication mit dem Werthe der Einheit A in Beziehung auf die Einheit B (z. B. 100 Fl. = $\frac{2}{3}$. 100 Rthlr.), ſo geſchieht es auch bey der Reduction natürlicher Logarithmen auf künſtliche. Das Verhältniß 1 : e, welches in dem natürlichen Syſtem als Einheit dient, hat in dem künſtlichen, wo das Verhältniß 1 : a zur Einheit dient, einen Werth, der durch log. artif. e ausgedruckt wird. Darum muß ein künſtlicher Logarithme mit

Oder es bezeichnet als Beywort zu λογος, d. i. Verhältniß, ein beſtimmtes individuelles unter unendlich vielen. In des Pappus mathematiſchen Sammlungen, 7. Buche ſind der 61ſte, 62ſte und 64ſte Satz durch den Beyſatz, Monachus, ausgezeichnet.

1. Die allgemeine Aufgabe, worauf ſich der 61ſte Satz bezieht, iſt folgende. Auf der geraden Linie,

A B E C D

ſeyn vier Puncte, A, B, C, D, gegeben, es ſoll zwiſchen den beiden mittlern Puncten B, C ein Punct E gefunden werden, ſo daß das Verhältniß des Rechtecks von den Abſchnitten zwiſchen E und zweyen der gegebenen Puncte zu dem Rechteck von den Abſchnitten zwiſchen demſelben und den übrigen beiden Puncten ein gegebenes ſey. Ein beſonderer Fall dieſer Aufgabe (epitagma) iſt, wenn jene erſtern Puncte die beiden äußern, A, D, die beiden andern die mittlern ſind. Der durch monachus bezeichnete Satz ſagt aus, in welcher Lage des Punctes E das Verhältniß der beiden Rechtecke am kleinſten iſt, und giebt auch dieſes Verhältniß ſelbſt an.

2. Man ſetze $AD = a$; $AB = b$; $AC = c$; $AE = x$. Jener Satz, durch dieſe Bezeichnungen ausgedruckt, iſt: wenn $b(a-b) : c(a-c) = (x-b)^2 : (c-x)^2$ iſt, ſo iſt das Verhältniß $x(a-x) : (x-b) \times (c-x)$ am kleinſten, und $= a^2 : [\sqrt{c(a-b)} - \sqrt{b(a-c)}]^2$.

3. Wenn das Verhältniß $x(a-x) : (x-b) \times (c-x)$ gegeben wird, ſo wird x durch die Auflöſung einer quadratiſchen Gleichung gefunden, oder durch eine Conſtruction, welche für Aufgaben dieſer Art das Vermögen der alten Geometrie nicht überſtieg. Allein wenn dasjenige x gefunden werden ſoll, für welches jenes Verhältniß am kleinſten iſt, ſo war dieſes ſo viel, als die kleinſte Ordinate an einer krummen Linie des dritten Grades finden. Dieſer Fall war wirklich ſchwer, und es iſt ein Beweis eines großen geometriſchen Scharfſinns, daß Apollonius dieſe Aufgabe durch ſeine Geometrie aufgelöſet

Die negative Wurzel gehört für einen andern zu dieſem gehörigen Fall, da der Punct E außerhalb AD genommen wird. Es iſt hieraus

$$a - x = \frac{[\sqrt{(a-b)(a-c)} - \sqrt{bc}]\sqrt{(a-b)(a-c)}}{a-b-c}.$$

$$x - b = \frac{[\sqrt{c(a-c)} - \sqrt{b(a-b)}]\sqrt{b(a-b)}}{a-b-c}.$$

$$c - x = \frac{[\sqrt{c(a-c)} - \sqrt{b(a-b)}]\sqrt{c(a-c)}}{a-b-c}.$$

Auch iſt

$$x = \frac{[\sqrt{(a-b)(a-c)} - \sqrt{bc}]\sqrt{bc}}{a-b-c}.$$

Durch dieſe Werthe wird z oder $\frac{x(a-x)}{(x-b)(c-x)}$

$$= \frac{[\sqrt{(a-b)(a-c)} - \sqrt{bc}]^2}{[\sqrt{c(a-c)} - \sqrt{b(a-b)}]^2}.$$

Man multiplicire die Wurzeln im Zähler und Nenner durch $\sqrt{(a-b)(a-c)} + \sqrt{bc}$, ſo wird die Wurzel im Zähler $= a(a-b-c)$, und die Wurzel im Nenner $= (a-b-c)\sqrt{c(a-b)} - (a-b-c)\sqrt{b(a-c)}$. Folglich iſt der kleinſte Werth des Quotienten

$$z = \frac{a^2}{[\sqrt{c(a-b)} - \sqrt{b(a-c)}]^2},$$

wie es Apollonius angiebt.

6. Multiplicirt man beide Wurzeln durch $\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{b(a-b)}$, ſo wird

$$z = \frac{[\sqrt{c(a-b)} + \sqrt{b(a-c)}]^2}{(c-b)^2}.$$

Dieſe Form für z hat Apollonius nicht.

7. Aus den Werthen von $x-b$ und $c-x$ folgt $x-b : c-x = \sqrt{b(a-b)} : \sqrt{c(a-c)}$, oder $(x-b)^2 : (c-x^2) = b(a-b) : c(a-c)$, diejenige Proportion, bey welcher nach Apollonius das Verhältniß $x(a-x) : (x-b)(c-x)$ am kleinſten iſt.

Es iſt hier das Zeichen + vor der Wurzelgröße gebraucht. Multiplicirt man die Wurzel im Zähler und Nenner mit $\sqrt{a(a-b)} + \sqrt{c(c-b)}$, ſo iſt

$$z = \frac{[\sqrt{c(a-b)} + \sqrt{a(c-b)}]^2}{(a-c)^2},$$

wie es Apollonius angiebt. Multiplicirt man mit $\sqrt{ac} - \sqrt{(a-b)(c-b)}$, ſo iſt

$$z = \frac{b^2}{[\sqrt{c(a-b)} - \sqrt{a(c-b)}]^2}.$$

12. Wenn E zwiſchen A und B fällt, ſo iſt

$$\frac{x(b-x)}{(c-x)(a-x)} = z, \text{ und daher}$$

$$z = \frac{[\sqrt{ac} - \sqrt{(a-b)(c-b)}]^2}{[\sqrt{a(a-b)} + \sqrt{c(c-b)}]^2},$$

oder kürzer,

$$z = \frac{b^2}{[\sqrt{c(a-b)} + \sqrt{a(c-b)}]^2}.$$

$$z = \frac{[\sqrt{c(a-b)} - \sqrt{a(c-b)}]^2}{(a-c)^2}.$$

Dieſer Werth von z iſt ein Größtes. Es iſt nämlich $z = 0$ für $x = 0$; poſitiv für x, die zwiſchen o und b fallen, und wiederum $= 0$ für $x = b$, daher z bis zu einer gewiſſen poſitiven Größe anwächſt, um von da an wieder abzunehmen. Apollonius und Simſon haben dieſen Fall eines einzelnen Verhältniſſes nicht. Der abſolute Werth des z, welches ein Größtes iſt, iſt kleiner als derjenige, der ein Kleinſtes iſt.

Simſon rühmt die von Apollonius gefundene Beſtimmung des kleinſten Verhältniſſes z : 1 und den Beweis ſehr, als eines ſo großen Geometers würdig, und fügt hinzu, daß er nur durch anhaltendes Forſchen den 62ſten Satz wieder hergeſtellt habe. Der griechiſche Text ſey beſonders in dieſer Stelle ganz verdorben.

z gehörigen x giebt aber nur zwey Werthe dieſer Abſciſſe; es muß alſo der Werth von z in E ein Größtes ſeyn.

14. Die ſtetige Reihe der z für eine ſtetige Reihe von Werthen x ſind die Ordinaten einer krummen Linie des dritten Grades, oder der zweyten Claſſe, von der Art, wie die in Fig. 63. abgebildete iſt. Krumme Linien der zweyten Claſſe, 58. Die Axen der Abſciſſen und der Ordinaten ſind hier diejenigen der Ordinaten und der Abſciſſen, wenn die Axe der Abſciſſen in die Linie AD gelegt wird. Zwey Aſymptoten gehen in den beiden Fällen (4, 13) durch die Puncte B und C, die dritte Aſymptote iſt parallel der unbeſtimmt verlängerten AD, oberhalb derſelben, oder nach der Gegend der poſitiven Ordinaten. In den Fällen 9 und 12 gehen die beiden, der Axe der z parallelen, Aſymptoten durch die Puncte C und A, und die dritte iſt der Axe der Abſciſſen parallel unterhalb derſelben. Jene beiden Fälle machen nur eine einzige Aufgabe aus, eben ſo wie die beiden andern. Die Auflöſung, welche die Frage nach einem Kleinſten beantwortet, dient auch zur Beantwortung der Frage nach einem Größten, nur durch Veränderung eines Wurzelzeichens.

15. Käſtner hat im J. 1798 in der Göttingiſchen Societät der Wiſſenſchaften eine Abhandlung über die Monachos Apollonii vorgeleſen, von welcher in den Götting. gel. Anzeigen, 1798, 104. St. ausführliche Nachricht gegeben wird. Die Abhandlung ſelbſt in den Commentationen der Societät habe ich nicht nachſehen können. Die hier gemachten algebraiſchen Entwickelungen werden daſelbſt ſich nicht finden.

Monas iſt die griechiſche Benennung für Einer. Im Plural, Monades.

Monom, eine eintheilige Größe, wie a oder x, im Gegenſatze gegen zweytheilige oder mehrtheilige Größe. Dies hindert nicht, ſie als eine Menge von Einheiten und Theilen der Einheit anzuſehen.

dus, der andere ein gewiſſer Theil deſſelben. Z. B. 7 mit $5\frac{2}{3}$ multiplicirt geben das Product $7 \cdot 5 + 7 \cdot \frac{2}{3} = 35 + \frac{7}{3} \cdot 2 = 35 + \frac{14}{3} = 39\frac{2}{3}$. Und $7\frac{3}{4}$ multiplicirt mit $5\frac{2}{3}$ geben das Product $7 \cdot 5 + \frac{3}{4} \cdot 5 + 7 \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = 35 + \frac{15}{4} + \frac{14}{3} + \frac{6}{12} = 43\frac{11}{12}$. S. Bruchrechnung.

Es iſt gleichgültig, welcher der beiden Factoren als Multiplicandus oder Multiplicator betrachtet wird. Für ganze Zahlen zeigt es das obige Schema ganz deutlich. Enthalten AB und AC noch Bruchtheile über die Ganzen, iſt nämlich $AB = a + \alpha$ und $AC = b + \beta$, wo a und b ganze Zahlen, α und β Bruchtheile bedeuten, ſo iſt das Product $= (a + \alpha) b + (a + \alpha) \beta = ab + \alpha b + a\beta + \alpha\beta$. Daſſelbe wird erhalten, wenn $b + \beta$ mit $a + \alpha$ multiplicirt wird. Das Product iſt $(b + \beta) a + (b + \beta) \alpha = ba + \beta a + b\alpha + \beta\alpha$. Daß $\beta\alpha$ mit $a\beta$, und eben ſo $b\alpha$ mit αb, wie auch $\beta\alpha$ mit $\alpha\beta$ einerley iſt, erhellt aus dem Artikel, Bruchrechnung.

Daher iſt es einerley, in welcher Ordnung die Factoren eines Products in einander multiplicirt werden, wenn ihrer auch mehrere genommen werden. So iſt das Product $abcde = cbeda$. Denn es iſt $ab \cdot cde = cab \cdot de$; und $ab \cdot de = bade$; ferner $ad \cdot e = ead$, und $ad = da$; alſo $abcde = cbeda$.

Der Multiplicator iſt immer eine bloße Zahl, der Multiplicandus iſt oft eine benannte Zahl; das Product iſt dann mit dem Multiplicandus gleichnamig. Man kann nicht Thaler mit Thalern, oder Fuße mit Fußen multipliciren. Wenn in geometriſchen Rechnungen Fuße mit Fußen multiplicirt werden, ſo ſind dieſes nur Zahlen, deren Product eine Verhältnißzahl für den Inhalt eines Rechtecks iſt. Davon noch unten.

Ganze Zahlen mit einander zu multipliciren, ſetzt man das Product aus Partialproducten zuſammen. Denn jeder Theil des einen Factors muß durch jeden Theil des andern multiplicirt werden. Die Theile ſind in unſerer dekadiſchen Arithmetik die von jeder Claſſe vorhandenen

Einheiten. Der leichteſte Fall iſt, wenn der Multiplicator eine Zahl der erſten Claſſe iſt. Z. B.

Multiplicandus	8470359
Multiplicator	6
	8420804
	4240135
Product	50822154

Die Einer jedes Partialproducts ſind in die obere Zeile des Products geſetzt, die Zehner in die untere. Dieſes aber nur für Anfänger.

Wenn die Factoren eine oder mehrere Nullen am Ende haben, ſo werden dem Producte eben ſo viele angehängt.

Hat der Multiplicator mehrere Ziffern, ſo macht man für jede Ziffer das Partialproduct, ſchreibt dieſes aber in die gehörige Stelle, dem Claſſenwerthe der Ziffer gemäß. Z. B.

```
     8470359
       87046
   ---------
    50822154
   33881436.
  59292513...
 67762872....
-------------
 737310869514
```

Die Puncte ſind ſtatt der Nullen geſetzt, welche den Producten durch die Zehner, die Hunderte ꝛc. angehängt werden müſſen. Sie dienen hier nur das Einrücken der Producte begreiflich zu machen.

Man kann auch mit der höchſten Ziffer des Multiplicators anfangen, muß aber alsdann die Partialproducte nach der Reihe (die durch o nicht ausgeſchloſſen) rechter Hand ausrücken.

Eine Probe der Multiplication iſt, wenn man das Product wieder durch den einen der Factoren dividirt, oder wenn man den Multiplicandus und Multiplicator mit ein=

ander vertauſcht. Leichter iſt die Probe durch 9 oder 11. S. Rechnungsprobe.

Auf dieſelbe Art, wie die Multiplication in dem dekadiſchen Syſtem ausgeführt wird, geſchieht es auch in andern Syſtemen. Hier folgt ein Beyſpiel für die Dodekadik:

```
              8.3.10.7.4
                5.11.9.6
         ----------------
         4.1.11.3.8.0
      6.2.10.11.6.0
   7.7.6.8.8.8
 3.5.7.5.0.8
 ------------------------
 4.1.9.6.10.3.5.8.0
```

Die beiden Factoren ſind dekadiſch 172600 und 10338, das Product iſt 1784338800. S. Dodekadik und Duodecimalrechnung.

Ein Beyſpiel für die Multiplication dyadiſcher Zahlen iſt

```
       111001101
          100101
   --------------
       111001101
     111001101
  111001101
  ---------------
  100001010100001
```

Die Factoren ſind 461 und 37, das Product iſt 17057. S. Dyadik.

Wenn eine Zahl häufig als Factor zum Multipliciren vorkommt, wie bey Berechnung von Tabellen, oder wie der Umfang des Kreiſes, und der Modulus des Brigſiſchen Syſtems, oder die Reciproken derſelben, ſo muß man ſich eine Tafel der Vielfachen einer ſolchen Zahl von 1 bis 9 verfertigen. Die Neperiſchen Stäbe dienen dieſe Tafel geſchwind zu berechnen. S. inſtrumentale Arithmetik.

Abgekürzte Multiplication und Diviſion.

Es iſt oft der Fall, daß man ein Product nur bis zu den Einern, oder bis zu einem gewiſſen Bruchtheile genau verlangt, wodurch es unnöthig wird, das Product ſo weit zu ſuchen, als es die Factoren nach dem obigen Verfahren liefern würden. Die letztern Ziffern jedes der beiden Factoren mögen mit den höhern Ziffern des andern Partialproducte geben, die nicht zu vernachläſſigen ſind, ſie ſelbſt aber in einander multiplicirt können Partialproducte geben, welche nicht in Betracht gezogen werden ſollen. Dieſe letztern werden weggelaſſen. Man fängt mit den oberſten Ziffern des Multiplicators die Rechnung an, rückt die Producte aber nicht heraus, ſondern fängt dagegen das Partialproduct in dem Multiplicator jedesmahl um eine Stelle höher an.

Exempel. Der Umfang eines Kreiſes, deſſen Halbmeſſer 385729 Fuß iſt, wird geſucht, bis auf Hunderttheile eines Quadratfußes. Das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange iſt 1 : 3,141592653 . . . Da die höchſte Ziffer des Multiplicandus die fünfte Potenz von 10 enthält, ſo muß man die Multiplication bey der ſiebenten Decimalſtelle anfangen, und zur Sicherheit wegen der Hunderttheilchen, die aus den Tauſendtheilchen entſtehen, noch eine oder zwey Ziffern weiter herabwärts. Hat man eine Tafel der Vielfachen von 3,141 . ., ſo nehme man dieſe Zahl zum Multiplicator,

$$
\begin{array}{r}
942477{,}7960 \\
251327{,}4123 \\
15707{,}9632 \\
2199{,}1148 \\
62{,}8318 \\
28{,}2743 \\
\hline
1211803{,}39\ldots
\end{array}
$$

als der geſuchte Kreisumfang.

Bey der abgekürzten Diviſion verfährt man auf eine ähnliche Art. Man beſtimmt, wie weit der Quotient gefunden werden ſoll. Der Dividendus muß eine oder zwey

Ziffern über diejenige hinaus genommen werden, deren Stellenzahl von dem Komma an gleich iſt dem Unterſchiede der Stellenzahlen der niedrigſten Ziffer im Quotienten, von dem Komma herunterwärts, und der höchſten im Diviſor vom Komma aufwärts. Bey jeder Ziffer des Quotienten wird eine Ziffer des Diviſors weniger genommen, nachdem man die Gränzziffer des Dividendus erreicht hat.

1. Exempel. Den Quotienten von 2384 durch 47328 bis auf die ſechſte Decimalſtelle zu finden. Die Rechnung ſteht folgendermaßen.

47328	2384,0000	0,0503719 —
2366,40	176000	
14,1984	34016	
3,3129	887	
0,0473	414	
0,0425	— 11	

2. Exempel. Der Umfang eines Kreiſes ſey 12118, den Halbmeſſer bis in die Einer richtig zu finden. Der Diviſor iſt hier 3,14159265 .. Da hier die Stellenzahl der höchſten Ziffer 0 iſt, und der Quotient auch bis auf die Stellenzahl 0 geſucht wird, ſo nehme man den Dividendus bis zu der zweyten Stelle nach dem Komma. Die höchſte Ziffer des Quotienten hat die Stelle + 3. Man muß alſo den Diviſor bis zu der Stelle — 5 nehmen, damit das Product aus der höchſten Ziffer des Quotienten in die niedrigſte des Diviſors in der Stelle — 2 anfange.

3,14159	12118,00	3857,3 —
9424,78	269322	
2513,27	17995	
157,08	2287	
21,99	88	
0,94	— 6	

Multiplication in benannten Zahlen.

Bey dieſer fängt man die Multiplication mit der niedrigſten Gattung von Einheiten an, dividirt das Product

durch die Anzahl von Einern der niedrigern Gattung in der nächſt höhern, und ſetzt den Quotienten zu dem Producte, welches die nächſt höhere Gattung giebt, den Reſt aber nimmt man als einen Theil des Totalproducts.

Exempel.

	57 Rthlr.	14 gr.	10 pf.	mit 8 multiplicirt,
geben	456 ⸗	112 ⸗	80 ⸗	
oder	460 Rthlr.	22 gr.	8 pf.	

Wenn der Multiplicator größer iſt als die Menge der kleinern Einheiten in der nächſt größern, ſo zerlege man ihn in ein Vielfaches jener Menge, ſo groß als es ſeyn kann, und in den Überſchuß. Bey der Multiplication mit dem Vielfachen braucht man nur den Namen der Einheit zu ändern. Z. B. 10 pf. mit 64 multiplicirt ſind 50 gr. 40 pf. oder 53 gr. 4 pf. oder 2 Rthlr. 5 gl. 4 pf. Iſt der Überſchuß über das Vielfache beträchtlich, ſo nehme man das nächſt größere Vielfache, ziehe aber das Product in die Ergänzung ab. Z. B. das Product aus 14 gr. in 64 zu finden, multiplicire man ſie mit 72 — 8, ſo erhält man 42 Rthlr. weniger 112 gr., das iſt 37 Rthlr. 8 gr.

Man kann auch die der Hauptgattung angehängten kleinern Gattungen als Brüche behandeln, und ſie in aliquotiſche (gleich große) Theile der größten Einheit zerfällen. Z. B. 14 gr. ſind $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$ eines Thalers; 10 pf. ſind $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ eines Groſchen. Die kleinern aliquoten Theile können auch auf die nächſt größern bezogen werden. So ſind 14 gr. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$ eines Thalers, und 10 pf. $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ eines Groſchen. Sind nun 14 gl. 10 pf. mit 385 zu multipliciren, ſo zerfälle man die Groſchen und Pfennige in aliquote Theile des Thalers, die wiederum von dem nächſt größern ein aliquoter Theil ſind. Nun verwechsle man die Benennungen, und betrachte die Zahl 385 als Thaler, die Bruchtheile als abſolute Zahlen, und multiplicire jene mit dieſen folgendergeſtalt:

385 Thlr.						14 gl.		10 pf.	
192	Thlr.	12	gl.	—	pf.	12	$\frac{1}{2}$	6	$\frac{1}{4}$
32	ſ	2	ſ	—		2	$\frac{1}{6}$	3	$\frac{1}{2}$
8	ſ	—	ſ	6				1	$\frac{1}{3}$
4	ſ	—	ſ	3					
1	ſ	8	ſ	1					
237	ſ	22	ſ	10	ſ				

Die Rechenmeiſter nennen dieſe Auflöſung in aliquote Theile einer größern Einheit das **Zerſtreuen**. In den Rechenbüchern findet man mehrere Beyſpiele.

Geometriſche Multiplicationen.

Das Verhältniß zweyer Rechtecke wird aus den Verhältniſſen ihrer Grundlinien und Höhen zuſammengeſetzt. Druckt man ihre Seiten durch Zahlen mittelſt irgend einer Einheit aus, ſo verhalten ſich die Rechtecke wie die Producte aus den Zahlgrößen für ihre Seiten. Das eine der Rechtecke ſey ein Quadrat, deſſen Seiten die Längen-Einheit ſind, ſo wie es ſelbſt die Einheit für die Flächen iſt. Dann wird das andere Rechteck durch das Product der Zahlgrößen für ſeine Seitenlinien dargeſtellt. Man bezeichne das Quadrat durch A, das Rechteck durch B, die Seiten jenes durch 1, des Rechtecks durch die Zahlen a, b, ſo iſt $A : B = 1 \times 1 : a \times b$, und $B = \frac{a \times b}{1 \times 1} A$, oder abgekürzt $B = a \times b$ Quadrate A.

Das Quadrat A erhält ſeinen Namen zufolge ſeiner Seite. Iſt dieſe ein Zoll, ein Fuß, eine Ruthe, ſo heißt A ein Quadratzoll, ein Quadratfuß, eine Quadratruthe u. ſ. f. Das Product der Zahlgrößen für die Seiten eines Rechtecks erhält den Namen des Quadrats. So werden dem Scheine nach Längen mit Längen multiplicirt, und geben zum Product eine Fläche.

Das Verhältniß zweyer Priſmen wird zuſammengeſetzt aus den Verhältniſſen ihrer Grundflächen und Höhen. Werden die Grundflächen durch das Quadrat A

= 185,77972 Cubikruthen, wo die 185 die ganzen ſind. Oder der Inhalt iſt 185° 779′ 720″ Cubikmaß.

Wird die Längen-Einheit, wie es auch geſchieht, nach der Duodecimal-Progreſſion eingetheilt, ſo leiſtet die oben nach der Dodekadik gewieſene Multiplication gute Dienſte. Es ſeyn 1198° 7′ 4″ in 71° 9′ 6″ zu multipliciren. Man muß nur die Ganzen, oder die Menge der Haupteinheit auf die Duodecimal-Progreſſion bringen. Es ſind 1198 nach derſelben 8 . 3 . 10 und 71 = 5 . 11. Das Product aus 8 . 3 . 10° . 7′ . 4″ in 5 . 11° 9′ 6″ iſt nun nach dem gegebenen Exempel 4 . 1 . 9 . 6 . 10° 3 . 5′ 8 . 0″ Quadr. Duod. Maß. Nämlich eine Quadratruthe enthält 144 Quadratfuß, und 144 . 144 Quadratzoll, nach Duodecimalmaß. Darum müſſen hier auch je zwey Ziffern nach den Einern abgeſchnitten werden, und, wenn eine einzelne übrig bliebe, müßte noch eine Null beygefügt werden. Die 4 . 1 . 9 . 6 . 10° ſind nach der Dekadik = 86050°; die 3 . 5′ ſind 41′, und die 8 . 0″ ſind 96″ Quadratmaß.

Wenn in dem obigen Exempel der Factor 8 . 3 . 10 . 7 . 4 Quadratmaß bedeutet, nämlich 8° 3 . 10′ . 7 . 4″ Qu., der andere Factor aber Längenmaß, 5 . 11° 9′ 6″, ſo iſt das Product = 4 . 1 . 9° 6 . 10 . 3′ 5 . 8 . 0″ Cubikmaß = 597° 987′ 816″ Duod. Cub. Maß. S. Duodecimalrechnung.

Von der Multiplication der Brüche, ſ. Bruchrechnung.

Von der algebraiſchen Multiplication, ſ. Buchſtabenrechnung; und von der Multiplication der Reihen, ſ. Combinatoriſche Analyſis (5.).

Muſchellinie, ſ. Conchoide.

Myriade, ein griechiſches Wort (μυριας), welches Zehntauſend bedeutet. Wir haben im Deutſchen kein einfaches Wort für die Zahl 10000, nur ein zuſammengeſetztes. Daher zählen wir über 1000 hinaus mit Tauſenden und den kleinern Einheiten bis zu 1000 Tau-

der entwickelt mit einer Anzahl Glieder der Reihe zuſammen ſtimmt, und bequemer zu berechnen iſt, als das Aggregat dieſer Glieder. So kann man für die Wurzeln aus einer zweytheiligen Größe bequeme Bruchformen finden.

In der Cyklotechnie und Logarithmotechnie hat man geſehen, daß es oft künſtlich genug iſt, einer Reihe eine ſolche Form zu geben, wodurch ſie ſich dem genauen Werthe ſchnell nähere, ſo daß die Abweichung unter einer gegebenen Gränze bleibe. Die Reihen, wie ſie geradezu durch Entwickelung eines analytiſchen Ausdrucks gefunden werden, ſind oft noch ein roher Stoff, den die Kunſt bearbeiten muß.

Name eines Verhältniſſes iſt gleich bedeutend mit Exponent.

Nebenwinkel, ſ. Winkel.

Negativ, ſ. entgegengeſetzte Größen.

Neigung zweyer geraden Linien, oder zweyer Ebenen gegen einander, oder einer geraden gegen eine Ebene, iſt der Winkel, welchen ſie mit einander machen. Wo von zwey Ebenen oder von einer Ebene und einer geraden Linie die Rede iſt, kommt noch die Beſtimmung der Neigungs-Ebene hinzu, in welcher die zwey geraden liegen, deren Winkel demjenigen der beiden Ebenen oder der Ebene und der geraden gleich iſt. Dieſe Neigungs-Ebene iſt eine auf beide Ebenen ſenkrechte, das iſt die Ebene zweyer in den beiden Ebenen, auf einen Punct ihrer Durchſchnittslinien gezogenen ſenkrechten, ſ. Ebene. Der Winkel einer geraden mit einer Ebene wird in einer durch jene auf dieſe ſenkrechten Ebene gemeſſen, ſ. Ebene, 27.

Die Lehre von den Neigungen (inclinationes, νευσεις) bey den Alten iſt ein Syſtem von Aufgaben, deren allgemeiner Inhalt iſt: zwiſchen zwey gegebenen Linien, gerade oder krummen (γραμμαι), eine gerade Linie von gegebener Länge ſo zu legen, daß ſie durch einen ge-

legt, ſo wird GF von B abwärts genommen. Der Unterſchied der abſoluten Werthe der Wurzeln iſt = c, wie es ſeyn muß.

Zwente Aufgabe. Es ſind zwey Halbkreiſe über den Durchmeſſern AB, CD, die auf derſelben geraden liegen, gegeben (Fig. 122), es ſoll zwiſchen ihnen eine gerade EF von gegebener Länge gelegt werden, ſo daß ſie verlängert durch den Endpunct D des Durchmeſſers des einen Halbkreiſes gehe.

Man verlängere die DF in dem Kreiſe über AB bis an denſelben in G, und ziehe aus dem Mittelpuncte H deſſelben Kreiſes die ſenkrechte HK auf EG. Es iſt DE . DG = DB . DA. Zieht man die Chorde CF, ſo iſt CF ſenkrecht auf DF und daher parallel mit HK. Es iſt alſo DC : DH = DF : DK. Auch iſt DG = 2DK − DE. Man ſetze AB = a; DC = b; DH = c; EF = d; DE = x, ſo iſt $DK = \frac{c(x-d)}{b}$, und $DG = \frac{2c(x-d)}{b} - x = \frac{(2c-b)x}{b} - \frac{2cd}{b}$.

Folglich iſt

$$\frac{(2c-b)x^2}{b} - \frac{2cdx}{b} = c^2 - \tfrac{1}{4}a^2,$$

oder

$$(2c-b)x^2 - 2cdx = b\,(c^2 - \tfrac{1}{4}a^2).$$

Dieſe Gleichung hat eine poſitive und eine negative Wurzel. Die letztere iſt hier eine fremde Wurzel, die ſelbſt, oder deren entgegengeſetztes, bey der geometriſchen Aufgabe nicht gebraucht werden kann. Der Werth von d kann im Allgemeinen jeder ſeyn, in Beziehung auf die Aufgabe iſt d zwiſchen zwey Gränzen eingeſchränkt.

Es könnte auch GF eine gegebene Länge haben. Dieſes giebt dieſelbe Gleichung mit der gefundenen, nur daß d einen andern Werth hat. Die Werthe von d liegen, beide Fälle zuſammen genommen zwiſchen CB und CA.

Anſtatt die gerade EF nach dem Puncte D hin ſich erſtrecken zu laſſen, kann ſie auch nach irgend einem andern Puncte hin gezogen werden.

Nenner, ſ. Bruch.

Nepers Logarithmen, ſ. Logarithmen. — Deſſelben Regel zur Berechnung ſphäriſcher rechtwinklichter Dreyecke, ſ. Trigonometrie, ſphäriſche. — Deſſelben Stäbchen, ſ. inſtrumentale Arithmetik.

Netz iſt die in einer Ebene gezeichnete Figur, welche die Oberfläche eines Körpers ſo darſtellt, daß ſie unmittelbar um denſelben gelegt werden kann, ohne eine Verrükkung der Theile, eine Ausdehnung oder Zuſammenziehung zu leiden. Dieſes geht nur bey Körpern an, die in ebenen Flächen eingeſchloſſen ſind, oder die ſich abwickeln laſſen. Die merkwürdigſten Netze ſind, welche von den regulären Körpern, Pyramiden und ſenkrechten Kegeln gezeichnet werden. Das Netz eines ſchiefen Kegels wird außer den zwey geraden Seitenlinien von einer tranſcendenten krummen Linie begränzt, ſ. Kegel. Zu den Netzen der regulären Körper, auch einiger halbregulären wird in dem Artikel, vieleckige Körper, die Anweiſung gegeben; zu den Netzen der Pyramiden in dem Artikel, Pyramide. Man vergleiche noch den Artikel, krumme Fläche, 126 ff.

1. Von einer Kugel kann kein Netz im eigentlichen Verſtande gezeichnet werden, weil ſich ihre Oberfläche nicht abwickeln läßt. Es iſt nur die Frage, wie ſich ein Netz zeichnen laſſe, mit ſo weniger Abweichung als nur möglich ſeyn mag. Wegen der Überziehung der Erd- und Himmelskugeln mit den in Kupfer geſtochenen Segmenten der Kugelfläche iſt die Unterſuchung von praktiſchem Nutzen.

2. Die gewöhnliche Art Kugelnetze zu zeichnen iſt nach Wolf (Elem. Mathes. Aſtron. §. 309.) folgende.

Man theilt den Umfang der Kugel in eine Anzahl gleicher Theile, z. B. zwölf. Einem dieſer Theile ſey die

Länge AB (Fig. 123.) gleich. Mit einem Halbmeſſer CA oder BD, der 10 mahl ſo groß als AB iſt, beſchreibe man durch A und B Kreisbogen, die ſich in E und F ſchneiden, ſo iſt das Bilineum EAFB eines der zwölf Segmente, die ſich auf eine Kugel, deren Umfang 12 AB iſt, aufziehen laſſen, wenn EF etwas gedehnt wird. Auf der Kugel iſt der Bogen EAF ſo lang als der Bogen EHF. Es muß ſich alſo beym Aufziehen der Segmente EHF etwas dehnen, und EAF etwas verkürzen, oder, weil das Verkürzen nicht wohl möglich iſt, EAF ſeine Länge behalten, EHF aber ſich dehnen.

3. Nach dieſer Conſtruction iſt der W. ACE $= 18^\circ 12'$. Der Bogen AE iſt aber größer als der Quadrant der Kugel. Denn es iſt AC : AE $= 1 : 0{,}317648$, und AC : AH $= 1 : 0{,}05$. Auf der Kugel iſt AH : AE $= 1 : 6$.

4. Damit auch in der Planzeichnung AH : AE nächſtens wie 1 : 6 ſey, muß ACE $= 19^\circ 17'$ genommen werden. Dann iſt sin. verſ. ACE $= 0{,}05610$, und der Bogen AE $= 0{,}33655$, nämlich für AC $= 1$. Hier iſt 6 AH $= 0{,}33660$, ſehr nahe $=$ AE. Den Winkel ACE findet man durch die Formel für $1 - \cos\varphi$ in dem Artikel, Cyklometrie, 6, wenn $1 - \cos\varphi = 6\varphi$ geſetzt wird, durch Näherung. Es iſt φ ziemlich nahe $= \frac{1}{3}$, weßwegen man $\varphi = \frac{1}{3} + u$ zu ſetzen hat, worauf man wie bey der Aufföſung numeriſcher Gleichungen verfährt, ſ. Gleichung, 237.

Nimmt man den Halbmeſſer der Kugel zur Einheit, ſo iſt AH $= \frac{1}{24}$ des Umfanges $= \frac{1}{12}\pi = 0{,}26180$. Da AH : AC $= 0{,}05610 : 1$ iſt, ſo iſt AC $= 4{,}6664$, in Beziehung auf den Halbmeſſer der Kugel.

5. Nimmt man zu größern Kugeln AB $= \frac{1}{20}$ des Umfanges $= 18$ Grad, ſo muß ſeyn AH : AE $= 1 : 10$. Dieſes giebt den W. ACE $= 11^\circ 30'$, und AH : AC $=$ 2 : 100 ſehr nahe, folglich AC $=$ 25 AB. Nimmt man den Halbmeſſer der Kugel zur Einheit, ſo iſt

$$AB = \frac{2\pi}{20}, \text{ und } AC = 7{,}8540.$$

Man ſieht hieraus, daß die Größe des Halbmeſſers in der Planzeichnung mit der Breite der Segmente veränderlich iſt. Je ſchmäler der Streifen in Verhältniß gegen die Länge genommen wird, deſto näher kommt das Verhältniß von AE : HE dem der Gleichheit, und daher wird der Bogen AE deſto flacher, der Halbmeſſer deſto größer.

6. Man ziehe LE und ME (Fig. 123) ſenkrecht auf EC und ED, ſo ſind die Winkel HEL und HEM = ACE oder BDE. Da LE und ME die Kreisbogen AE, BE in E berühren, ſo iſt der W. LEM gleich dem Winkel der beiden Bogen. Nach der erſtern Conſtruction iſt LEM = 38° 34′, nach der zweyten iſt LEM = 23°. Auf der Kugel iſt nach der erſtern der Winkel des Segments = 30°, nach der zweyten 18°.

7. Es iſt eine ganz willkürliche Annahme, daß die Segmente des Netzes durch Kreisbogen begränzt werden. Vielmehr iſt es eine andere Curve, welche ſich ohne Veränderung ihrer Länge in einen Kreisbogen krümmt, indem die Mittellinie EF ſich ſo viel ausdehnt, daß ſie dem Halbkreiſe gleich wird. Die Aufgabe, diejenige Curve zu finden, welche dazu am ſchicklichſten iſt, iſt nicht leicht.

8. Lowitz, ehedem Profeſſor in Göttingen,*) der ſich mit Verfertigung großer, unvollendet gebliebenen, Himmels- und Erdkugeln beſchäftigte, legte der Societät daſelbſt im J. 1756 eine Abhandlung über die Zeichnung der Segmente zur Beziehung der Kugeln vor, die aber erſt in dem erſten Bande der neuen Commentationen dieſer Societät für das J. 1778 gedruckt erſchienen iſt. In demſelben Bande befindet ſich auch

*) Er ward im J. 1774, da er, zufolge eines Auftrages der Petersburger Akademie der Wiſſenſchaften, zwiſchen der Wolga und dem Don eine Vermeſſung unternommen hatte, von den Rebellen unter des Pugatſchew Anführung auf eine klägliche Weiſe getödtet. Eine Nachricht von dieſem Manne iſt in dem Supplément au Recueil pour les Astronomes, par J. Bernoulli, p. 41—50 befindlich.

eine Abhandlung von Käſtner über denſelben Gegenſtand.

Das von Lowitz angewandte Verfahren macht die Zeichnung des Segments gut begreiflich, welche nach der Käſtneriſchen Methode ſchwieriger iſt. Dagegen iſt die Zeichnung der Bogen der Parallelkreiſe nach Lowitz ſehr mühſam, nach Käſtner aber leicht. Jener dehnt das Segment beym Aufziehen nach allen Richtungen, dieſer blos nach der Länge. Zuerſt folgt hier ein Abriß des Lowitziſchen Verfahrens.

9. Es ſtellt PApB (Fig. 124.) ein Segment einer Kugelfläche vor; die Pole ſind P, p, der Mittelpunct iſt C; ein Sector des Äquators iſt ACB; eines Parallelkreiſes DGE. Man ziehe die Chorden AB, DE. Dieſe ſind einander parallel. (Denn die geraden AD, BE verlängert treffen die Linie der Axe Pp in demſelben Puncte, liegen alſo in derſelben Ebene, daher auch die Chorden AB, DE in einer Ebene ſich befinden, und weil ſie in parallelen Ebenen liegen, parallel ſind). Sie ſind, ſo wie alle auf gleiche Art gezogene, Seitenlinien eines ſchiefen Cylinders, über dem Kreiſe, wovon PAp oder PBp die Hälfte iſt. In einem ſchiefen Cylinder ſind zwey Schnitte (Wechſelſchnitte) Kreiſe, da die andern Ellipſen ſind, ſ. Cylinder. Man halbire den Winkel ACB durch die gerade Cf, welche von AB in F geſchnitten werde. Eben ſo werde der W. DGE durch Gh halbirt, welche von DE in H geſchnitten wird. Die Puncte F, H, und alle auf gleiche Art beſtimmte, liegen auf einer Ellipſe, deren halbe große Axe iſt PC, und halbe kleine CF. Das cylindriſche Segment zwiſchen den Halbkreiſen PAp, PBp läßt ſich abwickeln. Es beſteht aus zwey Segmenten, deren gemeinſchaftliche Grundlinie die halbe Ellipſe PFp iſt, auf welche die Seitenlinie AF und DH, BF und EH ſenkrecht ſtehen. Daher verwandelt ſich die halbe Ellipſe PFp in eine gerade Linie von derſelben Länge (Cylinder, Th. I. S. 703), die beiden begränzenden Halbkreiſe und alle übrigen Ellipſen wer-

den tranſcendente Curven, ohne Veränderung der Länge, weil bey der Abwickelung weder Dehnung noch Zuſammenziehung geſchieht.

10. Es ſey (Fig. 124.) AG = 1; ACB = 2ω, alſo ACF = ω; der W. HCF oder der Bogen hf = φ, ſo iſt CF = coſ ω; AF = sin ω; DG = coſ φ; DH = DG × sin ω = coſ φ. sin ω. Nun nehme man (Fig. 125.) die gerade FP gleich dem elliptiſchen Quadranten FHP, und darauf FH gleich dem elliptiſchen Bogen FH, welches durch die Formeln für die Rectification der Ellipſe möglich iſt. Auf FP ſetze man in F die ſenkrechte FA = sin ω, und in H die ſenkrechte HD = coſ φ. sin ω, ſo ſind A und D Puncte der begränzenden Curve des Segments. Man kann ſolchergeſtalt ſo viele Puncte wie D finden, als nöthig iſt, um die Curve aus freyer Hand, oder mittelſt eines nach den Puncten gekrümmten elaſtiſchen Blechs zu zeichnen. Mit dieſem Viertheil des Segments werden die andern drey Theile übereinſtimmig gezeichnet.

11. Wenn das Segment auf die Kugelfläche gepaßt werden ſoll, ſo muß es nach der Länge und Breite ausgedehnt werden. Es muß von der cylindriſchen Fläche, auf welcher es vollkommen anliegt, gleichſam durch eine Kraft von dem Mittelpuncte der Kugel her in jedem Puncte bis an die Kugelfläche getrieben werden. Die mittlere Halbellipſe wird dabey am meiſten ausgedehnt, die andern leiden weniger Dehnung, deſto geringere, je näher ſie den Halbkreiſen PAp oder PBp (Fig. 124.) liegen. Die Chorde AFB wird in den Bogen AfB ausgedehnt, und ſo auch jede andere Chorde, wie DHE, in einen Bogen eines großen Kreiſes.

12. Die meiſte Mühe nach dieſem Verfahren macht die Zeichnung der Bogen der Parallelkreiſe. Dieſe ſind nothwendig, um die Lagen der Sterne und der Örter auf der Erdfläche auf die Segmente gehörig einzutragen. Die Ordinaten, wie DH, ſtellen Bogen größter Kreiſe vor. Der Punct eines Parallelkreiſes, wie h (Fig. 124.), erſcheint auf dem ebenen Segment da,

wo der Halbmeſſer Ch die Ellipſe in der Ebene des Kreiſes Php ſchneidet.

13. Es iſt CF die halbe kleine Axe der Ellipſe PFp. Da CF $=$ coſ ω, ſo iſt $AC^2 - CF^2 =$ sin ω^2. Es iſt aber $AC^2 - CF^2$ das Quadrat des Abſtandes des Mittelpunctes von den Brennpuncten. Nennt man dieſen Abſtand e, alſo sin $\omega^2 = e^2$, und φ den Kreisbogen fh, der dieſelbe Abſciſſe mit dem elliptiſchen Bogen FH hat, ſo iſt dieſer Bogen FH $=$

$$\varphi$$
$$-\frac{1}{4}e^2\varphi + \frac{1}{4}e^2 \sin\varphi . \cos\varphi$$
$$-\frac{3}{64}e^4\varphi + \frac{3}{64}e^4 \sin\varphi . \cos\varphi$$
$$+\frac{1}{32}e^4 \sin\varphi^3 . \cos\varphi$$
$$-\frac{5}{256}e^6\varphi + \frac{5}{256}e^6 \sin\varphi . \cos\varphi$$
$$+\frac{5}{384}e^6 \sin\varphi^3 . \cos\varphi$$
$$+\frac{1}{96}e^6 \sin\varphi^6 . \cos\varphi$$
$$-\text{etc.}$$

ſ. Rectification, oder Lamberts Beyträge, Th. III. S. 44.

Für $\omega = 15°$, oder wenn AB der 12te Theil des Umfanges iſt, iſt die Länge der ganzen Abſciſſe $= 1{,}54415$.

14. Man kann die Fläche des Kugelſectors PApBP (Fig. 124.) auch anſehen als zuſammengeſetzt aus unendlich vielen Zonenſtücken, deren jedes ſich, wie die Fläche eines Kegelſtücks, abwickeln läßt. Das abgewickelte Zonenſtück, deſſen eine Grundlinie der Bogen DE auf dem Parallelkreiſe mit dem Durchmeſſer DG, die andere ein dieſem Bogen DE unendlich naher iſt, wird auf der ebenen Fläche durch zwey Kreisbogen von glei-

$$+ \left(\tfrac{1}{720}\omega^7 + \tfrac{1}{45360}\omega^9\right)\sin\varphi^7 - \text{etc.}$$

und abgekürzt:

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -A\sin\varphi + B\sin\varphi^3 - C\sin\varphi^5 + D\sin\varphi^7 - \text{etc.}$$

Hieraus ergiebt ſich der Werth von $\frac{\partial y^2}{\partial \varphi^2}$, und daraus der von $\frac{\partial x^2}{\partial \varphi^2}$. Man ſetze, nach der Methode der un-

21. Die Lage des Krümmungshalbmeſſers zu beſtimmen, muß man die Subnormale ſuchen. Für dieſe iſt der allgemeine Ausdruck $\frac{y\,\partial y}{\partial x}$. Sie iſt alſo =

$$-\frac{A\sin\varphi - B\sin\varphi^3 + \text{etc.}}{1 - \alpha\sin\varphi^2 + \text{etc.}}\, y.$$

Die Negation zeigt an, daß ihre Richtung, von dem Grundpuncte der Ordinate an genommen, der Richtung der Abſciſſen entgegengeſetzt iſt.

22. Die Tangente des Winkels, welchen eine berührende an der Curve mit der Abſciſſenlinie macht, iſt hier $-\frac{\partial y}{\partial x}$, weil Subtangente und Abſciſſe einerley Richtung haben (berührende Linie, 15.). Sie iſt alſo

$$= \frac{A\sin\varphi - B\sin\varphi^3 + \text{etc.}}{1 - \alpha\sin\varphi^2 + \text{etc.}}.$$

In P, wo $\sin\varphi = 1$ iſt, iſt die Tangente des Winkels, $= \frac{A - B + C - \text{etc.}}{1 - \alpha + \beta - \text{etc.}}$, und nähert ſich ſehr der $\text{tang}\,\omega$ ſelbſt. Der Quotient iſt nahe $A + A\alpha - B = A + \frac{1}{3}A^3 - B = \omega + \frac{1}{3}\omega^3$, mit Weglaſſung der höhern Potenzen von ω. Die beiden erſten Glieder von $\text{tang}\,\omega$ ſind ebenfalls $\omega + \frac{1}{3}\omega^3$. (Cyklometrie, 14.).

23. Oder noch deutlicher folgendergeſtalt. Da $y = \sin\mu \,.\, \cot\varphi$, und $\mu = \omega\sin\varphi$ iſt, ſo iſt
$y = (\omega\sin\varphi - \frac{1}{6}\omega^3\sin\varphi^3 + \text{etc.})\cot\varphi$
$= \omega\,\text{coſ}\,\varphi - \frac{1}{6}\omega^3\sin\varphi^2 \,.\, \text{coſ}\,\varphi + \text{etc.}$ Alſo iſt

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = -\omega \,.\, \sin\varphi - \frac{1}{6}\omega^3(2\sin\varphi \,.\, \text{coſ}\,\varphi^2 - \sin\varphi^3) + \text{etc.}$$

$$= -\omega\sin\varphi - \frac{1}{6}\omega^3(2\sin\varphi - 3\sin\varphi^3) + \text{etc.}$$

Dieſes iſt, abſolut genommen, der Werth des Sinus des Winkels, welchen die berührende mit der Abſciſſenlinie macht. In P iſt dieſer Sinus $= \omega + \frac{1}{3}\omega^3 - \text{etc.}$

24. Exempel. Man nehme $\omega = 15°$, dem 12ten Theile des halben Umfanges, ſo giebt die numeriſche Rechnung,

Digitized by Google

φ	x	y
0	0,00000	0,26180
10	0,17448	0,25773
20	0,34859	0,24568
30	0,52202	0,22608
40	0,69453	0,19960
50	0,86602	0,16715
60	1,03650	0,12978
70	1,20611	0,08864
80	1,37508	0,04496
90	1,54372	0,00000

Der Werth der ganzen Abſciſſe für $\varphi = 90°$ ſtimmt ſehr genau mit dem vorher berechneten überein.

26. Euler hat noch eine beſondere Weiſe Kugeln zu überziehen angegeben, in einer Abhandlung über die regulären Körper, Acta Acad. Petrop. T. II. P. 1. a. a. 1778. Eine Kugelfläche kann mit zwölf regulären Fünfecken, denen an jeder Seite noch ein Kreisſegment beygefügt wird, bedeckt werden, wobey die Fünfecke allerdings eine Ausdehnung leiden. Dieſe beträgt nahe den 11ten Theil ihrer Fläche.

Der Halbmeſſer der Kugel ſey = r. In einem Kreiſe, deſſen Halbmeſſer = 0,6196097 . r iſt, wird ein reguläres Fünfeck gezeichnet, über deſſen Seiten auswärts ein Kreisſegment angeſetzt wird, deſſen Halbmeſſer = 3,484114 . r iſt.

Allein die Eintragung der Parallelkreiſe auf den Segmenten wird kaum möglich ſeyn. Auch iſt die Frage, ob die Kreisbogen ſich auf der Kugel gut an einander fügen werden.

* * *

Netz bedeutet auch eine durch gerade oder krumme Linien und Fächer eingetheilte Figur, die dazu dient, etwas hinein zu zeichnen. In geographiſchen oder aſtronomiſchen Charten liegt ein Netz zum Grunde, in deſſen Fächer die Örter und Länder, oder die Sterne eingetragen

läßt den Reſt 3, welchen auch die Summe der Ziffern in dem Producte läßt.

Denn es ſey $M = p \times 9 + m$; $N = q \times 9 + n$, ſo iſt $M \times N = pq \times 81 + (mq + np) \times 9 + mn$. Es geben alſo $M \times N$ und $m \times n$ denſelben Reſt bey der Diviſion durch 9; daher auch die Summen der Ziffern in dieſen Producten denſelben Reſt geben.

6. Es ſey D ein Dividendus, d ein Diviſor, Q der

ein Vielfaches von 13 minus 1. Eine dodekadiſche Zahl iſt daher ein Vielfaches von 13 plus die Summe der Ziffern in den ungeraden Stellen, minus die Summe der Ziffern in den geraden. Ihr Unterſchied iſt entweder der Überſchuß der Zahl über ein Vielfaches von 13, oder eines ſolchen Vielfachen über die Zahl. Z. B. in der dodekadiſchen Zahl 11.4.5.10.7 (dekadiſch 235855) iſt der Unterſchied der beiden Summen = 1.11 — 1.2 = 9, daher 9 der Reſt durch 13 iſt. In der Zahl 4.11.5.10.7 (dekadiſch 102799) iſt der Unterſchied der beiden Summen = 1.4 — 1.9 = — 5. Das Complement 8 zu 13, iſt der Reſt bey der Diviſion durch 13.

Neunerprobe, ſ. Rechnungsprobe.

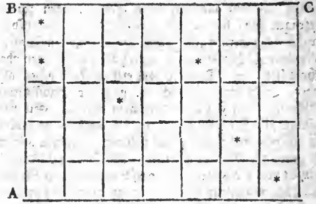
Newtoniſches Parallelogramm (oder auch analytiſches) iſt ein geometriſches Hülfsmittel, das erſte Glied der Reihe für eine veränderliche Größe y zu finden, wenn y durch eine ungeſonderte Function von x gegeben wird. Newton hat es in der Methodo fluxionum et serierum infinitarum angegeben; beſchreibt es auch in einem zur Mittheilung an Leibnitz beſtimmten Briefe an Oldenburg. Newtoni Opuscula, T. I. p. 41 et 351.

1. Newton hat ſeine geometriſch-analytiſche Methode nur kurz beſchrieben, und nicht gezeigt, wie man alle, ſowol fallende als ſteigende, Reihen für y aus der Gleichung zwiſchen x und y herleiten könne. Hernach iſt ſie von andern erklärt und erweitert, als von Colſon in ſeiner Ausgabe der Newtoniſchen Schrift; von Maclaurin in dem Treatise of Algebra, P. II. ch. 10.; von Stirling in ſeinem Commentar über Newtons Abhandlung von den Linien der dritten Ordnung; von Käſtner in einer Diſputation: Aequationum speciosarum resolutio Newtoniana per Series, Lipsiae 1743, und daraus in ſeinen Anfangsgründen der Analyſis endlicher Größen, §. 632 ff. Der Abbé de Gua ſetzte für das Parallelogramm ein Dreyeck, deſſen ſich auch Cramer in ſeiner Introduction à l'Analyse des lignes courbes bedient.

zweyer Fächer eine gerade Linie, ſo ſind die Glieder in denen Fächern, deren mit jenem gleichnamigen Winkelpuncte die gerade trifft, in geometriſcher Progreſſion. Werden nun zwey Glieder einander gleich geſetzt, ſo ſind alle diejenigen, welche mit denſelben auf gedachte Art in gerader Linie ſich befinden, einander gleich. Auch ſind alle die Glieder einander gleich, deren Fächer an einer mit jener geraden parallelen liegen. Setzt man den Werth von y, der aus jener angenommenen Gleichheit folgt, in ein Glied, das oberhalb der geraden Linie an den Fächern der ſich gleich geſetzten Glieder liegt, ſo entſteht daraus eine höhere Potenz von x als in dieſen; ſetzt man denſelben Werth von y in ein Glied unterhalb jener Linie, ſo entſteht eine niedrigere Potenz. Z. B. wenn die gerade durch die Fächer, x^5, $x^2 y^2$, $x y^4$, y^6, geht, und zwey dieſer Glieder ſich gleich geſetzt werden, ſo ſind ſie alle ſich gleich, und wegen $x = y^2$ iſt jedes $= x^3$. Zieht man mit jener geraden eine parallele, z. B. an den Fächern $x^4 y$, $x^3 y^3$, $x^2 y^5$, ſo ſind dieſe Glieder durch jenen Werth von y auch gleich, und der Werth eines derſelben iſt $x^{\frac{9}{2}}$. Legt man die Parallele durch $x^2 y$, $x y^3$, y^5, ſo ſind dieſe Glieder gleich, und der Werth eines derſelben iſt $x^{\frac{5}{2}}$.

4. Allgemein ſeyn α und β die Coordinaten eines Punctes in Beziehung auf die Seiten des Parallelogramms AD und AB; γ und δ die Coordinaten eines andern Punctes, und $x^\alpha . y^\beta = x^\gamma . y^\delta$. Die gerade Linie durch die beiden Puncte ſchneide die Seite AB in dem Puncte, deſſen Abſtand von A iſt ε, ſo iſt $x^\alpha . y^\beta = x^\varepsilon$. Denn da jene Gleichung für alle ganze Werthe von Abſtänden gilt, ſo gilt ſie auch für gebrochene, als eingeſchaltete Größen. Auf einer mit jener Linie parallelen ſeyn zwey Puncte, deren Coordinaten ſind a und b, c und d, ſo iſt $c - a : d - b = \gamma - \alpha : \delta - \beta$. Da $x^{\gamma - \alpha} . y^{\delta - \beta} = 1$, alſo $y = x^{\frac{\alpha - \gamma}{\delta - \beta}}$ iſt, ſo iſt auch $x^{c - a} . y^{d - b} = 1$, und daher $x^a . y^b = x^c . y^d$. Für den Durchſchnitt dieſer parallelen mit AB iſt $d = 0$, und $x^a . y^b = x^c$, wo c der Abſtand des Durchſchnittspunctes von A iſt.

Man zeichne in dem obigen Parallelogramm die in dieſer Gleichung befindlichen Glieder durch ein Merkmahl aus, oder trage in das Parallelogramm blos die Glieder der Gleichung ein, für das Exempel wie folget.



Man lege ein Linial an den unterſten Winkelpunct linker Hand zweyer Fächer, ſo daß alle Fächer, welche das Linial nicht trifft, oberhalb deſſelben liegen, hier alſo an das Fach für x^3 und an das für y^6. Dieſe Linie geht zugleich durch das Fach für $x^2 y^2$. Dieſe Glieder, für ſich allein genommen, geben die Gleichung, $y^6 - 7 a^2 x^2 y^2 + 6 a^3 x^3 = 0$. Die vier möglichen Wurzeln derſelben ſind $\pm \sqrt{ax}$ und $\pm \sqrt{2ax}$. Setzt man dieſe Werthe von y in die übrigen Glieder der Gleichung, ſo wird die Anzahl der Dimenſionen nach x größer als in jenen Gliedern. In dieſen iſt die Anzahl 3, aber in xy^5 iſt ſie $3\frac{1}{2}$, in x^4 iſt ſie 4, in $x^3 y^4$ iſt ſie 5.

Man lege nun das Linial ſo, daß alle Fächer, welche es nicht trifft, unterhalb deſſelben liegen. Dieſe Lage hat es an den Fächern für x^4 und $x^3 y^4$. Dieſe Glieder geben, für ſich allein genommen, die Gleichung, $x^3 y^4 + ab^2 x^4 = 0$, alſo $y^4 = -ab^2 x$, und $y = \pm \sqrt[4]{-ab^2 x}$, wo x negativ genommen werden muß, wenn nicht a negativ iſt. Die übrigen Glieder erhalten nach ihrer Lage in dem Parallelogramm die Dimenſionen, 3; $2\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{4}$; $1\frac{1}{2}$.

Schriften immer der erſtern Methode. Das vorher ge-
nommene Exempel iſt aus ſeiner Methodus fluxionum
et serierum infinitarum, pag. 44. Opuſc. T. I. In
einem Briefe an Wallis (Opuſc. I. p. 366.) erwähnt in-
zwiſchen Newton einer Methode zu integriren durch die
Annahme einer Reihe für die unbekannte Größe.

Die Berechnung der Reihe für y aus derſelben
Gleichung nach der zweyten Methode geſchieht folgender-

Die Puncte E, G ſeyn äußerſte, das iſt, alle übrige Puncte, die nicht auf der geraden durch E, G, befindlich ſind, liegen auf derſelben Seite von EG. Ein ſolcher Punct ſey M. Man ziehe ML und MN parallel mit AB und AC, und zu M werde auf ähnliche Art, wie vorher, die Zahl $m \times AL + ML$ geſetzt, wo AL der Exponent von y, ML von x in dem zugehörigen Gliede iſt. Man ziehe MO parallel mit EG, ſo iſt

$$m \times AL + ML = \frac{NO}{MN} \times AL + ML = NO + ML = AO.$$

Fallen alſo alle Puncte, außer denen auf EG oberhalb dieſer Linie, ſo geben alle Werthe der Glieder, außer den ſich gleich geſetzten, höhere Potenzen von x als dieſe; fallen ſie aber alle unterhalb, ſo geben ſie niedrigere Potenzen. Durch die Lage von AI wird das Vorzeichen von d in den Exponenten der folgenden Glieder der Reihe für y beſtimmt.

16. Taylor giebt folgendes Exempel an einer Differentialgleichung vom zweyten Grade,

$$1 + xy - \frac{x^{\frac{3}{2}} y \partial y}{\partial x} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Setzt man $y = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + \text{etc.}$, ſo iſt $\frac{\partial y}{\partial x} = mAx^{m-1} + \text{etc.}$, und $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m(m-1) \times Ax^{m-2} + \text{etc.}$ Man erhalten wir durch die Subſtitution von $y = Ax^m$ für y folgende Exponenten von x aus den Gliedern der Gleichung,

$$0;\ m+1;\ 2m+\tfrac{1}{2};\ m-2.$$

Da m noch erſt zu finden iſt, ſo kann man dieſe Exponenten nicht in das Parallelogramm ſetzen. Inzwiſchen ſetzt Taylor ſie ſo über der Linie AC (Fig. 126.), daß 0 in A, $m+1$ und $2m+\frac{1}{2}$ über AC, und $m-2$ unter AC zu liegen kommen, worauf er die äußerſten Exponenten einander gleich ſetzt. Man mag aber auch je zwey einander gleich ſetzen, wobey diejenigen als die äußerſten anzuſehen ſind, durch welche die übrigen beiden größer oder kleiner als jene werden.

Setzt man $o = m - 2$, ſo iſt $m = 2$, und die beiden übrigen Exponenten ſind $3; 4\frac{1}{2}$. — Setzt man $m - 2 = 2m + \frac{1}{2}$, ſo iſt $m = -\frac{5}{2}$, und die übrigen ſind $o; -\frac{3}{2}$, beide größer in relativem Sinne. — Setzt man $m + 1 = 2m + \frac{1}{2}$, ſo iſt $m = \frac{1}{2}$, und die beiden andern ſind o und $-\frac{3}{2}$. — Endlich ſey $o = m + 1$, ſo iſt $m = -1$, und die beiden andern Exponenten ſind $-\frac{3}{2}; -3$.

Die vier hieraus entſpringenden Reihen haben die Form,

1. $y = Ax^{2} + Bx^{-\frac{7}{2}} + Cx^{5} + \text{etc.}$
2. $y = Ax^{-\frac{5}{2}} + Bx^{-1} + Cx^{-\frac{3}{2}} + \text{etc.}$
3. $y = Ax^{-\frac{1}{2}} + Bx^{-1} + Cx^{-\frac{5}{2}} + \text{etc.}$
4. $y = Ax^{-1} + Bx^{-\frac{5}{2}} + Cx^{-4} + \text{etc.}$

Nodus, ſ. Knoten. Exempel von Linien der dritten Ordnung mit einem Knoten ſehe man in Newtons Abhandlung von denſelben.

Nonagonum iſt Neuneck, ſ. Vieleck.

Normale iſt eine gerade, die auf eine Curve in einem Puncte derſelben ſenkrecht iſt, das iſt, auf die ſie daſelbſt berührende. In dem Artikel, berührende Linie, 40—45. iſt gezeigt, wie ſie, bey rechtwinklichten Coordinaten, mittelſt der Subnormale gezogen wird. Da der allgemeine Ausdruck für die Subnormale iſt $\frac{y \partial y}{\partial x}$, ſo iſt die Tangente des Winkels der Normale mit der Ordinate $= \frac{\partial y}{\partial x}$, welches auch die Tangente des Winkels der berührenden mit der Abſciſſenlinie iſt.

1. Wenn der Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ für poſitive y poſitiv iſt, d. i., wenn x und y ſich gleichnamig verändern, ſo liegt die Normale auf derjenigen Seite der Ordinate, nach welcher hin die Abſciſſen genommen werden. Oder,

eine poſitive Subnormale zeigt an, daß ſie von dem Grundpuncte der Ordinate an nach der Richtung der Abſciſſen zu nehmen iſt.

2. Da für Ordinaten, die aus einem Puncte gezogen werden, die Tangente des Winkels der berührenden mit der Ordinate iſt $\frac{y\partial\varphi}{\partial x}$ (a. angef. O. 27.), ſo iſt die Tangente des Winkels der Normale mit der Ordinate $= \frac{\partial y}{y\partial\varphi}$, wo $y\partial\varphi$ ſtatt ∂x bey rechtwinklichten Ordinaten ſteht. Der ſpitze Winkel liegt nach der Gegend hin, nach welcher der Winkel φ genommen wird.

3. Es ſey MAN (Fig. 127.) eine krumme Linie, die Axe der Abſciſſe AX, eine Abſciſſe $AP = x$; Ordinate $PM = y$; B ein gegebener Punct, deſſen Coordinaten ſind $AD = f$, $BD = g$. Aus B ziehe man irgend eine BM an die Curve in M, und ſetze $BM = z$. Es iſt $z^2 = (g + y)^2 + (f - x)^2$, in dem Falle der Figur. Die Differentiation giebt $z\partial z = (g + y)\partial y - (f - x)\partial x$. In dem Falle eines Größten oder Kleinſten iſt $\partial z = 0$, alſo $(g + y)\partial y = (f - x)\partial x$. Die BM ſchneide AD in Q, ſo iſt $g + y : f - x = y : PQ$, alſo iſt $y\partial y = PQ . \partial x$, oder $PQ = \frac{y\partial y}{\partial x}$. Folglich iſt in dem Falle eines Größten oder Kleinſten z die PQ die Subnormale für M, und BM iſt die Normale in M.

4. Die Curve ſey nach B hin concav. Ein Kreis, der aus dem Mittelpuncte B durch M beſchrieben wird, berührt die Curve in M. Der Kreis geht entweder zwiſchen der geraden berührenden und der Curve durch, oder die Curve zwiſchen der berührenden und dem Kreiſe, oder der Kreis macht den Übergang von den aus einem Puncte der Normale durch M beſchriebenen Kreiſen, bey welchen das erſtere oder das zweyte Statt findet. In dieſem dritten Falle iſt BM der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes in dem Puncte M. S. Krümmungskreis.

lich in (9.) den Factor b unter das Wurzelzeichen, wo derſelbe b^2 iſt, und vertauſche darauf b^2 mit $-b^2$. Der Halbmeſſer der Krümmung an der Hyperbel iſt

$r = \frac{(a^2x^2 + b^2x^2 - a^4)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}$, indem in (8.) b mit $b\sqrt{-1}$ vertauſcht, und Zähler und Nenner durch $\sqrt{-1}$ dividirt werden. Es iſt alſo in

$$N : r = a^2 b^2 : (a^2 + b^2)\,x^2 - a^4.$$

10. Die Normale N iſt an den Kegelſchnitten kleiner als der Halbmeſſer der Krümmung. An der Parabel erhellt es unmittelbar. An der Ellipſe fällt das Verhältniß $N : r$ zwiſchen $b^2 : a^2$ und $1 : 1$ als den äußerſten Werthen. An der Hyperbel iſt am Scheitel $N : r = 1 : 1$, und von da an nimmt das Verhältnißglied für r immer fort zu. Daher iſt die Normale unter denjenigen geraden, die von einem Puncte der Axe an einen Kegelſchnitt gezogen werden, ein Kleinſtes.

11. Apollonius hat in dem fünften Buche ſeines Werks über die Kegelſchnitte ſich mit den Normalen, die an die Kegelſchnitte durch einen gegebenen Punct gezogen werden, beſchäftigt, ſ. den Artikel, Größtes und Kleinſtes, Th. II. S. 684 ff. Er beſtimmt, unter welchen Umſtänden keine, oder nur eine, oder zwey gerade durch einen gegebenen Punct an einen Kegelſchnitt gezogen werden können, worauf die Axe ein Kleinſtes abſchneide, d. i. unter welchen Umſtänden keine, oder nur eine, oder zwey Normalen aus dem gegebenen Puncte an die Curve auf der andern Seite der Axe ſich ziehen laſſen. Da dieſe Unterſuchung eine der feinſten in der alten Geometrie iſt, ſo iſt es der Mühe werth, zu ſuchen, wie unſere Algebra ſich dabey verhält.

12. Es ſey MAN eine Parabel, deren Parameter $= a$ iſt. Ihre Gleichung iſt $ax = yy$; die Subnormale $PQ = \frac{y\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2}a$. Nun iſt $BD + MP : PD = PM : PQ$, das iſt $g + y : f - x = y : \frac{1}{2}a$; daher

es iſt an der Parabel jenſeits AX nur eine einzige Normale möglich.

14. Apollonius zeigt erſtlich in Prop. 49, daß keine Normale durch B an den Bogen AM, und zwar jedes Kegelſchnitts möglich iſt, wenn AD kleiner iſt als der halbe Parameter. In der Parabel iſt $PQ = \frac{1}{2}a$, folglich kann AD nicht kleiner als PQ oder $\frac{1}{2}a$ genommen werden. In der Prop. 51 giebt er die Bedingungen der Möglichkeit einer oder zweyer Normalen durch B an AM an. Er nimmt die vierte Proportionale zu $\frac{1}{2}a$; $\frac{2}{3}(f-\frac{1}{2}a)$ und $\sqrt{\frac{1}{3}a(f-\frac{1}{2}a)}$; und nennt ſie K. Iſt g größer als dieſe K, ſo giebt es keine Normale an den Bogen AM, jenſeits der Axe; iſt $g = K$, ſo iſt nur eine Normale vorhanden; iſt g kleiner als K, ſo finden zwey Normalen Statt. Dieſes iſt daſſelbe mit dem, was unſere Algebra von den Gränzen der Möglichkeit aller drey Wurzeln einer cubiſchen Gleichung angiebt.

15. Es iſt AMBmA (Fig. 128.) eine Ellipſe, deren große Axe $AB = 2a$, halbe kleine $= b$; Mittelpunct C; eine Abſciſſe $CP = x$; Ordinate $MP = y$, iſt. Die Gleichung für dieſelbe iſt $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$.

Ferner ſey E ein gegebener Punct, deſſen Coordinaten ſind $CD = f$, und $DE = g$. Auch ſey EM eine Normale, welche die Axe in Q ſchneidet. Es iſt

$$PQ = -\frac{y\partial y}{\partial x} = \frac{b^2x}{a^2}.$$

Die ähnlichen Dreyecke MPQ, EDQ geben die Proportion $g + y : f + x = y : \frac{b^2x}{a^2}$. Daraus entſteht die Gleichung,

$$a^2y(f + x) = b^2x(g + y), \text{ oder}$$
$$a^2fy = (b^2g + b^2y - a^2y)x.$$

Zur Abkürzung ſey $a^2 - b^2 = c^2$, ſo iſt

$$a^2fy = (b^2g - c^2y)x.$$

Auf beiden Seiten quadrirt, und für x^2 der Werth durch y^2 geſetzt, wird

$$a^2 b^2 f^2 y^2 = (b^2 g - c^2 y)^2 (b^2 - y^2).$$

Dieſe Gleichung entwickelt und geordnet wird

$$\left.\begin{array}{l} c^4 y^4 - 2b^2 c^2 g y^3 + b^4 g^2 y^2 + 2b^4 c^2 g y - b^6 g^2 \\ \qquad\qquad - b^2 c^4 y^2 \\ \qquad\qquad + a^2 b^2 f^2 y^2 . \end{array}\right\} = 0$$

Die Lage von g kann immer als poſitiv betrachtet werden, wie in (13.) bemerkt iſt. So iſt die Folge der Vorzeichen $+ - \pm + -$. Die Gleichung hat alſo, wenn alle vier Wurzeln möglich ſind, drey poſitive, und eine negative Wurzel. (Gleichuug, 88.)

16. Die Lage der Normalen für eine Hyperbel zu finden, braucht man nur $+ b^2$ mit $- b^2$ zu vertauſchen, alſo auch $a^2 + b^2 = c^2$ zu ſetzen. So wird die Gleichung,

$$\left.\begin{array}{l} c^4 y^4 + 2b^2 c^2 g y^3 + b^4 g^2 y^2 + 2b^4 c^2 g y + b^6 g^2 \\ \qquad\qquad + b^2 c^4 y^2 \\ \qquad\qquad - a^2 b^2 f^2 y^2 \end{array}\right\} = 0$$

Die Folge der Vorzeichen iſt $+ + \pm + +$. Die Gleichung hat alſo, wenn alle vier Wurzeln möglich ſind, entweder zwey poſitive und zwey negative Wurzeln, oder vier negative. Der letztere Fall iſt nicht möglich. Es müßte der Punct E zwiſchen den beiden entgegengeſetzten Zweigen liegen; alsdann aber iſt nur an jedem eine Normale möglich.

17. Apollonius findet in Propos. 52. die Gränzen der Möglichkeit zweyer Normalen, und die Bedingung für eine einzige an der Hyperbel auf der entgegengeſetzten Seite der Axe; und auch in einem Quadranten der Ellipſe, wenn die ſenkrechte von dem gegebenen Puncte auf die große Axe zwiſchen dem Mittelpuncte und dem Scheitelpuncte liegt.

18. An der Hyperbel nimmt er auf der Axe, von dem Mittelpuncte aus, eine Linie $\Delta H = \frac{aaf}{cc}$, und ſucht

die beiden mittlern Proportionalen zwiſchen ΔH und $\Delta \Gamma$ ($= a$). Die zweyte derſelben, die nächſte an $\Delta \Gamma$, nennt er ΔK. Es iſt $\Delta K^3 = \frac{a^4 f}{c^4}$. Dieſe nimmt er zur Abſciſſe von dem Mittelpuncte aus, und ſetzt die zugehörige (poſitive) Ordinate $= KB$. Ich ſetze $\frac{a^4 f}{c^2} = h^3$, und $KB = k$, ſo iſt $b^2 (h^2 - a^2) = a^2 k^2$, zufolge der Gleichung für die Hyperbel. Ferner nimmt Apollonius $EH = \frac{bbf}{cc}$; $HK = \frac{aaf}{cc} - h$, und ſucht eine Linie Λ, ſo daß ihr Verhältniß zu KB zuſammengeſetzt ſey aus den Verhältniſſen $\Delta E : EH$ und $HK : K\Delta$, das iſt, aus $f : \frac{bbf}{cc}$ und $\frac{aaf}{cc} - h : h$, daher iſt

$\Lambda = \frac{k(aaf - cch)}{bbh}$. Setzt man für h und k ihre Werthe, ſo iſt

$$\Lambda = \frac{af - c\sqrt[3]{acf}}{ab\sqrt[3]{acf}} \sqrt{(a^2\sqrt[3]{a^8 c^2 f^2} - a^2 c^2)}.$$

Apollonius zeigt nun folgendes. Iſt g größer als Λ, ſo iſt durch den gegebenen Punct keine gerade an die Hyperbel möglich, auf welcher die Axe ein Kleinſtes abſchnitte; iſt $g = \Lambda$, ſo iſt nur eine ſolche durch den gegebenen Punct möglich; iſt g kleiner als Λ, ſo ſind zwey ſolche gerade durch den Punct möglich.

Das heißt, die Gleichung für die Hyperbel hat zwey unmögliche Wurzeln, wenn g größer als dieſes Λ iſt, und nur die negativen ſind möglich; ſie hat zwey gleiche poſitive, wenn $g = \Lambda$ iſt; ſie hat zwey ungleiche poſitive Wurzeln, wenn g kleiner als Λ iſt. Es iſt ſehr merkwürdig, daß Apollonius dieſe beſtimmten Gränzſcheidungen gefunden hat. Man wird Mühe haben, ſie durch algebraiſche Rechnung zu beſtimmen.

19. An der Ellipſe nimmt Apollonius CD negativ, oder es liegt ihm D zwiſchen A und C. Es iſt in ſeinem Beweiſe, den er mit dem für die Hyperbel zuſammen gezogen hat, nur die Frage von den Kleinſten in dem Quadranten über AC. Hier iſt $\Delta H = \frac{aaf}{aa - bb} = \frac{aaf}{cc}$.

Ferner $\Delta K^3 = \frac{a^4 f}{cc} = h^3$, und $b^2 (a^2 - h^2) = a^2 k^2$.

Weiter iſt $EH = \frac{bbf}{cc}$, und $HK = h - \frac{aaf}{cc}$. Das Verhältniß A : KB wird aus denſelben Verhältniſſen zuſammengeſetzt wie für die Hyperbel, ſo daß

$$A = \frac{k(cch - aaf)}{bbh}.$$

Die Fälle, worin von der durch den gegebenen Punct an den Quadranten gezogenen geraden durch die Axe entweder gar kein Kleinſtes, oder nur ein einziges, oder zwey abgeſchnitten werden, werden durch dieſelben Beziehungen von g in Abſicht auf A beſtimmt, wie für die Hyperbel.

Inzwiſchen, wenn an dem einen Quadranten zwey Kleinſte möglich ſind, und noch eine Normale für eine negative Ordinate Statt hat, ſo giebt es noch ein Kleinſtes in dem zweyten Quadranten für eine poſitive Ordinate, da in der biquadratiſchen Gleichung, wenn ſie drey mögliche Wurzeln hat, auch noch die vierte möglich iſt.

Numeriſch iſt, was ſich auf beſtimmte Zahlen bezieht.

Numeriſche Algebra iſt diejenige Art des Vortrages derſelben, wo die Aufgaben in beſtimmten Zahlen angegeben, auch die Beweiſe in ſolchen Zahlen geführt werden.

Numeriſche Buchſtaben ſind diejenigen, die zu Zahlzeichen dienen.

Numeriſche Figuren oder Zeichen ſind die Ziffern, die ihren Claſſenwerth durch die Stellen, worin ſie ſtehen, erhalten.

Numeriren, ſ. Zahl.
Numerator oder Zähler, ſ. Bruch.

O.

Oberfläche iſt die Gränze eines geometriſchen Körpers, welche etwas zu dem Körper gehöriges iſt, ohne einen Theil davon auszumachen. Das griechiſche Kunſtwort iſt ἐπιφανεια, etwas, das auswärts erſcheint. Abgeſondert von dem Körper gedacht heißt ſie eine Fläche, ſ. Fläche. Sie iſt wie dieſe eben oder krumm. Eine krumme iſt entweder einfach krumm, wie an Cylindern und Kegeln, oder gedoppelt krumm, wie an Kugeln und Sphäroiden, oder von einer Mittelgattung, wenn ſie durch die ſtetige Bewegung einer geraden Linie beſchrieben wird, ſo daß der Durchſchnittspunct zweyer nächſten geraden veränderlich iſt, ſ. krumme Fläche, 49—60, und 126—134. — Eine Oberfläche heißt an einer Stelle concav, wo die berührenden Ebenen innerhalb des Körpers fallen: convex, wo die berührenden Ebenen außerhalb des Körpers liegen.

Oblatus, abgeplattet, wird insbeſondere von Sphäroiden gebraucht, die durch Umdrehung einer Ellipſe um die kleinere Axe entſtanden ſind. Archimedes nennt es ἐπιπλατυσφαιροειδες.

Oblongum, als Subſtantiv gebraucht, bedeutet meiſtens ein Rechteck, deſſen Seiten ungleich ſind. Als Adjectiv bezeichnet es die Ungleichheit zweyer Dimenſionen, z. B. Sphaeroides oblongum, ein ſolches, das durch die Umdrehung einer Ellipſe um die größere Axe entſtanden iſt. Archimedes nennt es παραμακες (doriſch).

Octaëdrum, ein regulärer, in acht gleichſeitigen Dreyecken eingeſchloſſener Körper, ſ. Vieleckige Körper.

Octangulum, ein Achteck.

Octogonalzahl, ſ. Polygonalzahl.

Octogonum, ein Achteck.

Okytoboon, griechiſch ὠκυτοβοον, iſt der Titel einer verlornen Schrift des Apollonius Pergäus, worin er das Verhältniß des Durchmeſſers eines Kreiſes zu ſeinem Umfange genauer, als es von Archimedes geſchehen war, angegeben hat. Eutocius meldet dieſes in ſeinem Commentar über des A. Kreisrechnung. Die Etymologie des Wortes läßt ſich nicht angeben. Die erſte Hälfte bedeutet Geſchwind oder Geſchwindigkeit. Es kann ſeyn, daß Apollonius in dieſer Schrift eine Anleitung zum bequemern Rechnen, als es mit den griechiſchen Zahlenbuchſtaben möglich war, ertheilt hat. Dieſes vermuthet Halley in der Vorrede zu ſeiner Ausgabe von des Apollonius Werk über die Kegelſchnitte. Umſtändlich handelt von dieſem Worte Käſtner in den geometr. Sammlungen, II. nr. 20.

Ordentliche Figur iſt eine geradlinichte Figur, in welcher alle Seiten und alle Winkel gleich groß ſind, ſ. Vieleck.

Ordinaten ſind erſtlich parallele gerade Linien, die von einer der Lage nach gegebenen geraden Linie, der Abſciſſenlinie, an eine krumme Linie, oder auch an eine andere gerade Linie, in derſelben Ebene gezogen ſind. Zweytens ſind es gerade Linien, die von einem gegebenen Puncte aus an eine krumme Linie, bisweilen auch an eine gerade gezogen werden, wobey ihr Winkel mit einer gegebenen geraden ſtatt der Abſciſſenlinie dient. Drittens ſind es die parallelen geraden, die von einer der Lage nach gegebenen Ebene an eine gedoppelt krumme Linie oder an eine krumme Fläche gezogen werden. Für jene liegen ihre Grundpuncte auf der Ebene in einer krummen Linie, die durch ihre Coordinaten auf derſelben beſtimmt wird; für die krumme Fläche können die Grundpuncte in einer geraden, oder irgend einer krummen Linie genommen werden. Auch bey geraden Linien gebraucht man dieſe Art, die Or-

dinaten zu ziehen, wenn mehrere, die nicht in einer Ebene liegen, mit einander verbunden werden, ſ. Linie. Zu vergleichen der Artikel, Coordinaten.

Apollonius nannte die in einer einfach krummen Linie gezogenen parallelen geraden, welche von einer geraden halbirt werden, τεταγμενως κατηγμενας, welches man ordinatim applicatas überſetzt hat. Daher der Ausdruck, ordinatae, zugeordnete. Die Neuern haben den Begriff dahin abgeändert, daß die Ordinaten von irgend einer in der Curve gezogenen geraden an genommen werden, die entgegengeſetzten Ordinaten mögen ſich gleich oder ungleich ſeyn, die Ordinaten mögen auf verſchiedenen Seiten oder auf derſelben Seite der Abſciſſenlinie liegen, zwey oder mehrere Statt finden.

Desargues, ein praktiſcher Schriftſteller über den Steinſchnitt, die Perſpectiv und die Gnomonik im 17ten Jahrhundert, hat die aus einem Puncte gezogenen Linien ſchon Ordinaten genannt, welches Leibnitz bemerkt hat, Opp. T. III. p. 264.

Ordnungen der krummen Linien ſind Abtheilungen derſelben, in deren Gleichungen die höchſte Summe der Exponenten von den Coordinaten dieſelbe iſt, ſ. krumme Linie. Auf gleiche Art werden die Ordnungen der krummen Flächen unterſchieden, ſ. krumme Fläche.

Organiſche Beſchreibung einer Linie iſt die Zeichnung derſelben durch ſtetige Bewegung eines Punctes mittelſt eines Werkzeuges, insbeſondere wenn der Punct ſich durch den Durchſchnitt zweyer beweglichen geraden Linien ergiebt. Dergleichen Zeichnungen ſind in den Artikeln, Ellipſograph und Hyperbel, 51. 52. angeführt. In dem Artikel, Parabel, wird die mechaniſche Zeichnung dieſer Linie gezeigt. Mancherley Methoden findet man in van Schootens Schrift de organica conicarum sectionum in plano descriptione; de Witt elementis curvarum linearum, L. I. bey der Ausgabe der Geometrie des Descartes von van Schooten; in Newtons Abhand-

lung von den Linien der dritten Ordnung; in Maclaurins Geometria organica, Lond. 1720; in Braikenridge's descriptio linearum curvarum, Lond. 1733. Drey Nachträge zu den beiden letztern Schriften von den Verfaſſern ſind in den Philoſ. Tranſ. vol. 39. for 1735 anzutreffen. S. Geometrie, Th. II. S. 336

Der Kreis, die einfachſte krumme Linie, wird durch das einfachſte Werkzeug, den Zirkel, gezeichnet. Cykloiden und Epicykloiden durch ſtetige Bewegung zu zeichnen ergiebt ihre Entſtehungsart unmittelbar; nur wird es nicht leicht ſeyn, die Einmiſchung einer fremden Bewegung zu vermeiden.

Ort, geometriſcher, iſt eine Linie oder eine Oberfläche, welche zur Auflöſung unbeſtimmter Aufgaben dienen. Dieſe enthalten nämlich alle die Puncte, welche der Aufgabe eine Genüge leiſten.

Die alten Geometer unterſchieden unter den Örtern der erſten Gattung ebene, körperliche und lineariſche Örter (loca plana, solida, linearia, oder *τοποι ἐπιπεδοι, ϛερεοι, γραμμικοι*). Die ebenen waren ihnen die gerade Linie und die Kreislinie; körperliche, die drey Kegelſchnitte, den Kreis ausgeſchloſſen; lineariſche, alle andere Linien, als die Conchoide, Ciſſoide, Spirale, Quadratrix. Die Kegelſchnitte heißen körperliche Örter, weil ſie Schnitte eines Körpers ſind, und als ſolche betrachtet wurden, die Entſtehung der geraden Linie und des Kreiſes aber in einer Ebene gedacht werden kann. Von den Örtern an eine Oberfläche hat Euklides zwey Bücher geſchrieben, von welchen Pappus in der Vorrede zum 7ten Buche nur den Titel anführt. Es kann ſeyn, daß dieſe Örter doppelt krumme Linien geweſen ſind, dergleichen einige von den Alten betrachtet ſind, als die cylindriſche und die ſphäriſche Spirale, auch auf der Oberfläche eines Cylinders zwey Curven, durch welche Archytas die Aufgabe von der Verdoppelung eines Würfels auflöſete.

Apollonius hat über die ebenen Örter zwey Bücher geſchrieben, die verloren ſind, aber von Robert

Simſon, nach dem von Pappus aufbewahrten Inhalte, wieder hergeſtellet worden, Glasgow 1749; überſetzt von Camerer, 1796. Dieſes Werk iſt zur Übung in der Elementargeometrie vortrefflich geeignet. Van Schooten hat es auch verſucht dieſe Schrift wieder herzuſtellen. Exercitationes mathematicae. L. III. In Fermats Werken iſt auch ein Verſuch darüber vorhanden. Beyſpiele ebener Örter ſind folgende.

Wenn aus zwey gegebenen Puncten zwey gerade Linien, die einen gegebenen Winkel mit einander machen, gezogen werden, ſo iſt der Ort ihres Durchſchnitts ein Kreisbogen, ſ. Kreis, 19.

Wenn die Grundlinie und der Inhalt eines Dreyecks gegeben ſind, ſo iſt der Ort des Scheitels eine gerade Linie.

Wenn von einem Puncte an zwey der Lage nach gegebene gerade Linien, ſie mögen parallel ſeyn oder ſich ſchneiden, zwey gerade unter gegebenen Winkeln gezogen werden, die entweder ein gegebenes Verhältniß haben, oder von welchen die eine mit derjenigen, zu welcher die andere ein gegebenes Verhältniß hat, eine gegebene Summe ausmacht, ſo iſt der Ort des Punctes eine gerade Linie. — Dieſes iſt der oben S. 206 erwähnte Fall. Statt Summe kann auch der Unterſchied genommen werden, welches Apollonius nicht bemerkt hat.

Wenn aus zwey Puncten zwey gerade Linien gezogen werden, die ein gegebenes Verhältniß haben, ſo iſt der Ort ihres Durchſchnitts eine gerade oder ein Kreis. — Das erſtere, wenn das Verhältniß dasjenige der Gleichheit iſt. S. auch Kreis, 51—55. Des Apollonius Auflöſung führt Eutocius in ſeinem Commentar zu deſſen Werke über die Kegelſchnitte im Anfange des erſten Buches an.

Wenn von irgend mehrern Puncten gerade Linien an einen Punct gezogen werden, und die Summe der über dieſen Linien beſchriebenen ähnlichen Figuren einem gegebenen Flächenraume gleich iſt, ſo iſt der Ort des Durchſchnitts eine Kreislinie, ſ. Kreis, 58—65.

Beyſpiele von Aufgaben, welche auf einen körperlichen Ort führen, geben die Eigenſchaften der Kegelſchnitte ſelbſt an. Es werde das Dreyeck geſucht, deſſen Grundlinie gegeben iſt, und deſſen zwey übrige Seiten eine gegebene Summe ausmachen; ſo iſt der Ort eine Ellipſe. Setzt man anſtatt Summe Unterſchied, ſo iſt der Ort eine Hyperbel. Insbeſondere iſt hier die Aufgabe merkwürdig, welche in dem Artikel, krumme Linien der erſten Claſſe, 36, 37 vorgetragen iſt. Eine ſynthetiſche allgemeine Auflöſung hat Newton in den Princip. nat. Phil. Lemma XVIII. XIX. gegeben. — In Pauli Friſii Operibus, T. I. iſt eine Abhandlung de locis geometricis enthalten, die analytiſch iſt. Es ſind Aufgaben, die auf Kegelſchnitte führen. — Man ſehe auch de Witt elementa curvarum, L. II. bey der Geometria Carteſii, und van Schooten in den Locis planis reſtitutis, einiges auch in deſſen Sectionibus miſcellaneis oder Exerc. mathem. L. V.

Jede krumme Linie giebt mittelſt ihrer Eigenſchaften einen geometriſchen Ort ab, wenigſtens iſt ſie der Ort zur Auflöſung der unbeſtimmten Gleichung, durch welche ihre Natur angegeben wird.

Wenn eine beſtimmte Aufgabe auf der Erfüllung zweyer Bedingungen beruht, ſo giebt jeder Durchſchnitt der beiden Linien, welche die Örter für die Bedingungen ſind, eine Auflöſung der Aufgabe. Z. B. es ſoll über einer gegebenen geraden Linie ein Dreyeck gezeichnet werden, deſſen Inhalt gegeben wird, und deſſen beide übrige Seiten ein gegebenes Verhältniß haben, ſo iſt die gerade Linie und der Kreis zu finden, deren jene ein Dreyeck von dem gegebenen Inhalt, dieſer das Dreyeck mit dem gegebenen Verhältniſſe der Seiten giebt.

Eine Aufgabe, die auf einen geometriſchen Ort, oder auf eine Linie des dritten Grades führt, iſt folgende. Zwey gerade Linien, die ſich ſchneiden, ſind der Lage und Länge nach gegeben, es ſoll der Ort des Punctes gefunden werden, von welchem aus die beiden Linien unter gleichen

Winkeln geſehen werden. Die Aufgabe iſt zugleich ein gutes Beyſpiel zu den Linien der dritten Ordnung.

Es ſeyn AC, BC (Fig. 129.) die gegebenen geraden, und P ein Punct, an welchem die Winkel APC, BPC gleich groß ſind. Man halbire den Winkel ACB durch die gerade CD, und ſetze $AC = a$; $BC = b$; $CP = z$; ACD oder $BCD = \alpha$; $DCP = \varphi$, alſo $ACP = \alpha - \varphi$; $BCP = \alpha + \varphi$. Nun iſt

$$\text{tang}\, APC = \frac{AC \cdot \sin ACP}{CP - AC \cdot \cos ACP},$$

und

$$\text{tang}\, BPC = \frac{BC \cdot \sin BCP}{CP - BC \cdot \cos BCP},$$

ſ. Trigonometrie. Alſo iſt zufolge der Bedingung

$$\frac{a \sin(\alpha - \varphi)}{z - a \cos(\alpha - \varphi)} = \frac{b \sin(\alpha + \varphi)}{z - b \cos(\alpha + \varphi)}.$$

Daraus iſt

$$z = \frac{ab \sin 2\varphi}{b \sin(\alpha + \varphi) - a \sin(\alpha - \varphi)}.$$

Aus dieſem Werthe von z durch φ laſſen ſich für irgend welche Winkel φ die zugehörigen z beſtimmen, alſo ſo viele Puncte der Curve finden, als man will. Nimmt man $\varphi = \alpha$, ſo iſt $z = a$; nimmt man $\varphi = -\alpha$, ſo iſt $z = b$. Nimmt man $\varphi = 0$, oder $= 180°$, ſo iſt $z = 0$. Die krumme Linie geht alſo durch die drey gegebenen Puncte A, B, C. Man muß bemerken, daß die Aufgabe im geometriſchen Sinne einen weitern Umfang hat, als im optiſchen. Wenn P in A fällt, ſo wird die ſchneidende eine berührende. Der Winkel derſelben mit CA muß nun dem CAB gleich ſeyn. Eben ſo verhält es ſich in B, und in C muß ein Knoten ſeyn, damit daſelbſt zwey ſchneidende in zwey berührende ſich verwandeln können.

Iſt $b \sin(\alpha + \varphi) = a \sin(\alpha - \varphi)$, ſo iſt z unendlich groß, und z iſt entweder die Aſymptote oder ihr parallel. Die Entwickelung dieſer Gleichung giebt

$\tan \varphi = -\frac{b-a}{b+a} \tan \alpha$. Die Negation zeigt, daß die Lage der unendlich großen z von CD nach CB hin zu nehmen iſt. Es falle dieſes z in CE, ſo daß

$\tan DCE = \frac{b-a}{b+a} \tan \alpha$ ſey.

Dieſe CE nehme man zur Abſciſſenlinie, um die Gleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten gleich ſo viel möglich einfach zu machen, und ſetze $DCE = \beta$. Von P ziehe man auf CE die ſenkrechte PM, und ſetze $CM = x$; $PM = y$; auch $\beta + \varphi = \omega$, ſo iſt $x = z \cos \omega$, und $y = z \sin \omega$. In dem Werthe von z bringe man ſtatt φ den Winkel ω, ſo iſt

$$z = \frac{ab \sin(2\omega - 2\beta)}{b \sin(\alpha - \beta + \omega) - a \sin(\alpha + \beta - \omega)}.$$

Es iſt $\sin 2\omega = 2 \sin\omega . \cos\omega = \frac{2xy}{z^2} = \frac{2xy}{xx+yy}$,

und $\cos 2\omega = \cos\omega^2 - \sin\omega^2 = \frac{xx-yy}{xx+yy}$. Dadurch iſt $\sin(2\omega - 2\beta)$

$$= \sin 2\omega . \cos 2\beta - \cos 2\omega . \sin 2\beta$$
$$= \frac{2\cos 2\beta . xy - \sin 2\beta (xx-yy)}{xx+yy}.$$

Ferner iſt $bz \sin(\alpha - \beta + \omega) - az \sin(\alpha + \beta - \omega)$

$$= [b \sin(\alpha - \beta) - a \sin(\alpha + \beta)]\, x$$
$$+ [b \cos(\alpha - \beta) + a \cos(\alpha + \beta)]\, y.$$

Der Factor zu x iſt $= (b-a) \sin\alpha . \cos\beta - (b+a) \times \cos\alpha . \sin\beta$. Da $\frac{b-a}{b+a} \tan\alpha = \tan\beta$ iſt, ſo iſt dieſer Factor $= 0$. Der Factor von y iſt $= (b+a) \times \cos\alpha . \cos\beta + (b-a) \sin\alpha . \sin\beta = \frac{(b+a)\cos\alpha}{\cos\beta}$.

So wird die geſuchte Gleichung,

$$\frac{(b+a)\cos\alpha}{\cos\beta}(y^3+x^2y)+ab\sin 2\beta(x^2+y^2)$$
$$-2ab\cos 2\beta\,.\,xy=0.$$

Die Linie iſt vom dritten Grade, und gehört zu der erſten Gattung, ſ. krumme Linien der zweyten Claſſe, 32. Das höchſte Glied, y^3+x^2y, ohne den Coefficienten, hat nur den einfachen Factor y, und den quadratiſchen, nicht zerlegbaren, y^2+x^2. Die Gleichung iſt einfach genug, ſo daß es nicht nöthig iſt, ſie auf die Form in 32. zu bringen. Setzt man x unendlich groß, ſo bleiben blos die Glieder, x^2y und x^2, welches giebt $y=-\frac{ab\sin 2\beta\cos\beta}{(a+b)\cos\alpha}$. Dieſes iſt der Abſtand der Aſymptote von der geraden DE. Die Curve iſt die in Fig. 59. gezeichnete, zu 38. a. a. O. gehörige. Die Ovale ſchließt ſich an die beiden unendlichen Zweige, weil für jeden Winkel φ, von 0 bis 360° ein z, aber auch nur ein einziges vorhanden iſt. In dem Bogen unterhalb der beiden Chorden, AC, BC, ſind ſtatt der Winkel, über dieſen Chorden, die Nebenwinkel zu nehmen, ſo daß der Nebenwinkel an der einen dem Winkel über der andern gleich iſt.

Wenn a = b, ſo iſt tang$\beta = 0$, oder $\beta = 0$, und die Gleichung wird

$$(y^2+x^2)\cos\alpha = ax,$$

eine Gleichung für einen Kreis. Denn wenn in dieſem Falle durch die drey Puncte A, B, C ein Kreis beſchrieben wird, ſo erſcheinen die beiden AC, BC von jedem Puncte der Kreislinie unter demſelben unveränderlichen Winkel. A. J. Häſeler hat eine Monographie dieſer Linie 1785 nach meiner Anleitung geliefert. Die Rechnung in dieſem Artikel iſt etwas abgeändert. Auch in den neuen Abhandlungen der Schwediſchen Akademie, Bd. XV. für 1794 hat Melanderhielm eine Unterſuchung darüber angeſtellt, welche ich nicht geſehen habe.

Orthogonius, was rechtwinklicht iſt, als ein rechtwinklichtes Dreyeck, oder ein Rechteck, oder ein Körper, deſſen Axe ſenkrecht auf die Grundfläche iſt.

Orthographiſch iſt eine Projection der Puncte und Linien durch ſenkrechte auf eine gegebene Ebene.

Osculatio iſt die innigſte Berührung einer krummen Linie mit einer andern krummen Linie, auch einer krummen Fläche mit einer andern. S. Krümmung und Krümmungskreis. Daſelbſt auch die Benennungen, **circulus osculator** und **parabola osculatrix**.

Ovale iſt eine durch ſich beſchloſſene krummlinichte Figur, deren zwey Hauptdurchmeſſer ungleich ſind. Eine Ellipſe iſt eine Ovale, wiewohl man in der Geometrie ihr dieſen Namen nicht giebt. Die Ovalen, die man zu allerhand Einfaſſungen zu gebrauchen pflegt, werden aus zweyerley Kreisbogen zuſammengeſetzt, und ſind daher keine eigentliche geometriſche Linien, als in welcher alle Puncte nach einem und demſelben Geſetze beſtimmt ſeyn müſſen. Dieſe Art empfiehlt ſich inzwiſchen zum praktiſchen Gebrauche durch die Leichtigkeit, womit ſie gezeichnet wird.

Es ſey ABC (Fig. 130.) ein gleichſchenkliges Dreyeck, worin AB die Grundlinie iſt. Aus A und B beſchreibe man mit den gleichen Halbmeſſern AD, BE Kreiſe, verlängere CA, CB bis an dieſelben in F, G, beſchreibe aus C mit dem Halbmeſſer CF = CG den Kreisbogen FG, ſo iſt DFGE die eine Hälfte der Ovale, welche auf der andern Seite von DE eben ſo gezeichnet wird. — Die Verbindung der beiden ungleichen Kreisbogen bey F und G geſchieht nach einer gemeinſchaftlichen berührenden, weil die Verbindungspuncte mit den Mittelpuncten in gerader Linie liegen.

Bey derſelben Länge und Breite eines Ovals kann man die Halbmeſſer der Kreisbogen auf unzählig viele Arten abändern. Durch Verſuche mag man leicht die für

jeden Fall ſchicklichſte finden. Die Gleichung zwiſchen der gegebenen Länge und Breite der Ovale und den beiden Halbmeſſern iſt leicht gefunden.

Es ſey die halbe Länge DH = a, die halbe Breite HK = b; der Halbmeſſer AD = x; der Halbmeſſer CF = y, ſo iſt $(y-x)^2 = (a-x)^2 + (y-b)^2$, alſo

$$2ax + 2by - 2xy = aa + bb,$$

eine unbeſtimmte Gleichung für beide Halbmeſſer.

Die ſchicklichſte Form einer Ovale iſt überhaupt die, bey welcher das Verhältniß des kleinern Halbmeſſers zu dem größern ſo groß als möglich iſt, bey einer gegebenen Länge und Breite der Ovale, das iſt, wenn der Quotient des größern Halbmeſſers dividirt durch den kleinern der Einheit möglichſt nahe kommt. Alsdann nämlich unterſcheiden ſich die Krümmungen der beiden Kreisbogen DF, FG am wenigſten von einander.

Die gefundene Gleichung giebt

$$\frac{y}{x} = \frac{aa + bb - 2ax}{2bx - 2xx}.$$

Wenn dieſer Quotient ein Kleinſtes oder Größtes iſt, ſo iſt

$$2ax^2 - 2(aa + bb)x + b(aa + bb) = 0,$$

(Größtes und Kleinſtes, 46.) Hieraus folgt

$$x = \frac{aa + bb \pm (a - b)\sqrt{(aa + bb)}}{2a};$$

$$y = \frac{aa + bb \mp (a - b)\sqrt{(aa + bb)}}{2b},$$

Der Werth des Quotienten $\frac{aa + bb - 2ax}{2bx - 2xx}$ iſt negativ für negative x; unendlich groß für x = 0; poſitiv für x zwiſchen 0 und b; wieder unendlich groß für x = b; negativ für x zwiſchen b und $\frac{aa + bb}{2a}$; Null für x = $\frac{aa + bb}{2a}$; poſitiv für jedes x, das größer als dieſer

Werth iſt, und Null für ein unendlich groſses poſitives x, wie für ein ſolches negatives. Hieraus erhellt, daſs der Werth des Quotienten für ein x zwiſchen o und b ein Kleinſtes, und für ein x, das gröſser als $\frac{aa+bb}{2a}$ iſt, ein Gröſstes wird. Stellt man ſich die Werthe des Quotienten als Ordinaten z zu der Abſciſſe x vor, ſo hat die Curve, welche eine Linie vom dritten Grade iſt, zwey Aſymptoten in der Richtung der Ordinaten für x = o und x = b, und eine in der Abſciſſenlinie ſelbſt. Sie hat die in Fig. 63. abgebildete Geſtalt, wo AY als die Axe der poſitiven Abſciſſen, und AX als die der Ordinaten anzuſehen iſt. In unſerm Falle iſt AX zugleich eine Aſymptote, die mit CN zuſammen fällt.

Da die kleinſte Ordinate zwiſchen den beiden parallelen Aſymptoten zu einem kleinern x gehört, als dasjenige zu einer gröſsten Ordinate iſt, ſo haben wir für einen kleinſten Werth des Quotienten das untere Vorzeichen für x und y zu nehmen. Demnach iſt

$$x = \frac{aa+bb-(a-b)\sqrt{(aa+bb)}}{2a};$$

$$y = \frac{aa+bb+(a-b)\sqrt{(aa+bb)}}{2b}.$$

Auch ergiebt ſich dieſes daher, daſs an der Ovale der Halbmeſſer des kleinern Kreiſes, x, kleiner als b iſt.

Exempel. Es ſey a = 4; b = 3, ſo iſt aa + bb = 25, und $x = \frac{5}{2}$; y = 5, und $\frac{y}{x} = 2$. Nimmt man für x einen etwas kleinern oder gröſsern Werth, ſo wird der Quotient $\frac{y}{x}$ gröſser als 2. — Die beiden kleinern Kreiſe ſchneiden ſich, und die Mittelpuncte der gröſsern fallen in die Durchſchnitte jener.

Nimmt man in den Formeln für x und y die obern Vorzeichen, ſo iſt $x = 3\frac{3}{4}$; $y = 3\frac{1}{3}$, und $\frac{y}{x} = \frac{8}{9}$.

Dieſer Werth des Quotienten iſt ein Größtes, wie man es bey veränderten Werthen von x und y finden wird. Bey der Ovale iſt er nicht anwendbar.

Man kann auch den Verbindungsbogen für die beiden kleinern Kreiſe aus C durch zwey Puncte, f, g, auf der andern Seite des Durchmeſſers der Ovale DE beſchreiben. So erhält man eine an den Seiten eingebogene Figur. Für dieſe iſt die Gleichung zwiſchen den Halbmeſſern, der Länge und der Breite,

$$(y + x)^2 = (a - x)^2 + (b + y)^2,$$

alſo

$$2ax - 2by + 2xy = aa + bb.$$

Hier iſt y das entgegengeſetzte von y für die Ovale.

Die Ovale, an welcher die Kreiſe ſich möglichſt nahe kommen, mag als Gewölbebogen bey gedruckten Gewölben benutzt werden. Sie ſteht an den Endpuncten ſenkrecht auf die Gewölbepfeiler, welches ein einziger Kreisbogen nicht thut. Das möglichſt nahe Verhältniß der Krümmungen an den Kreisbogen ſetzt es der wenigſten Gefahr von einem ungleichen Druck aus. Boſſüt hat in ſeinem Cours des Mathématiques ſie zu dieſem Gebrauche angegeben.

An den krummen Linien vom dritten und höhern Graden kommen Ovale als zuſammenhängende mit der ganzen Curve oder auch als abgeſonderte Theile vor. Hier beſtehen ſie aber nicht aus Kreisbogen, weil alle Puncte derſelben mit den übrigen Puncten der Curve nach demſelben Geſetze beſtimmt werden. Die Gleichung, $x^4 - ax^3 - a^2y^2 = 0$ giebt eine blattähnliche Figur mit einer Spitze. Die Gleichung,

$$y^4 - 4y^2 = -ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

giebt in einigen Fällen eingedruckte Ovale, in andern ſonderbar verſchlungene, auch mehrmals eingedruckte Figuren, nach Beſchaffenheit der Wurzeln, welche die Gleichung, $ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e = 0$, hat, in Abſicht auf Ungleichheit oder Gleichheit, Möglichkeit oder Unmöglichkeit. Hutton hat ſie in ſeinem mathematiſch-phyſikaliſchen Wörterbuche gezeichnet.

Ovalen des Descartes ſind krumme in ſich ſelbſt wiederkehrende Linien, welche die daran aus einem Puncte gezogenen geraden Linien, nach dem Geſetze für Lichtſtrahlen, ſo brechen, daß ſie nach der Brechung in demſelben Puncte zuſammen kommen. Descartes hat in ſeiner Geometrie, 2. B., vier Arten, oder vielmehr zwey Arten, jede mit zwey Unterarten angegeben. Es iſt von denſelben ſchon in dem Artikel, Diacaustica, Th. I. S. 757. Nachricht ertheilt, und die Gleichung für ſie aus einer allgemeinen für alle Brennlinien durch Brechung hergeleitet. Daſelbſt iſt bemerkt, daß dieſe Curven in der Optik von keinem Gebrauche ſind, wie Descartes wähnte. Als ein Beyſpiel, wie die Geometrie eine phyſiſche Unterſuchung allgemein macht, verdient dieſe geometriſche Speculation einige Aufmerkſamkeit.

Es ſey A (Fig. 131.) der Punct, von welchem die Strahlen auf die brechende Fläche fallen, von welcher CMN ein Durchſchnitt iſt, B der Punct, in welchem ſie durch die Brechung vereinigt werden. In M ſey MP die Normale. Die gerade AM werde nach Ma verlängert, ſo iſt PMa der Einfallswinkel, PMB der Brechungswinkel in M. Die Sinus dieſer Winkel haben ein gegebenes Verhältniß, welches m : n ſey. Man nehme noch einen Punct N auf der Curve, an welchen die Linien AN, BN gezogen ſeyn. Aus A werde mit dem Halbmeſſer AN der Kreisbogen Nm, und aus B mit dem Halbmeſſer BN der Kreisbogen Nn beſchrieben. Je näher die Puncte M, N ſich liegen, deſto näher kommen die Winkel der Chorde von MN mit Mm und Mn den Winkeln der berührenden mit eben denſelben, und das Verhältniß der Mm : Nn dem Verhältniſſe der Coſinus dieſer Winkel, das iſt, dem Verhältniſſe der Sinus von PMa und PMB, oder dem Brechungsverhältniſſe m : n, das iſt $\partial . AM : - \partial . BM = m : n$. Folglich $n\partial . AM = - m\partial . BM$. Daher verhält ſich auch die endliche Zunahme von AM zu der endlichen Abnahme von BM wie m : n. Es ſey C der Punct der Curve,

wo die gerade AB ſie ſchneidet, ſo iſt ebenfalls AM — AC : BC — BM = m : n. Jenes iſt die Zunahme von AC bis zu dem Puncte M, dieſes die Abnahme von BC bis zu demſelben Puncte M.

Die Brechung findet nur bis zu dem Puncte Statt, wo die Curve von der geraden aus A berührt wird, und der Einfallswinkel ein rechter iſt. Von da an wird dieſer Winkel ſpitz, und die Brechung verwandelt ſich in eine Zurückwerfung, bey welcher aber die Sinus des Einfalls- und Zurückwerfungswinkels daſſelbe Verhältniß wie bey der Brechung behalten. Die ganze Figur wird eine Ovale, die nach A hin ſchmäler als jenſeits B iſt, wenn n kleiner als m iſt, etwa ſo wie Tab VII. Fig. 114. im 1. Theile gezeichnet iſt. Sie iſt eine höhere Art von Ellipse, nur daß an ihr der eine Brennpunct außerhalb der Curve liegt. Man kann ſie leicht zeichnen, wenn man AM zwar willkürlich, doch innerhalb einer gewiſſen Gränze annimmt, aus der Gleichung für die Curve BM berechnet, und dann das Dreyeck AMB zeichnet, welches für ſo viele Puncte, als nöthig iſt, wiederholt wird. Den entfernteſten Punct D der Curve auf der Axe findet man leicht, weil AD — BD = AB, und AD — AC : BC — BD = m : n iſt. Daraus ergiebt ſich (m + n) AD = (m + n) AC + 2m . BC.

An der zweyten Ovale iſt BM größer als BC, übrigens ebenfalls AM — AC : BM — BC = m : n. Man könnte dieſe und die dritte Gattung als eine höhere Hyperbel anſehen, wenn ſie nicht in einem endlichen Raume beſchränkt wären.

An der dritten und vierten Ovale liegt der Punct B mit A auf derſelben Seite von C und weiter davon entfernt. An der dritten iſt AM — AC : BM — BC = m : n. An der vierten iſt AM — AC : BC — BM = m : n. Die letztere bildet ein Oval wie die erſte Art, und kommt darin der Ellipse näher, daß beide Vereinigungspuncte der Strahlen innerhalb der Curve liegen.

Eine andere Gleichung für dieſe Ovale läßt ſich folgendergeſtalt finden. Es iſt

$$AP : AM = \sin AMP : \sin APM;$$
$$BM : BP = \sin BPM : \sin BMP.$$

Da $\sin BPM = \sin APM$, und $\sin AMP = \sin PMa$ iſt, ſo iſt

$$AP \times BM : BP \times AM = \sin PMa : \sin BMP.$$
$= m : n$, alſo
$$n \, . \, AP \times BM = m \, . \, BP \times AM.$$

Descartes nimmt die hier zuerſt gefundene Gleichung für die nach einem Puncte brechende Linie an, und zeigt hernach, daß ſie auf dieſe zweyte führt. Er verſchweigt ganz, wie er auf jene Gleichung gekommen ſey, welches faſt nicht anders als auf die hier angewandte Art geſchehen ſeyn kann, ſo daß Descartes wirklich in dieſem Falle Differentialverhältniſſe gebraucht hätte.

Wenn die Strahlen parallel auffallen, ſo verwandelt ſich die erſte Ovale in eine Ellipſe, deren einer Brennpunct, der entfernteſte von C, iſt B, halbe große Axe $= \frac{m}{m+n} BC$, und der Abſtand des Mittelpunctes von $B = \frac{n}{m+n} BC$. Die zweyte Ovale verwandelt ſich für dieſen Fall in eine Hyperbel, deren einer Brennpunct, der nächſte bey C, iſt B, halbe Hauptaxe $= \frac{m}{n-m} BC$, und der Abſtand des Mittelpunctes von $B = \frac{n}{n-m} BC$. Werden die Strahlen BM parallel, ſo wird die dritte Ovale eine Hyperbel, die vierte eine Ellipſe.

Man vergleiche noch über dieſe Ovalen Hunghens Schrift: de lumine, cap. VI. In den Mémoires de l'Acad. des Sciences, 1758. iſt ein Aufſatz von d'Arcy, worin gewieſen wird, wie dieſe Ovalen durch eine ſtetige Bewegung zu beſchreiben ſind.

Oxygonium triangulum, ein ſpitzwinklichtes Dreyeck.

P.

Pantogonia curva iſt eine krumme Linie, zu den trajectoriis reciprocis gehörig, welche, wenn ſie um eine ihrer Ordinaten gedreht wird, bis ſie wieder in ihrer Ebene umgekehrt liegt, und alsdann längs dieſer Ordinate hin und her geſchoben wird, ſich ſelbſt in ihrer erſten Lage allenthalben unter einem und demſelben Winkel ſchneidet. Dieſer Winkel iſt irgend einer, nach der Lage der Ordinate, um welche die Drehung geſchieht.

Die Aufgabe, die Natur dieſer Curve zu beſtimmen, ward Joh. Bernoulli von einem engliſchen Mathematiker aufgegeben. Seine Auflöſung ſteht in ſeinen Werken, T. II. p. 600 ſſ. Die Abſciſſe ſey ein Bogen, deſſen Sinus $= x$ für den Halbmeſſer, a, ſo iſt die Ordinate $= c + \int \frac{a\partial x}{x}$, das iſt $= c + a \log. \frac{x}{b}$.

Die Frage iſt eine bloße analytiſche Künſteley.

Pantograph iſt der bekannte Storchſchnabel zum Abzeichnen einer jeden Figur, ſey es verkleinert oder vergrößert. Hutton nennt dieſes Inſtrument in ſeinem Wörterbuche ganz irrig Pentagraph. Der Erfinder iſt der Jeſuit, Chriſtoph Scheiner, der es in einer beſondern Schrift ſehr ausführlich erklärt hat. Pantographice, ſeu ars delineandi res quaslibet cet. Romae, 1631. Er hatte im J. 1603 Bekanntſchaft mit einem Mahler gemacht, der ihm eröffnete, er könne jede Zeichnung auf das genaueſte nachzeichnen, dabey vergrößern oder verkleinern, ohne das Original anzuſehen, auch jeden Theil, in welcher Lage er ſey, unabhängig von den andern auswählen. Scheiner ward ſehr begierig, das ſonderbare Kunſtſtück zu erfahren, aber jener wollte es durchaus nicht mittheilen. Unmuthig darüber erwiedert

Linie liegen, und ſich wie BP : CP verhalten, das iſt, wie in der erſtern Lage. Der Punct P bekommt eine Stütze (oder vielmehr eine Holzſchraube), ſo auch der Punct B und der Punct E von gleicher Höhe mit den beſchreibenden Stiften. Scheiner bemerkt es zwar nicht, doch iſt es nöthig, daß die parallelen Lineale Löcher bekommen, welche genau auf einander paſſen, damit man das Verhältniß PA : Pa, welches dem PB : PC gleich iſt, verſchiedentlich annehmen könne. Der Punct a mag auch auf DE in a′ genommen werden. Alsdann iſt

$$PA : Pa' = BA : BD.$$

Man kann den Punct a auch auf die Diagonale BE bringen, mittelſt eines fünften Lineals, das mit BC oder BD parallel in einem beliebigen Abſtande befeſtigt wird.

Parabel iſt diejenige krumme Linie, an welcher das Quadrat der Ordinate gleich iſt dem Rechteck von der Abſciſſe und einer gegebenen Linie, oder in Symbolen, deren Gleichung iſt $yy = ax$. Sie macht den Übergang von den Ellipſen zu den Hyperbeln. Sie entſteht in einem Kegel, wenn der Schnitt parallel mit einer Seite des Kegels geführt wird, S. Kegelſchnitt. Zum Unterſchiede von andern paraboliſchen Linien wird ſie auch die Apolloniſche Parabel genannt.

1. Wenn die Coordinaten rechtwinklichte ſind, ſo iſt die Abſciſſenlinie die Axe, welche die Curve in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt. Die gegebene Linie a heißt der Parameter zur Axe, oder ſchlechtweg zu der Parabel ſelbſt. Der Anfangspunct der Abſciſſen iſt der Scheitel der Parabel.

2. Für jedes poſitive x ſind zwey gleiche und entgegengeſetzte Ordinaten y. Dieſe wachſen zwar in Beziehung auf den Parameter immer fort, wenn x vergrößert wird, aber in Beziehung auf die Abſciſſen werden ſie immer kleiner. Es iſt $\frac{y^2}{x^2} = \frac{a}{x}$, daher für ein unendlich großes x die Ordinate in Vergleichung mit demſelben

verſchwindet. Für negative x ſind keine Ordinaten möglich.

3. Man nehme auf der Axe AX (Fig. 134.) die Abſciſſe $AF = \frac{1}{4}a$, und ziehe an irgend einen Punct der Parabel M die gerade $FM = u$, es iſt $u = x + \frac{1}{4}a$.

Denn es iſt $u^2 = (x - \frac{1}{4}a)^2 + y^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 + y^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2 = (x + \frac{1}{4}a)^2$; alſo $u = x + \frac{1}{4}a$. Dieſer Werth bleibt, wenn AP kleiner als AF iſt.

4. Der Punct F heißt der **Brennpunct** der Parabel. Die Ordinate in demſelben iſt der halbe Parameter. Dieſes hat die Parabel mit den andern beiden Kegelſchnitten gemein.

5. Auf den Brennpunct würde man durch die Aufgabe kommen, den Punct F auf der Axe zu finden, von welchem die gerade FM an die Curve gezogen einen rationalen Werth hat. Man ſetze $AF = c$, ſo iſt $FM^2 = u^2 = (x - c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = x^2 + (a - 2c)x + c^2$. Soll dieſes das Quadrat einer rationalen Größe ſeyn, ſo iſt $\frac{1}{2}(a - 2c) = c$, alſo $a = 4c$, und $c = \frac{1}{4}a$.

6. Es ſey der Winkel $AFM = \varphi$, $FM = u$, ſo iſt $(1 + \cos\varphi)\, u = \frac{1}{2}a$, oder $u \cos\frac{1}{2}\varphi^2 = \frac{1}{4}a$.

In dem Falle der Figur, da P über F von A an hinaus fällt, iſt $FP = u\cos(180^\circ - \varphi)$, und $AP = \frac{1}{4}a + u\cos(180^\circ - \varphi)$. Da $u = x + \frac{1}{4}a$ iſt, ſo iſt $u = \frac{1}{2}a + u\cos(180^\circ - \varphi) = \frac{1}{2}a - u\cos\varphi$, alſo $(1 + \cos\varphi)\, u = \frac{1}{2}a$.

Wenn P zwiſchen A und F fällt, ſo iſt $AP = \frac{1}{4}a - u\cos\varphi$. Nun iſt ebenfalls $u = x + \frac{1}{4}a$, alſo iſt $u = \frac{1}{2}a - u\cos\varphi$, und $(1 + \cos\varphi)\, u = \frac{1}{2}a$.

7. Es iſt NAM (Fig. 135.) eine Parabel, deren Axe AX iſt. In der Entfernung BD von der Axe ſey durch den Punct B der Parabel eine gerade BU parallel mit AX, auf welcher die Abſciſſen wie BQ genommen werden. Die Ordinatenlinien, wie MQN, ſchneiden die BU unter dem Winkel $BQM = \omega$. Es ſey $BQ = x$;

$QM = y$, man ſucht die Gleichung zwiſchen den gegebenen und veränderlichen Größen.

Der Parameter der Parabel ſey $= a$; der Abſtand $BD = c$, ſo iſt erſtlich $AD = \frac{cc}{a}$. Man ziehe MP und QR ſenkrecht auf AX, ſo iſt $MP + QR = y \sin \omega$, und $PR = y \operatorname{cof} \omega$. Alſo iſt $MP = y \sin \omega - c$; $PD = PR - DR = y \operatorname{cof} \omega - x$. Daher iſt $AP = AD - PD = \frac{cc}{a} - y \operatorname{cof} \omega + x$. Nun iſt $a \times AP = MP^2$, folglich iſt

$$a\left(\frac{cc}{a} - y \operatorname{cof} \omega + x\right) = y^2 \sin \omega^2 - 2cy \sin \omega + cc;$$

und geordnet,

$$ax = y^2 \sin \omega^2 - (2c \sin \omega - a \operatorname{cof} \omega) y.$$

Hier hat y zwey Werthe, QM, QN, die ungleichnamig ſind, wegen des Vorzeichens von ax, wenn es auf die andere Seite gebracht wird, (Gleichung, 35.).

8. Man ſetze den Coefficienten von y, nämlich $2c \sin \omega - a \operatorname{cof} \omega = 0$, oder $\operatorname{tang} \omega = \frac{a}{2c}$, ſo iſt die Gleichung, $ax = \sin \omega^2 . y^2$, und die entgegengeſetzten Ordinaten, QM, QN, ſind ſich gleich.

9. Da $\sin \omega^2 = \frac{\operatorname{tang} \omega^2}{1 + \operatorname{tang} \omega^2} = \frac{aa}{aa + 4cc}$ iſt, ſo iſt die Gleichung, wenn die Ordinaten ſich gleich und entgegengeſetzt ſind, $\frac{aa + 4cc}{a} x = yy$.

10. Die der Axe parallele BU heißt ein Durchmeſſer (Diameter) der Parabel, in Beziehung auf die parallelen Chorden, welche ſie halbirt; und $\frac{aa + 4cc}{a}$ oder $\frac{a}{\sin \omega^2}$ heißt der Parameter zu dem Durchmeſſer BU.

Der Endpunct B heißt der Scheitel des Durchmeſſers. Man ſetze $\frac{aa + 4cc}{a} = b$, ſo iſt die Gleichung für die Coordinaten auf dem Durchmeſſer BU, $bx = yy$.

11. Jede parallele mit der Axe iſt ein Durchmeſſer, wenn der Winkel der Coordinaten dem Abſtande derſelben von der Axe gemäß genommen wird. Auch giebt es für jede parallele Chorden einen Durchmeſſer, wenn der Abſtand c dem Winkel ω gemäß beſtimmt wird.

12. Eine der Axe parallele, welche eine Chorde halbirt, halbirt alle dieſer Chorden parallelen. Denn da es für dieſe Chorden einen Durchmeſſer giebt, ſo iſt es kein anderer, als jene die gegebene Chorde halbirende.

13. Auf der über den Scheitel hinaus verlängerten Axe nehme man AT = AD, und ziehe TBt, ſo iſt dieſe den von BU halbirten Chorden parallel, und berührt die Parabel in B.

Denn da $AD = \frac{cc}{a}$ iſt, ſo iſt $DT = \frac{2cc}{a}$, und $\tang BTD = \frac{BD}{TD} = \frac{a}{2c} = \tang \omega$; alſo iſt $BTD = \omega$.

Dieſe BT berührt die Parabel in B. Denn auf derſelben fallen die zwey Durchſchnittspuncte der parallelen Chorden und der Parabel in einen Punct zuſammen. Oder, wenn BT die Parabel noch in einem Puncte außer B träfe, ſo würde die durch die Mitte der auf TBt enthaltenen Chorde mit AX parallele auch alle dieſer Chorde parallelen halbiren, welches nicht möglich iſt, da BU die halbirende iſt.

14. Aus dem Brennpuncte F ziehe man nach B die gerade FB, ſo iſt der Winkel FBT = BTF.

Denn es iſt BF = AD + AF (3.), oder BF = AT + AF = FT; alſo FBT = BTF.

15. Daher iſt auch der Winkel tBU = TBF.

16. Wenn BU einen der Strahlen vorſtellt, die auf die Parabel als eine zurückwerfende Linie einfallen, ſo wer=

den ſie alle nach dem Brennpuncte hin zurückgeworfen. Daher hat dieſer Punct ſeinen Namen bey den Neuern erhalten. Die Strahlen die F auf die Parabel fallen, werden durch die Zurückwerfung der Axe parallel.

17. Der Winkel BFX iſt $= 2\,FBT = 2\,\omega$.

18. Es iſt $BF = \frac{1}{4}b$, dem vierten Theile des Parameters zu dem Durchmeſſer BU.

Denn $BF = AF + AD = \frac{1}{4}a + \frac{cc}{a}$,

$= \frac{aa + 4cc}{4a} = \frac{1}{4}b$ (10.).

19. Man ziehe in A auf die Axe die ſenkrechte AE, welche die berührende BT in E treffen, und verbinde FE, es iſt der Winkel FET ein rechter, und FE der vierte Theil der mittlern Proportionale zwiſchen den Parametern der Axe und des Durchmeſſers BU.

Denn, weil $AD = AT$ iſt, ſo iſt $AE = \frac{1}{2}BD$ $= \frac{1}{2}c$. Ferner iſt $AT = \frac{cc}{a}$, und $AF = \frac{1}{4}a$, alſo $AT \times AF = AE^2$, oder $AT : AE = AE : AF$. Daher ſind die Dreyecke TAE, EAF ähnliche, und der W. $AEF = T$, und $AEF + AET = R$.

Hieraus iſt $EF^2 = FT \times AF = \left(\frac{1}{4}a + \frac{cc}{a}\right)\frac{a}{4}$

$= \frac{aa + 4cc}{16} = \frac{1}{16}ab$, und $EF = \frac{1}{4}\sqrt{ab}$.

Auch, wenn A einen andern Punct der Parabel bedeutet, an welchem AE die berührende iſt, ſind die Dreyecke AEF, EBF ähnliche. S. Lamberts Insigniores orbitae Cometarum proprietates, §. 7.

20. Der Halbmeſſer der Krümmung in B iſt $r = \frac{b}{2a}\sqrt{ab}$.

Denn es iſt an der Parabel, $r = (4\,AF + 4\,AD) \times \sqrt{\frac{(4\,AF + 4\,AD)}{16\,AF}}$ (Krümmungskreis, 12.). Da $b = \frac{aa + 4\,cc}{a} = \frac{aa + 4\,a \times AD}{a} = a + 4\,AD = 4\,AF + 4\,AD$, ſo iſt $r = b\sqrt{\frac{b}{4\,a}} = \frac{b}{2\,a}\sqrt{ab}$.

21. Man ziehe in B auf die berührende TBt die Normale BG, welche die Axe in G ſchneide; es iſt DG gleich dem halben Parameter.

Denn wegen der ähnlichen Dreyecke TAE, BDG iſt $AT : AE = BD : DG$, das iſt $\frac{cc}{a} : \frac{1}{2}c = c : DG$, alſo $DG = \frac{1}{2}a$.

Die Differentialgleichung giebt für die Normale an der Parabel eben den Werth unmittelbar aus ihrer Gleichung.

22. An der Parabel NAM (Fig. 136.), deren Scheitel A, Brennpunct F iſt, ſey durch F die Chorde MFN gezogen. In M und N ſeyn die berührenden MT, NT, welche ſich in T ſchneiden. Der Durchſchnittswinkel MTN iſt ein rechter, und TF iſt ſenkrecht auf MN.

Der Winkel TMF ſey $= \omega$, ſo iſt $MFX = 2\,\omega$ (17.). Da $NFX = 2\,R - 2\,\omega$ iſt, ſo iſt $TNF = R - \omega$, und der Winkel der beiden berührenden $MTN = R$.

Ferner ſind MF und NF der vierte Theil der Parameter zu den Durchmeſſern in M und N. Alſo $MF = \frac{a}{4\,\sin\omega^2}$; $NF = \frac{a}{4\,\cos\omega^2}$, und $MF : NF = \cos\omega^2 : \sin\omega^2$. Da $TM : TN = \cos\omega : \sin\omega$, ſo iſt $MF : NF = TM^2 : TN^2$. Das Perpendikel von T auf MN theilt die MN nach demſelben Verhältniſſe ein, (Dreyeck, 11.), alſo iſt TF ſenkrecht auf MN.

Die Dreyecke MFT, TFN ſind ſich ähnlich, ein beſonderer Fall des in (19.) angeführten Satzes.

23. Es ſind von einer Parabel zwey Puncte gegeben, nebſt der Richtung der Durchmeſſer an denſelben, und der Winkel der berührenden an einem der Puncte mit dem Durchmeſſer, es ſoll die Parabel beſtimmt werden.

Die geſuchte Parabel ſey BAH (Fig. 137.), die zwey gegebenen Puncte B und C, der Durchmeſſer in B ſey BU, die darauf ſenkrechte BH, die berührende BT. Da der Punct C gegeben iſt, ſo ziehe man durch denſelben die mit BT parallele CE, ſo ſind BE und CE gegebene Größen. Der Parameter zu BU ſey $= b$, ſo iſt $b = \frac{CE^2}{BE}$ (10.). Der Winkel der berührenden mit dem Durchmeſſer ſey $= \omega$, und a der Parameter der Parabel oder der zu der Axe AG gehörige, ſo iſt $b \,.\, \sin\omega^2 = a$ (10.). Der Abſtand BG des Punctes B von der Axe AG ſey $= c$, ſo iſt $c = \frac{a}{2 \tang \omega}$ (13.), oder $BG = \frac{1}{4} b \sin 2\omega$, und $AG = \frac{cc}{a} = \frac{a}{4 \tang \omega^2} = \frac{1}{4} b \cos\omega^2$.

24. Der Punct C kann auch durch ſeine Lage gegen die BH gegeben ſeyn, wie es der Fall beym Bombenwerfen iſt, wo BH eine horizontale Linie iſt. Man ziehe CK parallel mit BH, ſo iſt $a \times AK = CK^2$, das iſt $a\,(AG - DC) = (BG - BD)^2$, oder $a \times AG - a \times DC = BG^2 - 2\,BG \times BD + BD^2$. Da $BG^2 = a \times AG$, ſo bleibt $BD^2 - 2\,BG \times BD + a \times DC = 0$, oder $BD^2 - 2\,BG \times BD + \frac{BG^2}{AG} DC = 0$. Man verlängere AG bis an die berührende, ſo iſt (die in der Figur nicht vollendete) $GT = BG \,.\, \cot\omega$, und $GT = 2\,AG$, alſo $AG = \frac{1}{2} BG \,.\, \cot\omega$. Dieſen Werth von AG in jene Gleichung geſetzt, wird ſie

$$BD^2 - 2\,BG \times BD + 2\,BG \times DC \,.\, \tang\omega = 0.$$

Alſo iſt $BG = \frac{BD^2}{2(BD - DC \,.\, \tang \omega)}$,

und $AG = \frac{BD^2 \,.\, \cot \omega}{4(BD - DC \,.\, \tang \omega)}$.

Die mit der berührenden parallele CE ſchneide die BD in L, und die auf BH ſenkrechte CD ſchneide die berührende in M, ſo iſt $BL = BD - CD \,.\, \tang \omega$, und $BD \,.\, \cot \omega = DM$. Alſo iſt

$$BG = \frac{BD^2}{2BL}; \quad AG = \frac{BD \,.\, DM}{4BL}.$$

25. Eine berührende BM (Fig. 137.) ſchneidet auf der durch einen Punct C der Parabel mit der Axe parallelen DCM ein Stück CM ab, welches ſich verhält wie das Quadrat von BM zwiſchen dem Berührungspuncte und der DCM. — Denn es iſt BM = CE und CM = BE. Da das Rechteck von BE mit dem Parameter zu dem Durchmeſſer BU dem Quadrate von EC gleich iſt, ſo verhält ſich BE wie das Quadrat von EC, d. i. MC wie das Quadrat von BM.

Daher iſt bey der Bewegung eines nach der Richtung BM geworfenen Körpers im leeren Raume MC der Weg durch die Wirkung der Schwerkraft, wenn BM der Weg durch die in B ertheilte Geſchwindigkeit iſt.

26. Es ſey BA (Fig. 138.) ein Bogen einer Parabel, BM eine berührende in B, MC, NO parallel mit der Axe durch die Puncte C, O der Parabel, und NO ſchneide die Chorde BC in P; es iſt NO : PO = BP : CP.

Denn es iſt $MC : NO = BM^2 : BN^2 = MC^2 : NP^2$. Daher iſt $MC : NP = NP : NO$, oder $BC : BP = NP : NO$, und daraus $PC : BP = PO : NO$. Archimedes gebraucht dieſen Satz zu ſeiner Quadratur der Parabel, wovon in dem Artikel, Exhauſtions-Methode, Nachricht ertheilt iſt.

27. Es ſey NBM (Fig. 139.) eine Parabel, in welcher Bb ein Durchmeſſer, MQN eine Chorde, die

von B b in Q halbirt wird. Der Parameter zu B b ſey B C, ſo iſt $BC \times BQ = QM^2$. Man ziehe B M, und mache den Winkel $BCP = BQM$; und $CBP = QMB$, ſo ſind die Dreyecke B Q M und P C B einander ähnlich, daher $BQ : QM = CP : CB$, und $BC \times BQ = QM \times CP$. Es iſt alſo $CP = QM$, und P M parallel mit C B, da die Abſtände der Puncte P und M von der geraden C B gleich groß ſind.

Der Winkel P B M iſt unveränderlich, und gleich dem Ordinatenwinkel B Q M. Denn es iſt das Complement deſſelben zu zwey Rechten die Summe der Winkel P B C, M B Q oder $QMB + MBQ$. Dieſe Summe iſt auch das Complement von B Q M, alſo iſt $PBM = BQM$.

28. Hieraus folgt eine organiſche Beſchreibung einer Parabel, von welcher ein Punct mit der Lage des zugehörigen Durchmeſſers, dem Parameter und dem Ordinatenwinkel gegeben ſind. — Es ſey (Fig. 139.) B b der Durchmeſſer, B der Scheitel, B C der Parameter auf der verlängerten B b. Man mache die Winkel C B D und B C P dem Ordinatenwinkel gleich, und laſſe den Winkel C B D ſich um den Scheitelpunct B drehen. Durch irgend einen Punct, wo der unbeſtimmt lange Schenkel BP in der Lage P B M jenes Winkels die CP ſchneidet, ziehe man P M parallel mit C B, ſo iſt der Punct, wo dieſe den andern Schenkel ſchneidet, ein Punct der Parabel.

Iſt P M ein Lineal, welches genöthigt iſt, ſich parallel mit B C zu bewegen, und geht der eine Schenkel des gegebenen Winkels durch den Durchſchnitt des Lineals (oder deſſen Schärfe) mit C P, ſo iſt der Durchſchnitt des andern Schenkels mit dem Lineal ein Punct der Parabel.

Die gerade P C p heißt die Directrix, nämlich für die Bewegung der geraden P M und des Schenkels B P.

29. Eine ſehr einfache Art, die Parabel zu beſchreiben, giebt der Satz (3.) an die Hand. Da $FM = AF + AP$ (Fig. 134.) iſt, ſo trage man A F (den vierten Theil des Parameters) auf die andere Seite von A nach G, und beſchreibe aus F mit dem Halbmeſſer G P

einen Kreisbogen; dieſer ſchneidet die in P auf AP ſenkrechte PM in einem zu der Parabel gehörigen Puncte M.

Oder man nehme ein Winkelmaß GHN, an welchem in N ein Faden von der Länge HN befeſtigt iſt. Das andere Ende des Fadens ſey in dem Brennpuncte befeſtigt. Indem man den Schenkel GH an der auf GAP ſenkrechten GHh ſich hin bewegen läßt, ſpanne man mit einem hart an den Schenkel HN gehaltenen Stifte den Faden, ſo beſchreibt der Stift eine Parabel.

30. Aus den beiden Sätzen (14, 19) folgt auch eine bequeme Conſtruction der Parabel. In dem Scheitel der Parabel (Fig. 135.) errichte man eine auf die Axe ſenkrechte Ae, ziehe an dieſe aus dem Brennpuncte F irgend eine FE, ſetze auf dieſe eine ſenkrechte TEB, welche die Axe in T ſchneide, nehme EB = ET, ſo iſt B ein Punct der Parabel, und zugleich iſt EB eine berührende, wodurch die Zeichnung leichter und genauer wird.

31. Zwey gegebene Winkel, NAP, NBP, (Fig. 140.) drehen ſich um ihre Scheitelpuncte ſo, daß der Durchſchnitt zweyer ihrer Schenkel AN, BN ſich auf einer gegebenen geraden CD befindet: es wird gefragt, was der Durchſchnittspunct P der andern beiden Schenkel für eine Linie beſchreibe.

Die gerade AB ſchneide die gegebene gerade in C. Von N und P ziehe man die ſenkrechten NO und PQ auf AB, die als Ordinaten zu den Puncten N und P gehören. Um beide Ordinaten mit einander zu verbinden, ſuche man ſich ähnliche Dreyecke zu verſchaffen. Man mache den Winkel APR = NAM, und ANM = PAM, ſo ſind die Dreyecke PAR und ANM ſich ähnlich, und die Winkel PRB, NMB ſind jeder = NAP. Auf gleiche Weiſe mache man den W. BPS = NBL, und BNL = PBS, ſo ſind die Dreyecke PBS und BNL ſich ähnlich, und die Winkel PSA, NLA ſind jeder = NBP. In dieſen Dreyecken iſt

$$AR : PR = NM : AM;$$
$$BS : PS = NL : BL.$$

Man ſetze AQ = x; PQ = y; NO = z, ſo ſind durch dieſe und den gegebenen Winkel PRQ oder NMS die Linien QR, PR, AR, MO, NM gegeben. Durch die ähnlichen Dreyecke wird AM beſtimmt, und da durch den W. BCN auch CO mittelſt NO gegeben wird, ſo wird ein Werth von der gegebenen AC durch x, y, z erhalten. Auf gleiche Weiſe wird ein ſolcher Werth für CB durch QS, PS, BS, LO, NL erhalten. Aus den Werthen von CA und CB wird der Werth von NO oder z weggeſchafft, worauf eine Gleichung zwiſchen x und y hervorgeht.

Es ſey AB = a; CB = b; NAP = α; NBP = β; ACN = γ; ſo iſt $QR = y \cot \alpha$; $PR = \frac{y}{\sin \alpha}$;

$AR = x - y \cot \alpha = \frac{x \sin \alpha - y \cos \alpha}{\sin \alpha}$; $MO =$

$z \cot \alpha = \frac{z \cos \alpha}{\sin \alpha}$; $NM = \frac{z}{\sin \alpha}$; und aus der erſten der

obigen Proportionen, $AM = \frac{zy}{(x \sin \alpha - y \cos \alpha) \sin \alpha}$;

ferner $CO = z \cot \gamma = \frac{z \cos \gamma}{\sin \gamma}$. Nun iſt AC = AM + MO + OC, das iſt,

$$a + b = \frac{zy}{(x \sin \alpha - y \cos \alpha) \sin \alpha} + \frac{z \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{z \cos \gamma}{\sin \gamma}$$
$$= \frac{(z x \cos \alpha + y \sin \alpha)}{x \sin \alpha - y \cos \alpha} + \frac{z \cos \gamma}{\sin \gamma}$$
$$= \frac{x \sin (\alpha + \gamma) - y \cos (\alpha + \gamma)}{x \sin \alpha - y \cos \alpha} \cdot \frac{z}{\sin \gamma}.$$

Auf gleiche Art iſt $QS = y \cot \beta$; $PS = \frac{y}{\sin \beta}$;

$BS = a - x - y \cot \beta = \frac{(a - x) \sin \beta - y \cos \beta}{\sin \beta}$;

$LO = z \cot\beta = \frac{z \cos\beta}{\sin\beta}$; $NL = \frac{z}{\sin\beta}$; und durch die zweyten der obigen Proportionen,

$BL = \frac{zy}{((a-x)\sin\beta - y\cos\beta)\sin\beta}$. Nun iſt

$CB = CO - LO - BL$, das iſt

$$b = \frac{z\cos\gamma}{\sin\gamma} - \frac{z\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{zy}{((a-x)\sin\beta - y\cos\beta)\sin\beta}$$

$$= \frac{z\cos\gamma}{\sin\gamma} - \frac{z((a-x)\cos\beta + y\sin\beta}{(a-x)\sin\beta - y\cos\beta}$$

$$= \frac{(a-x)\sin(\beta-\gamma) - y\cos(\beta-\gamma)}{(a-x)\sin\beta - y\cos\beta} \cdot \frac{z}{\sin\gamma}.$$

Dieſer Werth von b entſteht aus dem von a + b, wenn $360° - \beta$ ſtatt α, und $-(a-x)$ ſtatt x geſetzt werden, da der Winkel PBN eine dem W. PAN entgegengeſetzte Lage hat, ſo wie BQ in Beziehung auf AQ.

Aus den beiden Gleichungen folgt nun

$$\frac{(a+b)(x\sin\alpha - y\cos\alpha)}{x\sin(\alpha+\gamma) - y\cos(\alpha+\gamma)} = \frac{b((a-x)\sin\beta - y\cos\beta)}{(a-x)\sin(\beta-\gamma) - y\cos(\beta-\gamma)}.$$

Entwickelt man dieſe Gleichung, ſo entſteht daraus eine Gleichung vom zweyten Grade zwiſchen x und y. Der Ort des Punctes P iſt daher ein Kegelſchnitt. Sollten die Glieder, welche x^2 und y^2 enthalten, wegfallen, ſo iſt der Ort eine gerade Linie.

32. Die Conſtruction zur Auflöſung dieſer Aufgabe iſt aus Maclaurins Geometria organica, Prop. 1. genommen; die Rechnung iſt aber abgeändert, und die Gleichung hat eine bequemere Form durch die Zuſammenziehung der Winkel erhalten. Newton hat in ſeiner Arithmetica universali, Probl. 57. eine andre Conſtruction angegeben, wodurch er zu einer viel einfachern Gleichung, als die obige iſt, gelangt. Eine Erläuterung mag ſie bedürfen, welche man in Caſtillions Ausgabe, Amstel. 1761,

findet. Ich habe jene erſtere hier mitgetheilt, da ſie in einem ſeltenen Buche enthalten iſt. Newton erhält ſeine Auflöſung auch durch Einführung ähnlicher Drenecke. Zu Coordinaten nimmt er nicht, wie hier geſchehen iſt, rechtwinklichte, ſondern andere, die den Winkel $\beta - \gamma$ mit einander machen.

33. In der oben (19.) angeführten Schrift von Lambert ſind noch manche merkwürdige Eigenſchaften der Parabel entwickelt, beſonders in Abſicht der berührenden und des Inhalts paraboliſcher Sectoren und Segmente, von welchen die Anwendung auf paraboliſche Bahnen der Kometen gemacht wird.

Parabeln höherer Art, die einige auch **Paraboloiden** nennen, ſind Curven, deren allgemeine Gleichung iſt $a^m x^n = y^{m+n}$. Die Geſtalten dieſer krummen Linien ſind von dreyerley Art. Erſtlich, iſt $m + n$ gerade, und n ungerade, ſo ſind für jedes poſitive x zwey gleiche und entgegengeſetzte y, wie bey der gewöhnlichen Parabel, welche ſelbſt unter dieſen Fall gehört. Zweytens, iſt $m+n$ ungerade, und n auch, ſo iſt für ein poſitives x auch nur ein mögliches poſitives y, und für ein negatives x nur ein mögliches negatives y. Drittens, ſind beide $m + n$ und n gerade, z. B. $a^2 x^2 = y^4$, ſo ſind für poſitive wie für negative x ſowol poſitive als negative y möglich. In der That aber gehört die Gleichung für ein Syſtem zweyer Curven, für welche die Gleichungen ſind $y^2 = + ax$ und $y^2 = - ax$, da y^2 beide Werthe haben kann. Sie gehört für zwey apolloniſche Parabeln, deren Axen ſich entgegengeſetzt ſind, und einen gemeinſchaftlichen Scheitel haben.

Die Parabeln von der Form $a^{m-1} x = y^m$ nennt man eine **quadratiſche**, wenn $m = 2$ iſt, eine **cubiſche**, wenn $m = 3$; eine **biquadratiſche** oder **ſurſolide**, wenn $m = 4$ iſt, u. ſ. f.

Eine merkwürdige höhere Parabel iſt diejenige, deren Gleichung iſt $y^3 = a x^2$. Man nennt ſie **Parabola**

cubicalis ſecunda, auch Paraboloides ſemicubicalis. Es iſt diejenige, die unter allen Curven zuerſt rectificirt iſt, faſt zu gleicher Zeit von Neil, Heuraet und Fermat. Montucla, T II. p. 150 etc. Wallisii Operum T.I. p. 350; 551; 563. Hugenii Horol. oscill. P. III. prop. 9. Sie iſt die Evolute der Parabel. S. Evolution, 6. Sie iſt auch diejenige, auf welcher ein ſchwerer beweglicher Punct in gleichen Zeittheilen gleich tief (nach der lothrechten) fällt, oder die curva descensus aequabilis. Auch kommt ſie bey einer geometriſchen Frage, die Parabel und die ſie berührenden Kreiſe betreffend, vor, ſ. Anwendung der Geometrie ꝛc. Th. I. S. 136. Tab. II. Fig. 24. Sie hat nur poſitive Ordinaten für poſitive, wie für negative x. Sie iſt gegen die Axe der x concav. Denn aus der Gleichung $y^3 = ax^2$ folgt $3y^2 \partial y = 2ax\partial x$, und daraus $6y\partial y^2 + 3y^2\partial^2 y = 2a\partial x^2$, wenn ∂x unveränderlich iſt. Die erſtere Differentialgleichung giebt $9y^4\partial y^2 = 4a^2x^2dx^2$, das iſt $9y\partial y^2 = 4a\partial x^2$, wodurch die zweyte wird, $3y^2\partial^2 y = -\frac{2}{3}a\partial x^2$. Dieſes zeigt an, daß die Curve gegen die Abſciſſenlinie concav iſt, ſ. Concav und Convex, 11. Die Curve hat daher eine Spitze in dem Anfangspuncte der Abſciſſen, wo die gegen einander convexen beiden Zweige zuſammenſtoßen. S. krumme Linien der zweyten Claſſe, 63.

Von dieſen höhern Parabeln wird bey der Vergleichung unendlich großer oder kleiner Krümmungen Gebrauch gemacht, ſ. Krümmungskreis, 38. ff. An der ſemicubiſchen Parabel iſt der Quotient $\frac{y^2}{x}$, welchem der Halbmeſſer der Krümmung an der Spitze für unendlich kleine x und y proportional iſt, oder $\frac{y^3}{xy} = \frac{ax}{y} = a\sqrt{\frac{y}{a}}$, alſo unendlich klein, oder die Krümmung iſt unendlich groß.

Die Carteſiſche Parabel nennt Newton eine von Descartes zur Conſtruction der beſtimmten Gleichungen vom fünften und ſechſten Grade gebrauchten Curve, deren Gleichung iſt $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Sie hat zwey hyperboliſche und zwey convergirende paraboliſche Zweige, ſ. krumme Linien der zweyten Claſſe, 64.

Divergirende Parabeln nennt Newton die Curven, deren Gleichung iſt $yy = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Die berührenden divergiren immer mehr, je länger der Bogen genommen wird. Die ſemicubiſche Parabel iſt eine Gattung derſelben.

Paraboliſche Curven heißen diejenigen, deren Gleichung iſt $y = a + bx + cx^2 \ldots mx^m$, wo die Anzahl der Glieder unbeſtimmt iſt. Man ſtellt dadurch irgend einen Bogen einer jeden Curve mehr oder weniger genau auf eine einfachere Art dar, wie den Werth von y aus einer Gleichung zwiſchen x und y durch eine Interpolationsformel.

Paraboliſch iſt was irgend eine Beziehung auf eine Parabel hat.

Paraboliſche Aſymptote, ſ. Aſymptote, Th. I. S. 223.

Paraboliſche Conchoide, ſ. Conchoide, Th. I. S. 541.

Paraboliſcher hufförmiger Abſchnitt iſt in einem paraboliſchen Konoid ein Abſchnitt zwiſchen einem Theile der Grundfläche, einer ſchneidenden Ebene und einem Theile der Oberfläche. Die Berechnung geſchieht auf eine ähnliche Art wie an einem ſolchen Abſchnitte eines Cylinders oder Kegels, ſ. hufförmiger Abſchnitt.

Paraboliſches Konoid, ein Körper, der durch die Umdrehung einer Parabel um ihre Axe entſteht, ſ. Konoid.

Paraboliſches Pyramidoid iſt eine krummflächige Pyramide, deren auf die Axe ſenkrechte Durchſchnitte ähnliche Figuren ſind, die in Abſicht auf den Flächen-Inhalt ſich wie die Längen der Axe von dem Scheitel an verhalten. Wallis hat dieſen Körper betrachtet, de sectionibus Conicis, Opp. T. I. p. 307. Der Inhalt

eines ſolchen Körpers iſt halb ſo groß als eines Prisma über derſelben Grundfläche mit derſelben Höhe.

Paraboliſche Spindel oder Linſe iſt ein Körper, der durch die Umdrehung einer Parabel um eine auf die Axe ſenkrechte Chorde entſteht. Der Körper iſt $\frac{8}{15}$ des Cylinders, der dieſelben Dimenſionen hat, ſ. Cubirung.

Paraboliſche Spirale, ſ. Spirale.

Parabolismus iſt eines von den vielen algebraiſchen Kunſtwörtern des Vieta, welches anzeigt, daß der gegebene Coefficient des höchſten Gliedes in einer Gleichung mittelſt der Diviſion aller Glieder durch denſelben weggeſchafft werden ſoll.

Parallelen, gerade, ſind gerade in einer Ebene befindliche Linien, die nicht zuſammen kommen, ſo weit ſie auch nach beiden Gegenden hin verlängert werden. — Oder: Parallelen ſind gerade in einer Ebene befindliche Linien, deren Puncte alle von der andern Linie gleichen Abſtand haben, welcher entweder nach einer ſenkrechten, oder nach einer unter einem gegebenen Winkel gezogenen, gemeſſen wird. — Oder es ſind gerade in derſelben Ebene, welche von einer dritten unter demſelben Winkel, nach derſelben Gegend hin, geſchnitten werden.

Man kann jeden dieſer Begriffe zum Grunde legen, ſo werden die beiden andern Folgerungen. Es kommt darauf an, welcher von ihnen die bündigſte Beweisart gewährt. S. Erklärung. Die zuerſt angegebene Erklärung iſt die von Euklides gewählte.

1. Die Eigenſchaften der Parallelen betreffen die Winkel, welche ſie mit einer ſie ſchneidenden machen. An jeder von zwey parallelen geraden entſtehen dadurch vier Winkel, welche man durch die Benennungen, äußere und innere, unterſcheidet. Die auf entgegengeſetzten Seiten der ſchneidenden an der einen und an der andern parallelen liegenden innern Winkel heißen Wechſelswinkel. Die beiden an einerley Seite liegenden innern Winkel zuſammen ſind zwey rechten gleich; die Wechſelswinkel ſind ſich gleich;

und jeder innere Winkel iſt dem ihm an derſelben Seite gegenüber liegenden äußern gleich. Umgekehrt, wenn eine dieſer Beſchaffenheiten der Winkel angenommen wird, oder erwieſen iſt, ſo ſind die beiden geraden an der ſchneidenden parallel. Jede derſelben hat die beiden andern zur Folge.

2. Es iſt bekannt, daß die Lehre von den Parallellinien Schwierigkeit macht, welches in der That merkwürdig iſt, da ſie zu den erſten Elementen der Geometrie gehört. Man könnte glauben, daß die ganze Wiſſenſchaft durch einen unſichern Grund gefährdet würde. So vielerley Verſuche gemacht ſind, die Begründung der Geometrie in Rückſicht der Parallelen ganz vollkommen zu machen, iſt doch bey jedem noch etwas zu erinnern geweſen. Ich habe in einer zu Göttingen im J. 1763, unter des ſel. Käſtners Aufſicht ausgearbeiteten akademiſchen Schrift acht und zwanzig mehr oder weniger verſchiedene Beweisarten angeführt und beurtheilt. Seit der Zeit ſind noch viele Verſuche, zum Theil von angeſehenen Mathematikern, erſchienen, um allen Anſtoß beym Eintritt in die Geometrie wegzuſchaffen. Hoffmann, Profeſſor der Phyſik zu Aſchaffenburg, hat den Anfang zu einer neuen Sammlung und Beurtheilung der verſchiedenen Theorieen von den Parallelen gemacht. Kritik der Parallel-Theorie. Erſter Theil. Jena 1807. Darin ſind ſiebzehn Syſteme dargeſtellt und beurtheilt. Sie hätten nur ſollen, nach der Verſchiedenheit der Begriffe, von welchen die Urheber ausgiengen, und in jeder Abtheilung nach der Zeitfolge geordnet werden. Sie ſind zu ſehr durch einander geworfen.

Es würde viel zu weitläufig und auch unnöthig ſeyn, die vielen Beweisarten anzuführen und zu beurtheilen. Meine Abſicht bey dieſem Artikel iſt nur, zu zeigen, worauf es bey jeder der drey angeführten Erklärungen ankommt, oder, wie man es jetzt gern nennt, eine Kritik der Lehre von den Parallelen zu liefern. Man wird ſehen, daß die Natur der Parallelen ganz unmittelbar mit der Natur der geraden Linie verbunden iſt, und daß die

Sicherheit der Geometrie nicht dadurch leidet, wenn ein Satz über die Lage nicht auf ſolche Art, wie Sätze über die Gleichheit, erwieſen werden kann.

3. Euklides beweiſet im 16ten Satze des 1. Buches vollkommen ſtreng, daß in jedem Dreyeck, wenn eine ſeiner Seiten verlängert wird, der äußere Winkel größer als jeder der ihm gegenüber liegenden innern Winkel iſt. Daraus folgen der 27ſte und 28ſte Satz: wenn zwey gerade Linien von einer dritten ſo geſchnitten werden, daß die Wechſelswinkel gleich ſind, oder daß der äußere Winkel dem ihm an derſelben Seite gegenüber liegenden innern Winkel gleich iſt, oder daß die beiden innern an einer Seite liegenden Winkel zwey rechte ausmachen, ſo ſind ſie parallel. Daß es alſo Parallelen zufolge der Erklärung giebt, iſt erwieſen. — Nun iſt der umgekehrte Satz zu erweiſen, nämlich, wenn zwey gerade parallel ſind (ſich nicht ſchneiden), ſo ſeyn der äußere und der gegenüber liegende innere Winkel einander gleich. Hier entſteht die Frage, iſt das Nichtſchneiden nothwendig mit einer Gleichheit der gedachten Winkel verbunden? Oder, hat die Ungleichheit dieſer Winkel nothwendig das Schneiden zur Folge? Euklides nimmt dieſes als Grundſatz an. Es iſt der als ſolcher häufig angefochtene eilfte im 1. Buche. Zwey gerade Linien AB, CD, (Fig. 141.), welche von einer dritten EF ſo geſchnitten werden, daß die beiden innern an einerley Seite liegenden Winkel, BGF, DHE, kleiner als zwey rechte ſind, treffen, genugſam verlängert an eben der Seite zuſammen. — Der Satz kann auch ſo ausgedruckt werden: wenn der äußere Winkel DHF größer iſt, als der innere entgegengeſetzte BGF, ſo ſchneiden ſich die beiden HD, GB. Denn dadurch ſind die beiden innern kleiner als zwey rechte. Iſt der äußere Winkel, wie CHF kleiner als der innere AGF, ſo ſind die beiden innern, AGF + CHG, größer als zwey rechte, und die innern auf der andern Seite ſind kleiner als zwey rechte. Euklides hat jene Form für ſeinen Grundſatz gewählt, weil ſie ihm zu ſeinen Beweiſen bequemer ſeyn mochte.

4. Allerdings kann man dem Satze die Stelle unter den Grundſätzen ſtreitig machen. Doch konnte Euklides auch nicht ihn in die Reihe anderer ſcharf erwieſenen Sätze bringen. Er hat ihn alſo, um einen Ausdruck aus der Kantiſchen Philoſophie zu borgen, als einen ſynthetiſchen Satz a priori unter die Grundſätze geſtellt. Der Satz enthält eine Eigenſchaft der geraden Linie, welche ſie von den krummen unterſcheidet, ob man gleich ſie nicht aus der Natur derſelben durch eine Verbindung mit andern Sätzen herleiten kann, weil ſie unmittelbar in ihr liegt. Proklus ſetzt den Grundſatz unter die **Postulata** (αιτηματα).

5. Der Grundſatz iſt eigentlich der umgekehrte des 16ten Satzes. Man drücke den letztern ſo aus: wenn zwey ſich ſchneidende gerade von einer dritten geſchnitten werden, ſo iſt der äußere Winkel an der ſchneidenden Linie größer als der innere entgegengeſetzte an eben dieſer Seite. Dieſes iſt richtig für jeden Winkel der ſich ſchneidenden Linien, und für jede Lage der dritten ſie beide ſchneidenden, es ſey in Abſicht auf die Winkel oder in Abſicht auf den Abſtand von dem Durchſchnittspuncte jener. Daher darf man den Satz auch umkehren. Wollte man ihn nicht allgemein umkehren, ſo brächte man Beſtimmungen hinein, die in dem 16ten Satze gar nicht vorhanden ſind, d. i. man machte das Schneiden der beiden Linien von der Lage der dritten abhängig. So würde der Grundſatz gleich nach dem 16ten Satze, als deſſen umgekehrter, zu ſetzen, und nur die Form beider ſo zu ändern ſeyn, wie es hier geſchehen iſt.

6. Einen Beweis des Euklidiſchen Grundſatzes oder jenes umgekehrten möchte man auf folgende Art geben können. Durch die Puncte A, B der AE (Fig. 142.) ſeyn die AC, BD gezogen, ſo daß der W. CAE kleiner als DBE iſt. Man ziehe auch noch GA unter dem W. GAE = DBE. Schneidet die AC die BD nicht, ſo giebt es doch gerade durch A, welche die BD treffen, ſo viele als man auf BD Puncte nehmen kann. Läßt man nun AC ſich um A nach AB hin drehen, ſo muß es eine

Lage AF geben, in welcher der Übergang vom Nichtſchneiden zum Schneiden geſchieht, ſo daß AF die letzte der Nichtſchneidenden und die erſte der Schneidenden iſt, beides alſo, Schneiden und Nichtſchneiden, mit einander vereinigt. Wie man dieſes mit den Begriffen von der Lage zweyer geraden vereinigen möge, iſt durchaus nicht einzuſehen, da dieſe ſich entweder in einem Puncte ſchneiden, oder ganz außer einander liegen. Die beiden AF, BD müßten in einer unendlichen Entfernung über einander hin liegen. Derjenige, welcher den Grundſatz nicht zugeben wollte, müßte dieſes unbegreifliche Beyſammenſeyn zweyer geraden begreiflich machen. Es wird ihm der Beweis zugeſchoben.

7. Von der geraden AG, welche mit AE den W. GAE = DBE macht, darf man nicht ſagen, daß ſie die BD in einer unendlichen Entfernung ſchneide, oder daß ſie den Übergang vom Schneiden zum Nichtſchneiden mache. Dies würde auf die dabey undeutlich gedachte Vorſtellung führen, daß ſich zwey gerade, zwar erſt in einer unendlichen Entfernung, aber doch mit einander vermiſchen könnten. Die gerade AG liegt ganz außer der BD. Sie muß ſich, immer mit demſelben Winkel GAE oder DBE, an AC fortbewegen, bis ſie in B auf einmahl ganz in BD fällt. Wenn aber außer der AG noch eine AC gedacht wird, welche die BD nicht trifft, ſo iſt man genöthigt, eine Folge von ſolchen nicht ſchneidenden anzunehmen, die ſich im Unendlichen der BD immer mehr nähern, bis zu einer AF, welche zuerſt ſie erreicht, ohne ſie doch ſchon zu ſchneiden.

8. Der Beweis oder die Erläuterung, welche Käſtner in ſeiner Geometrie, Satz 11. Zuſ. 5. 6. dem Euklidiſchen Grundſatze voran ſchickt, läßt ſich durch eine ähnliche Bemerkung, wie in (5.) ergänzen.

Es ſey der W. GAE = DBE (Fig. 142.), und die unbeſtimmte AC liege, wenn es möglich iſt, ganz außer der BD. Man laſſe die AC auf AE immer unter demſelben Winkel CAE fortrücken, ſo muß ſie in eine Lage kommen, in welcher ſie BD ſchneidet. Nun muß

es zwiſchen den Lagen, worin ſie die B D nicht ſchneidet, und worin ſie dieſelbe trifft, eine geben, bey welcher der Übergang vom Schneiden zum Nichtſchneiden geſchieht. Hier müßte jene Linie ſich mit der B D vermiſchen. Auf dieſen Übergang und das unbegreifliche Zuſammenſeyn von Schneiden und Nichtſchneiden kommt es bey dieſem indirecten Beweiſe an. Denn ſonſt möchte man ſich es als möglich gedenken, daß bey der Fortrückung von B nach A hin der Durchſchnittspunct auf B D ſchneller fortrückte, als der Endpunct der bewegten Linie auf B A, daher jener unendlich weit gekommen ſeyn könnte, ehe dieſer den Punct A erreicht hätte.

9. Könnte man erweiſen, daß die gerade, welche bey ihrem Fortrücken auf B A von B nach A hin immer denſelben Winkel C A E, der kleiner als D B E iſt, mit A E macht, auch die B D immer unter einem unveränderlichen Winkel ſchneidet, ſo wäre der Euklidiſche Grundſatz dadurch erwieſen. Denn bey jedem Durchſchnittspuncte mit B D befände ſie ſich in derſelben Lage gegen dieſe Linie, wie ſie in B war, und käme nie ganz auf der einen Seite derſelben zu liegen, ſo weit ſie auch von B in der Richtung B A fortrückte. Bey der Anwendung der dritten Erklärung der Parallelen wird ſich dieſes noch beſſer zeigen.

10. Da die Euklidiſche Geometrie zu der gewünſchten Begründung der Theorie der Parallelen nicht zureicht, ſo iſt aus der Lehre vom Unendlichen ein Beweis vorgeſchlagen, von dem Hofprediger Schulz in Königsberg, in einer daſelbſt 1784 herausgegebenen Schrift: Entdeckte Theorie der Parallelen, nebſt einer Unterſuchung über den Urſprung ihrer bisherigen Schwierigkeit. Allein auch dieſe fand Einwendungen, weswegen der Verfaſſer in einem Nachtrage: Darſtellung der vollkommenen Evidenz und Schärfe ſeiner Theorie der Parallelen, Königsberg, 1786, den Beweis zu ſchärfen ſuchte. Der Beweis iſt zwar nicht für die Anfangsgründe geeignet, aber doch ſinnreich, und gewährt demjenigen, der mit den Begriffen vom Unendlichen bekannt iſt, wenn auch keine Beſtätigung, doch eine neue Anſicht der elementariſchen Lehre von den Par-

allelen aus einem höhern Standpuncte. Da der Urheber dieſer Theorie ſie zu weitläufig vorgetragen hat, und dabey noch eine Verbeſſerung Statt haben mag, ſo werde ich ſie ganz kurz hier darſtellen.

11. Die unbegränzte Fläche zwiſchen den Schenkeln eines Winkels verhält ſich zu der ganzen unbegränzten Ebene rings um den Scheitelpunct wie der Winkel zu vier rechten. Hingegen (dieſes füge ich noch hinzu) ein Streifen zwiſchen zwey parallelen geraden Linien kann mit der unbegränzten Ebene, worin ſie liegen, nicht verglichen werden, ſondern verhält ſich zu derſelben wie Null zu einer endlichen Größe.

Nun ſeyn AB, CD (Fig. 141.) zwey gerade, welche von der EF unter ungleichen Winkeln BGF, DHF geſchnitten werden. Man mache den W. KHF = BGF, ſo iſt die Winkelfläche DHK, die unbegränzte, mit der unbegränzten Ebene der Figur vergleichbar, aber der unbegränzte Parallelſtreifen BGHK nicht, alſo iſt letzterer gegen jenen wie o zu 1, und die Winkelfläche DHK iſt größer als der Streifen. Daher müſſen ſich HD und GB ſchneiden. Denn ſonſt wäre der Streifen größer als die Winkelfläche.

12. Der Verfaſſer hatte in ſeiner erſten Schrift auf den Unterſchied des geometriſchen und arithmetiſchen Verhältniſſes zweyer unendlich großen Größen nicht Rückſicht genommen. Wenn dieſe um eine endliche Größe verſchieden ſind, ſo iſt ihr geometriſches Verhältniß doch das der Gleichheit. Er ſagte, die unendlichen Winkelflächen BGF, KHF ſind gleich, ohne auf ihren Unterſchied, den unendlichen Streifen BGHK, zu achten. Das war es auch, was Einwendungen veranlaßte, und ganz gegründete, weil bey dieſer Beweisart das zu beweiſende wirklich angenommen ward. Denn es iſt, die unbegränzten Flächen verſtanden, BGF = KHF + BGHK = DHF — DHK + BGHK. Nun muß dargethan werden, daß DHK unvergleichbar groß iſt gegen den Streifen BGHK. Statt deſſen will Schulz auch in ſeiner zweyten Schrift darthun, daß die Winkelfläche BGF der KHF gleich iſt,

da ſie doch offenbar um den Streifen B G H K unterſchieden ſind. Wer den Euklidiſchen Grundſatz leugnet, hält ſich an dieſen Unterſchied, und mag behaupten, daß D H K kleiner als B G H K ſey, wie es bey endlichen Flächen in der That bis zu einer gewiſſen Ausdehnung wahr iſt.

Zweyte Theorie der Parallelen.

13. Da der von Euklides aufgeſtellte Grundſatz nicht augenſcheinlich genug war, oder befriedigend dargethan werden konnte, ſo ſuchte man durch eine veränderte Definition zu helfen; allein man verſteckte die Schwierigkeit mehr, als daß man ſie umgangen wäre. Parallelen nennen mehrere ſolche gerade Linien, die in allen Puncten gleichen Abſtand von einander haben, da nämlich der Abſtand durch die ſenkrechte von irgend einem Puncte der einen auf die andere gemeſſen wird. Die Benennung, Parallelen, παραλληλαι, neben einander liegende oder laufende, bezieht ſich darauf, ſo daß die alten Geometer bey dem Kunſtworte mehr auf den gemeinen Augenſchein als auf ihren damit verbundenen Begriff ſahen.

14. In dieſer Erklärung liegt ein Satz verſteckt, der, daß die Linie, welche durch die Endpuncte aller auf eine gerade Linie geſetzten, gleich großen, Perpendikel, geht, eine gerade ſey. Es ſind vielleicht nur zwey Schriftſteller, welche dieſen Satz zu erweiſen nöthig gefunden haben, ein Italiener, Vitale Giordano da Vitonto in ſeinem Euclide restituto, Rom 1680, und Fr. Gottl. Hanke in einer Diſſertation, Leipzig 1751. Clavius in ſeinem Commentar über Euklids Elemente nimmt jenen Satz als ein Axiom an, dem er nur eine Erklärung beyfügt. Wolf ſetzt in ſeinen lateiniſchen Elementen die Erklärung hin, ohne ihre Möglichkeit in der Folge darzuthun. Er wußte ſehr wohl, daß willkürlich zuſammengeſetzte Begriffe erwieſen werden müſſen; hier aber ſcheint er Grundſatz und Erklärung ſo mit einander vermengt zu haben, daß es ihm nicht einfiel, die Erklärung ſey eines Beweiſes bedürftig. Das mag nicht ohne Einfluß auf

unter demſelben Winkel nach derſelben Seite hin geſchnitten werden.

18. Die geraden AB, CD (Fig. 143.) werden von der EF unter den gleichen Winkeln BAF, DCF geſchnitten; eine vierte GH ſchneide jene beiden in K, L, die EF in G: es ſind die Winkel BKH, DLH einander gleich.

Denn alle Theile einer geraden Linie ſind auf einerley Art neben einander vorhanden, ſo fern man auf die Verſchiedenheit der Abſtände nicht ſieht (Linie, 2.). Die Theile der geraden AB haben auch dieſelbe Lage gegen die EF, ohne Rückſicht auf ihren Abſtand von derſelben; eben ſo die Theile der CD. Da die Lage der beiden AB, CD gegen EF dieſelbe iſt, ſo iſt die Lage aller ihrer Theile auf beiden gegen EF dieſelbe. Eben ſo haben die Theile auf GH gegen EF einerley Lage. Bey der Vergleichung der Lage, welche die Theile auf AB und BC gegen die auf GH haben, kommt es auf die Abſtände von der Linie EF nicht an. Dieſe Lage iſt alſo dieſelbe, d. i. die Winkel BKH, DLH ſind ſich gleich.

19. Es wird hier die Gleichheit oder Übereinſtimmung der Lage auf eine ähnliche Art geſchloſſen, als bey Größen durch den Schluß, $A = B$; $C = D$, alſo $A + C : B + D$, oder noch ähnlicher bey Verhältniſſen, $a : c = m : n$; $b : c = m : n$, alſo $a = b$. Wollte man auch den Beweis nur als eine Erläuterung gelten laſſen, ſo iſt der Satz doch ſehr einleuchtend, weil er ſich unmittelbar auf die Gleichförmigkeit der geraden Linie in ihrer ganzen Ausdehnung gründet, und in der Lage mehrerer gerader Linien gegen einander dieſelbe Gleichförmigkeit bemerken läßt.

20. Das Euklidiſche Axiom folgt unmittelbar daraus. Es ſey der Winkel HGF kleiner als der Winkel DCF, ſo ziehe man durch G die gerade MG der CD parallel (oder mache den W. MGF = DCF), ſo werden MG und CD unter demſelben Winkel nach derſelben Gegend hin geſchnitten. Der Abſtand GC zwiſchen den

Digitized by Google

gezogen werden, folgt es ſogleich aus Euklides I. 26. Man kann aber daraus noch nicht auf andere einen Schluß machen.

24. Auch krumme Linien können ſich parallel ſeyn, nämlich, wenn auf den Normalen durchgehends gleich große Theile von der Curve an, nach der einen oder andern Gegend hin genommen werden, und durch die Endpuncte eine krumme Linie gezogen wird. Man muß zu dem Ende die Normalen an mehrere Puncte der Curve ziehen, mittelſt der Subnormale, deren Lage durch die Formel $\frac{y \partial y}{\partial x}$ beſtimmt wird. Auf dieſer nimmt man dann die gegebene Länge jenſeits oder dieſſeits der Curve. Es laſſen ſich die Coordinaten der neuen, parallelen Curve durch diejenigen der vorgezeichneten angeben, folgendermaßen. Die Coordinaten der vorgezeichneten ſeyn x, y, der zugehörige Bogen s; die Coordinaten der parallelen p, q, und der gegebene Abſtand nach dem Mittelpuncte der Krümmung hin, h, ſo iſt $p = x + \frac{h \partial y}{\partial s}$; $q = y - \frac{h \partial x}{\partial s}$. Für jedes x iſt aus der Gleichung y nebſt den beiden Differential-Quotienten gegeben.

Man ſtelle ſich die Evolute einer Curve vor, durch deren Abwickelung ſie gezeichnet wird. Verändert man die Länge des abgewickelten Fadens willkürlich, ſo wird in jedem Falle eine parallele Curve beſchrieben. Dieſe kann nach der Größe und Lage des Abſtandes ſehr verſchiedene Formen haben. Man ſehe Käſtner de curvis aequidistantibus, Commentt. Soc. Götting. T. XI, und de Prasse de ellipseos evoluta et aequidistantibus et earum evolutione. Lipsiae 1798. Leibnitz wird zuerſt dieſe Conſtruction einer Curve erdacht haben. Acta Erud. 1695. Nov. auch in Ioh. Bernoulli Opp. T. I. p. 154.

25. In Murhards mathematiſcher Bibliothek, Th. I. S. 78—82 ſind die meiſten Abhandlungen über die Lehre

Digitized by Google

Parallelepipedum iſt ein Körper, der zwiſchen ſechs Parallelogrammen eingeſchloſſen iſt, von welchen je zwey entgegengeſetzte ſich gleich ſind. Es iſt ein Prisma, deſſen Baſis ein Parallelogramm iſt.

Rechtwinklichte ſind, in welchen die drey Seitenlinien an jeder Ecke ſenkrecht auf einander ſtehen; ſenkrechte, wenn die Seitenlinien der Seitenflächen ſenkrecht auf die Grundflächen ſtehen. Dieſe ſenkrechte Seitenlinie, oder der ſenkrechte Abſtand der zu Grundflächen genommenen Seitenflächen, iſt die Höhe eines ſolchen Körpers.

Alle Parallelepipeda, die gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben, ſind einander gleich.

Sind die Grundflächen gleich, ſo verhalten ſie ſich wie die Höhen, und wenn die Höhen gleich ſind, wie die Grundflächen. Sind Grundflächen und Höhen verſchieden, ſo wird das Verhältniß dieſer Körper zuſammengeſetzt aus den Verhältniſſen der Grundflächen und der Höhen.

Die Einheit für die Längen ſey die Seitenlinie eines Würfels, ſo iſt dieſer ſo vielmahl in dem Parallelepipedum enthalten, als die Einheit in dem Producte der einen Seitenlinie der Grundfläche, des Abſtandes dieſer von der gegenüber liegenden Seitenlinie, und des Abſtandes der beiden Grundflächen enthalten iſt, wenn alle dieſe Linien durch jene Einheit ausgedrückt ſind. Eines rechtwinklichten Parallelepipedum Inhalt wird durch das Product der Seitenlinien angegeben.

Wie ein Parallelepipedum in einen gleich großen Würfel durch eine geometriſche Conſtruction verwandelt wird, zeigt Wolf in den Elem. Anal. §. 628 auf dreyerley Art, durch die Durchſchnitte eines Kreiſes mit einer Parabel, oder einer Hyperbel, oder einer Ellipſe. Dieſe Aufgabe führt nämlich auf eine cubiſche Gleichung, $y^3 = abc$, wo a b die Grundfläche und c die Höhe des Parallelepipedum iſt, und y die Seite des geſuchten Würfels. Man ſehe auch im I Th. S. 138 ff. die Conſtruction biquadratiſcher und cubiſcher Gleichungen. Die arithmetiſche

Auflöſung bedarf nur des gemeinen Verfahrens eine Cubikwurzel aus einer gegebenen Zahl auszuziehen.

Der Inhalt eines Parallelepipedum läßt ſich aus den drey Seitenlinien und den Winkeln derſelben unter ſich durch eine nette Formel berechnen. Es ſeyn nämlich die Seiten der Grundflächen a und b, ihr Winkel C; die dritte Seite ſey c, ihr Winkel mit der Seite a ſey A, mit der Seite b ſey ihr Winkel B. Es iſt der Inhalt des Parallelepipedum $= 2abc \sqrt{[\sin \tfrac{1}{2}(A+B+C). \sin \tfrac{1}{2}(A+B-C). \sin \tfrac{1}{2}(A-B+C). \sin \tfrac{1}{2}(B+C-A)]}$.

Erſtlich iſt der Inhalt der Grundfläche $= ab \sin C$. Der Neigungswinkel der Seitenlinie c gegen die Grundfläche ſey D, ſo iſt die Höhe des Körpers $= c \sin D$, alſo der Inhalt $= abc. \sin C. \sin D$. Nun werde aus dem gemeinſchaftlichen Winkelpuncte der drey Seitenlinien eine Kugelfläche beſchrieben, ſo geben die Puncte, worin die Seitenlinien ſie treffen, ein ſphäriſches Dreyeck, deſſen Seiten die Maßen der Winkel A, B, C ſind. Der Bogen der auf die Seite C von dem gegenüber liegenden Winkelpuncte ſenkrecht gelaſſen wird, iſt das Maß des Neigungswinkels D, und es iſt $\sin D = 2 \sqrt{[\sin \tfrac{1}{2}(A+B+C). \sin \tfrac{1}{2}(A+B-C). \sin \tfrac{1}{2}(A-B+C). \sin \tfrac{1}{2}(B+C-A)]} : \sin C$, ſ. Trigonometrie, ſphäriſche. Daraus ergiebt ſich die Formel für den Inhalt des Parallelepipedum.

Sie läßt ſich auch aus der Rechnung in dem Artikel, Linie, 36—38. herleiten. Daſelbſt ſind η und ϑ, was hier C und D ſind. Es iſt dort $\sin \vartheta$ durch c, und c durch b, ferner b durch a, das iſt $\tan \eta$, gegeben. Folglich läßt ſich $\sin \vartheta$ durch Functionen der Winkel A, B, η ausdrücken. Man kommt dadurch auf die Formel
$\sin D. \sin C = \sqrt{(\sin C^2 - \cos A^2 - \cos B^2 + 2 \cos A. \cos B. \cos C)}$, welche ſich in die obige umwandeln läßt. Denn es iſt

$$2 \cos A. \cos B. \cos C + \sin C^2 - \cos A^2 - \cos B^2$$
$$= 2\, cs. A. cs. B. cs. C - cs. C^2 - \tfrac{1}{2} cs. 2A - \tfrac{1}{2} cs. 2B.$$

$= \cos(A + B) . \cos C + \cos(A - B) . \cos C$
$- \cos C^2 - \cos(A + B) . \cos(A - B)$.
$= [\cos C - \cos(A + B)] [\cos(A - B) - \cos C]$
$= 4 \sin \frac{1}{2}(A + B + C) . \sin \frac{1}{2}(A + B - C)$.
$\sin \frac{1}{2}(A - B + C) . \sin \frac{1}{2}(C + B - A)$.
zufolge der Formeln, Goniometrie, 36, 27, 28.

Man vergleiche die analytiſchen Formeln für Parallelepipeden in Käſtners geometriſchen Abhandlungen. II. Samml. S. 20 ff.

Die Diagonalflächen theilen ein Parallelepipedum in zwey gleiche Theile. Sie gehen durch zwey parallele Diagonalen der Grundflächen. Dieſe und die entgegengeſetzten Seitenlinien durch die Endpuncte bilden ein Parallelogramm. Es entſtehen nun vier Diagonalen in dem Körper. Die Summe der Quadrate dieſer Diagonalen iſt ſo groß als die Summe der Quadrate von allen zwölf Seitenlinien.

Denn es ſeyn die Seitenlinien der Grundflächen a und b; die dritte Seitenlinie = c; die Diagonalen der Grundflächen d und e; die Diagonalen in der Ebene durch d und c ſeyn A, B; in der Ebene durch e und c ſeyn die Diagonalen C, D, ſo iſt (ſ. Parallelogramm) $A^2 + B^2 = 2 d^2 + 2 c^2$, und $C^2 + D^2 = 2 e^2 + 2c^2$. Ferner iſt $d^2 + e^2 = 2 a^2 + 2 b^2$, alſo iſt $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 4 a^2 + 4 b^2 + 4 c^2$. Da jede der a, b, c viermahl als Seitenlinie vorhanden iſt, ſo iſt die letztere Summe die Summe der Quadrate aller Seitenlinien.

Parallelogramm iſt eine geradlinichte, vierſeitige Figur, in welcher zwey und zwey Seiten parallel ſind. Euklides hat dieſe allgemeine Benennung nicht, ſondern führt einzeln auf: Quadrat, Oblongum (rechtwinklicht), Rhombus (gleichſeitig), Rhomboides (ungleichſeitig).

Ein Parallelogramm wird durch die zwey an einander ſtoßenden Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel, oder durch jene zwey Seiten und eine der Diagonalen beſtimmt.

Digitized by Google

Von der Verwandlung eines Parallelogramms in ein anderes mit einer gegebenen Seite oder in ein Trapezium mit zwey parallelen Seiten, oder zweyer in ein einziges mit einer gegebenen Seite, ſ. Figur, 9, 13. 28. 31.

Parallelogramm der Hyperbel iſt dasjenige, welches von den beiden Aſymptoten einer Hyperbel und den ihnen parallelen Coordinaten an einem Puncte der krummen Linie gebildet wird. Es iſt von unveränderlichem Inhalte. (Hyperbel, 8.).

Parallelogramm, newtoniſches, ſ. Newtoniſches Parallelogramm.

Parallelogrammiſche Zahlen ſind Producte, deren Factoren um 2 oder eine größere Zahl verſchieden ſind. Theon Smyrnaeus, Cap. 14.

Parameter iſt in jedem der drey Kegelſchnitte eine beſtändige gerade Linie, die ſich auf einen Durchmeſſer bezieht. In der Ellipſe und Hyperbel iſt es die dritte Proportionale zu einem Durchmeſſer und deſſen conjugirten; in der Parabel die dritte Proportionale zu der Abſciſſe auf einem Durchmeſſer, vom Scheitel an genommen, und der Ordinate, die auf beiden Seiten dieſelbe iſt. Der Parameter zu der großen Axe in der Ellipſe, zu der Hauptaxe in der Hyperbel, und zu der Axe in der Parabel heißt ſchlechthin der Parameter des Kegelſchnitts.

Apollonius gebraucht die Benennung, Parameter, nicht, ſondern nennt die beſtändige Linie diejenige, in Beziehung auf welche (πὰρ ἣν) die Ordinaten zu einem Durchmeſſer potenziren, auch die ſenkrechte Seite, latus rectum. L. 1. prop. 11. 12. 13. 21. Der erſtere Ausdruck erklärt ſich aus den Gleichungen für die Ellipſe und Hyperbel, wenn Abſciſſen auf einem Durchmeſſer vom Scheitel an genommen werden, $yy = \frac{px}{2a}(2a \mp x)$, und $yy = px$ für die Parabel. Wegen des zweyten ſ. Ellipſe, 7.

Das Wort Parameter ſcheint eine Nebenlinie, die zur Vergleichung des Quadrats der Ordinate mit einem

gewiſſen Rechteck gebraucht wird, zu bedeuten. Hutton erklärt es durch eine gleich verhaltende (equal measurer), weil die Verhältniſſe der großen Axe zur kleinen und dieſer zum Parameter gleich groß ſind.

Allgemein heißt Parameter die Conſtante, die ſich in einer Gleichung findet, als a in der Gleichung, $y^3 = axy + 4x^3$. Alle Curven, die durch dieſe Gleichung beſtimmt werden, ſind nur in der Größe von a verſchieden. Hermann nannte dieſe a den Modulus der Curve, welche Benennung auch Euler in den Betrachtungen über die Curven einerley Art mit einem veränderlichen Parameter oder Modulus angenommen hat. Comm. Petrop. vet. T. VII. p. 174.

Partielle Differentialgleichungen ſind ſolche, in welchen partielle Differentialquotienten vorkommen. Partielle Differentialquotienten ſind die Quotienten der Differentiale von zwey veränderlichen Größen unter drey oder mehrern mit einander verbundenen, wenn dieſe beiden allein als veränderliche betrachtet werden. Zwiſchen zwey veränderlichen Größen giebt es keine partielle Differentialgleichung, da hier keine Auswahl der Differentiale Statt hat.

Die Theorie dieſer Gleichungen iſt eine ſehr wichtige Erweiterung der Integralrechnung, welche um die Mitte des vorigen Jahrhunderts gemacht iſt. Alle Aufgaben der Geometrie die Flächen betreffend, alle Unterſuchungen der Mechanik über flüſſige und biegſame Körper hängen von dieſer Theorie ab. Die Auflöſungen, welche man unabhängig von derſelben finden mag, ſind eingeſchränkte, mit welchen man ſich nur begnügt, wenn die Differentialgleichungen, welche die allgemeinen Auflöſungen geben würden, ſich nicht integriren laſſen. Daher haben ſich die neuern Analyſten vorzüglich mit der Integration der Gleichungen mit partiellen Differentialen beſchäftigt, und ſie ſehr häufig angewandt.

1. Drey oder mehrere veränderliche Größen z, y, x, u, t, etc. ſeyn durch eine Gleichung verbunden, die

gegeben oder geſucht ſeyn mag. Man kann hier die Differentiale zweyer derſelben mit einander vergleichen, ohne den Einfluß zu betrachten, welchen die Veränderlichkeit der übrigen auf ihr Verhältniß hat, und ſieht zu dieſer Abſicht dieſe übrigen als unveränderlich an, wie es erlaubt iſt, wenn nur eine Gleichung zwiſchen den veränderlichen Größen vorhanden iſt, in welcher man alſo jede derſelben bis auf eine willkürlich beſtimmen kann. Zur Erläuterung ſtelle man ſich x, y, z als Coordinaten an eine krumme Fläche vor. Schneidet man dieſe durch eine Ebene parallel mit der Ebene durch die Axen der x, z, ſo ſind die zu den Puncten in der Durchſchnittslinie gehörigen y alle ſich gleich, und die x, z ſind Coordinaten einer ebenen Curve, welche die Projection einer auf der krummen Fläche befindlichen Curve iſt, die von der Ebene der x, z einen gegebenen Abſtand y hat. Der Differentialquotient $\frac{\partial z}{\partial x}$ iſt ein partieller in Beziehung auf den Werth, den derſelbe haben würde, wenn y ſich zugleich mit x und z veränderte. Auf ähnliche Art verhält es ſich mit den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial x}{\partial y}$. Jener gehört für eine Curve auf der krummen Fläche, deren Ebene parallel mit der Ebene der y, z iſt, dieſer für eine Curve in einer Ebene, die der Ebene der x, y parallel iſt.

2. Den *partiellen* Differentialgleichungen ſtehen die *totalen* entgegen. Es ſey $P\partial x + Q\partial y = R\partial z$, wo P, Q, R Functionen von x, y, z, oder von zwey oder einer derſelben ſind. Hier iſt $\frac{\partial z}{\partial z} = \frac{P}{R} + \frac{Q}{R} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$, und $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{Q}{R} + \frac{P}{R} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$. Dieſes ſind vollſtändige Differentialquotienten, dagegen die partiellen nur den erſten Theil ihrer Werthe enthalten.

3. Es ſey z eine Function von y, x, u etc. das iſt, eine aus dieſen und aus unveränderlichen Größen zu-

ſammengeſetzte Größe, welche in Abſicht auf eine der Functionalgrößen differentiirt wird, ſo werden die partiellen Differentialquotienten bezeichnet durch

$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$, etc. oder bequemer nur durch $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$, etc. und die partiellen Differentiale der Function z durch $\frac{\partial z}{\partial y}\partial y$, $\frac{\partial z}{\partial x}\partial x$, $\frac{\partial z}{\partial u}\partial u$, etc.

Die Quotienten bedeuten Functionen von y, x, u, etc. Das Differential, welches als Factor beygefügt iſt, hebt ſich alſo nicht gegen den Diviſor. Differentialgleichung, 14. 15.

4. Das vollſtändige Differential einer Function z der Größen y, x, u, etc. wird nun ausgedrückt durch

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial y}\partial y + \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial u}\partial u + \text{etc},$$

eine allgemeine, von der Beſchaffenheit der Function z ganz unabhängige, Bezeichnungsart, die bey dieſer Rechnung von Wichtigkeit iſt.

5. Statt der Bruchform für die Differentialquotienten gebraucht man häufig die einfachen Buchſtabenzeichen,

$\frac{\partial z}{\partial x} = p$; $\frac{\partial z}{\partial y} = q$; $\frac{\partial z}{\partial u} = r$; u. ſ. f.

Dieſe Quotienten heißen auch Differential-Coefficienten, auch wohl Formules différentielles, welcher letztere Ausdruck aber nach Euler eine andere Bedeutung hat, ſ. Differentialformeln. Gewöhnlich heißen die Gleichungen mit dieſen Quotienten bey den franzöſiſchen Analyſten équations aux différences partielles, und die Analyſis derſelben Calcul intégral aux différences partielles. Allein der Ausdruck iſt zweydeutig, da hier nicht endliche Differenzen, ſondern unendlich kleine in einer ſtetigen Reihe veränderlicher Größen verſtanden werden. Dieſes

bemerkt auch la Croix in ſeinem Werke über die Differential- und Integralrechnung, Nr. 716.

6. Eine Function einer einzigen veränderlichen Größe werde durch $\varphi(x)$, oder $\psi(x)$, oder $F(x)$ bezeichnet, wiewol ſie auch häufig, ohne die Klammern, durch φx, ψx, $F x$ bezeichnet wird. Die Klammern dienen, um den Ausdruck noch augenfälliger von einem Producte zu unterſcheiden. La Croix gebraucht dieſe Bezeichnungsart. Eulers Bezeichnungsart, $F:x$ möchte zu viele Ähnlichkeit mit einem Quotienten haben. Eine Function zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen wird durch die Bezeichnungen, $\varphi(x, y)$; $\varphi(x, y, u)$, angedeutet. Das Differential einer Function $\varphi(x)$ werde immer durch $\partial x \varphi' x$ bezeichnet, wo $\varphi' x$ der Differentialquotient iſt, welchen die Differentiation der Function φx ergiebt. Die partiellen Differentiale einer Function $\varphi(x, y)$ werden durch $\frac{\varphi'(x, y)}{\partial x} \partial x$ und $\frac{\varphi'(x, y)}{\partial y} \partial y$ angezeigt. Man muß wohl bemerken, daß die ganze unter dem Functionszeichen enthaltene Größe als eine einzige, untrennbare Größe betrachtet und behandelt werden muß. S. Function.

7. Es ſey Z eine Function zweyer veränderlichen Größen, x, y; das partielle Differential nach x ſey $P \partial x$, und $Q \partial y$ nach y, es ſoll aus dem gegebenen Differential $P \partial x$ das $Q \partial y$ gefunden werden, um das vollſtändige Differential von Z zu erhalten.

Da $\partial Z = P \partial x + Q \partial y$ iſt, ſo muß, wenn Z eine wahre mögliche Größe iſt, ſeyn, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, ſ. Differentialgleichung 12 — 14. Daher iſt $\frac{\partial P}{\partial y} \partial x = \frac{\partial Q}{\partial x} \partial x$. Es iſt aber $\frac{\partial Q}{\partial x} \partial x$ das partielle Differential von Q nach x, bey einem als unveränderlich betrachteten y; alſo iſt Q das Integral von $\frac{\partial P}{\partial y} \partial x$, wenn in dieſer Differential-

formel blos x als veränderlich angeſehen wird. Oder es iſt $Q = \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x$, bey einem unveränderten y. Daher iſt

$$\partial Z = P \partial x + \partial y \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x.$$

Da P eine Function von x und y iſt, ſo ſey $\partial P = R \partial x + S \partial y$, und es iſt $S = \frac{\partial P}{\partial y}$, daher iſt

$$\partial Z = P \partial x + \partial y \int S \partial x.$$

8. Exempel. Es ſey $\frac{\partial Z}{\partial x}$ oder $P = \frac{x + y}{\sqrt{(x^2 + 2xy)}}$, ſo iſt $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{xy}{(x^2 + 2xy)^{3:2}}$, und $\int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x = \int \frac{x y \partial x}{(x^2 + 2xy)^{3:2}}$ $= \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 2xy)}}$. Daher $\partial Z = \frac{x + y}{\sqrt{(x^2 + 2xy)}} \partial x$. $+ \frac{x}{\sqrt{(x^2 + 2xy)}} \partial y$. Hieraus iſt $Z = \sqrt{(x^2 + 2xy)}$. S. Differentialgleichung, 19—24.

9. Die höhern partiellen Differentialquotienten werden auf eine ähnliche Art bezeichnet, wie die vom erſten Grade. Es ſey $\partial z = p \partial x + q \partial y$, und $\partial p = p' \partial y + p'' \partial x$; auch $\partial q = q' \partial x + q'' \partial y$, ſo iſt $q' = p'$. (Differentialgleichung, 12). Nun giebt es dreyerley partielle Differentiale. Entweder wird zweymahl nach x, oder zweymahl nach y, oder zuerſt nach x und dann nach y, oder, (welches auf daſſelbe hinauskommt) zuerſt nach y und dann nach y differentiiret. Daraus entſtehen folgende Differentialquotienten: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = p''$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = q''$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = p'$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = q'$.

Auf ähnliche Art werden die Bezeichnungen für höhere Differentialquotienten gefunden.

10. Das vollſtändige Differential des zweyten Grades iſt

$$\partial^2 z = p'' \partial x^2 + 2p' \partial x \partial y + q'' \partial y^2 + p \partial^2 x + q \partial^2 y,$$

wo kein Differential unveränderlich genommen iſt.

11. Die partiellen Differentialgleichungen ſind vom erſten, zweyten, dritten oder einem noch höhern Grade nach dem Grade der Differentiale und Differentialquotienten, die darin enthalten ſind.

12. Die Gleichungen, worin die Quotienten p, q ... p', q', p'', q'' ... blos einfach enthalten ſind, das iſt, weder in der zweyten oder einer höhern Potenz, noch in einander multiplicirt vorkommen, heißen **lineariſche Gleichungen**, ſ. Lineariſch.

13. Die Gleichungen mit partiellen Differentialen führen auf Integrale, welche eine unbeſtimmte Function der veränderlichen Größen, einer oder mehrerer aus denſelben, enthalten. Zur beſſern Einſicht in die ganze Rechnung iſt es ſehr dienlich, endliche Gleichungen, die unbeſtimmte Functionen enthalten, zu differentiiren, um einzuſehen, wie die Beſchaffenheit der Functionen dadurch beſeitigt werden kann, indem ſtatt der Functionen die partiellen Differentialquotienten eingeführt werden. Dieſes iſt eben ſo nöthig, als es nöthig iſt, vor der Integralrechnung die Differentialrechnung voran gehen zu laſſen. Durch die Vernachläſſigung dieſer Einleitung haben die Schriftſteller über die Rechnung mit partiellen Differentialen dem Anfänger in dieſer Materie Dunkelheit verurſacht.

14. Aufgabe. Es ſey $z = \varphi(x, y)$, oder $z = \varphi(t)$, wo t die aus x und y nebſt Conſtanten verbundene Größe bedeutet. Auch ſey $\frac{\partial z}{\partial x} = p$; $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, wie es in der Folge immer angenommen wird. Es ſoll aus der endlichen Gleichung eine Gleichung mit partiellen Differentialen hergeleitet werden.

Es iſt (4.) allgemein

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial z}{\partial y}\partial y,$$

$$\partial t = \frac{\partial t}{\partial x}\partial x + \frac{\partial t}{\partial y}\partial y.$$

Ferner iſt $\partial\varphi(t) = \varphi'(t) \cdot \partial t$ (6.); alſo iſt

$$\partial\varphi(t) = \varphi'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x}\partial x + \varphi'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y}\partial y.$$

Da $\partial z = \partial\varphi(t)$ iſt, ſo iſt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y},$$

oder $p = \varphi'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial x}$; $\quad q = \varphi'(t) \cdot \frac{\partial t}{\partial y}$.

Hier läßt ſich die Function $\varphi'(t)$ wegſchaffen, wodurch wird

$$\frac{\partial t}{\partial y} p = \frac{\partial t}{\partial x} q,$$

wo die partiellen Differentialquotienten durch die Function t gegeben werden.

15. Exempel. Es ſey $z = \varphi(ax + by)$, ſo iſt die partielle Differentialgleichung, $bp = aq$.

Da die Function φ eine unbeſtimmte ſeyn ſoll, ſo ſind es auch p und q, doch ſo, daß eins derſelben durch das andere beſtimmt wird.

16. Aufgabe. Es ſey $Z = V + \varphi(t)$, und V eine Function von x und y, daher $\partial V = \frac{\partial V}{\partial x}\partial x + \frac{\partial V}{\partial y}\partial y$, ſo iſt auf gleichem Wege

$$\left(p - \frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial t}{\partial y} = \left(q - \frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial t}{\partial x}.$$

Man ſetze $\frac{\partial t}{\partial x} = P$, $\frac{\partial t}{\partial y} = Q$, ſo iſt

$$Qp - Pq = Q \cdot \frac{\partial V}{\partial x} - P \cdot \frac{\partial V}{\partial y}.$$

17. Aufgabe. Es ſey t eine aus x, y, z und Conſtanten zuſammengeſetzte Größe, und $u = \varphi(t)$, wo u gleichfalls aus x, y, z und Conſtanten zuſammengeſetzt iſt. Nun ſey

$$\partial u = \mathfrak{P}\partial x + \mathfrak{Q}\partial y + \mathfrak{R}\partial z,$$
$$\partial t = p\,\partial x + q\,\partial y + r\,\partial z,$$

und $\partial\varphi(t) = (p\partial x + q\partial y + r\partial z)\,\varphi' t$.
Es iſt $\partial z = p\partial x + q\partial y$, daher iſt

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathfrak{P} + \mathfrak{R}p; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \mathfrak{Q} + \mathfrak{R}q;$$
$$\frac{\partial t}{\partial x} = p + r\,p; \quad \frac{\partial t}{\partial y} = q + r\,q.$$

Hier iſt $\mathfrak{R}\,p$ der Theil des Quotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$, der mittelbar durch die Veränderung von z bey der Veränderung von x entſteht. So verhält es ſich auch mit $\mathfrak{R}q$ in Abſicht auf ∂y, und auf ähnliche Art mit rp und rq.
Da $\partial u = \partial\varphi(t)$ iſt, ſo iſt

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{R}p = (p + rp)\,\varphi' t,$$
$$\mathfrak{Q} + \mathfrak{R}q = (q + rq)\,\varphi' t.$$

Daraus

$$(\mathfrak{P} + \mathfrak{R}p)(q + rq) = (\mathfrak{Q} + \mathfrak{R}q)(p + rp),$$

oder

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}p\right)\left(\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z}q\right) =$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}q\right)\left(\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial z}p\right).$$

Dieſe Gleichung entwickelt enthält p, q, und einen Terminus ohne p und q, da der Terminus, der p q auf einer Seite enthält, ſich gegen denſelben auf der andern aufhebt. Eines dieſer p oder q iſt unbeſtimmt, ſo wie die Function φt unbeſtimmt iſt.

18. Exempel. Es ſey die gegebene Gleichung dieſe,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = \varphi[(x-a)\alpha + (y-b)\beta + z],$$

welche für alle krumme Oberflächen gilt, die durch Umdrehung einer Linie um eine gegebene Axe entſtehen. Es ſind x, y, z die Coordinaten an die Fläche, und a, b, α, β beſtimmen die Lage der Axe. Hier iſt $u=(x-a)^2+(y-b)^2+z^2$, und $t=(x-a)\alpha+(y-b)\beta+z$,

daher iſt $\frac{\partial u}{\partial x}=2(x-a)$; $\frac{\partial u}{\partial y}=2(y-b)$;

$\frac{\partial u}{\partial z}=2z$; $\frac{\partial t}{\partial x}=\alpha$; $\frac{\partial t}{\partial y}=\beta$; $\frac{\partial t}{\partial z}=1$.

Folglich iſt

$(x-a+pz)(\beta+q)=(y-b+qz)(\alpha+p)$,

oder

$(x-a)(\beta+q)-(y-b)(\alpha+p)=(\alpha q-\beta p)z$,

oder

$(y-b-\beta z)p-(x-a-\alpha z)q-(x-a)\beta+(y-b)\alpha=0$. S. unten einen Zuſatz.

19. Exempel. Es iſt $\frac{x-a}{z-c}=\varphi\frac{y-b}{z-c}$ die Gleichung für alle koniſche Flächen, die Grundfläche ſey welche man wolle (krumme Fläche, 31.). Hier iſt

$$u=\frac{x-a}{z-c};\quad t=\frac{y-b}{z-c};$$

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{z-c}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=0$; $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{x-a}{(z-c)^2}$;

$\frac{\partial t}{\partial x}=0$; $\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{1}{z-c}$; $\frac{\partial t}{\partial z}=-\frac{y-b}{(z-c)^2}$.

Setzt man dieſe Werthe in die allgemeine Gleichung, ſo wird die Gleichung mit partiellen Differentialen,

$$(x-a)p+(y-b)q=z-c,$$

erhalten.

20. Nach dieſer Vorbereitung wird die Integrirung der partiellen Differentialgleichungen einleuchtender werden. Einige leichtere Fälle ſollen den Anfang machen.

21. Aufgabe. Es ſey $p=X$, einer Function von x, die endliche Gleichung daraus herzuleiten.

Da $\partial z = p\partial x + q\partial y$ iſt, ſo iſt $\partial z = X\partial x + q\partial y$. Weil für q keine Beſtimmung gegeben iſt, und, da p durch X ſchon beſtimmt iſt, nicht gegeben werden konnte (17.), ſo iſt q eine willkürliche Function von y, und es iſt $z = \int X\partial x + \varphi(y)$.

22. Die Integration jeder Differentialformel mit einer oder mehrern veränderlichen Größen wird in der hier behandelten Rechnung gefordert, da in dieſer nicht die Frage iſt, was die Integralrechnung bey Formeln und Gleichungen mit beſtimmten Functionen für die Differentialfactoren mag leiſten können oder nicht. Denn hier iſt nur die Abſicht, die Integrirung der Gleichungen mit partiellen Differentialen auf die mit vollſtändigen zu bringen.

23. Aufgabe. Es ſey $p = \varphi(x, y)$ oder einer Function V von x und y, die Function z zu finden.

Wie vorher iſt $z = \int V\partial x + \varphi(y)$, wo das $\int V\partial x$ blos in Beziehung auf x genommen wird. In dem Differential $\partial z = p\partial x + q\partial y$ bleibt q unbeſtimmt, daher eine unbeſtimmte Function von y in den Werth von z kommt. Den Werth von q findet man durch die Differentiation der Function z. Nämlich (7.)

$$\partial z = V\partial x + \partial y \int \frac{\partial V}{\partial y}\partial x + \partial y\, \varphi'(y),$$

wo der Factor zu ∂y der Werth von q iſt.

24. Aufgabe. Es ſey $ap + bq = c$, die Function z zu finden.

Da $q = \dfrac{c - ap}{b}$, ſo iſt

$$b\partial z = p(b\partial x - a\partial y) + c\partial y.$$

Man ſetze $b\partial x - a\partial y = \partial t$, und nehme für p irgend eine Function von t, welche ſey $\varphi'(t)$, ſo iſt $b\partial z = \partial t . \varphi'(t) + c\partial y$, und $bz = \varphi(t) + cy$, das iſt

$$bz = \varphi(bx - ay) + cy.$$

25. Aufgabe. Es ſey $Pp + Qq = R$, wo P, Q, R Functionen von x und y ſind, die Function z zu beſtimmen.

Da $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$ iſt, ſo iſt durch Elimination des einen Differentialquotienten, als q,

$$\partial z = \frac{p}{Q}(Q\,\partial x - P\,\partial y) + \frac{R}{Q}\,\partial y.$$

Iſt $Q\,\partial x - P\,\partial y$ unmittelbar das Differential einer Function von x und y, ſo ſetze man $Q\partial x - P\,\partial y = \partial t$; iſt dieſes aber nicht, ſo ſetze man den Factor M hinzu, wodurch die Formel integrirbar wird, und es ſey nun $M(Q\,\partial x - P\,\partial y) = \partial t$, welche Formel zugleich jene in ſich begreift, wenn $M = 1$ genommen werden kann. Es iſt nun $\partial z = \frac{p}{MQ}\,\partial t + \frac{R}{Q}\,\partial y$. Hier iſt z eine Function von t und y geworden. Deswegen muß x aus den Functionen M, Q, R weggeſchafft werden, mittelſt der gefundenen Function t von x und y. Derjenige Theil der Function z, woraus das partielle Differential $\frac{R}{Q}\,\partial y$ entſtanden iſt, ſey $= V$, eine Function von t und y. Da $\partial V = \frac{\partial V}{\partial t}\partial t + \frac{\partial V}{\partial y}\partial y$ iſt, ſo iſt $\frac{R}{Q}\partial y = \frac{\partial V}{\partial y}\partial y$, und der andere Theil $\frac{\partial V}{\partial t}\,\partial t$ iſt in dem erſten Theile von ∂z, nämlich in $\frac{p}{MQ}\,\partial t$, enthalten. Zu dieſem gehört auch noch ein von y ganz unabhängiges Differential nach t, das iſt, $\varphi'(t)\,.\,\partial t$, ſo daß

$$\partial z = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \varphi'(t)\right)\partial t + \frac{\partial V}{\partial y}\,\partial y.$$

Daraus iſt

$$z = \varphi(t) + V = \varphi(t) + \int \frac{R}{Q}\,\partial y,$$

wo V durch die partielle Integration von $\frac{R}{Q}\,\partial y$ nach y gefunden wird, nachdem R und Q durch t und y ausgedruckt ſind.

26. Exempel. Es ſey $px + qy = n\sqrt{(x^2+y^2)}$, ſo iſt $P = x$; $Q = y$; $R = n\sqrt{(x^2+y^2)}$;

$$Q\partial x - P\partial y = y\partial x - x\partial y; \quad M = \frac{1}{yy};$$

$$\partial t = \frac{y\partial x - x\partial y}{yy}; \quad t = \frac{x}{y};$$

$$x = ty; \quad \sqrt{(x^2+y^2)} = y\sqrt{(1+t^2)};$$

$$\frac{R}{Q}\partial y = n\partial y\sqrt{(1+t^2)}; \quad V = ny\sqrt{(1+t^2)};$$

alſo $z = \varphi(t) + ny\sqrt{(1+t^2)}$, und für t wieder x eingeführt,

$$z = \varphi\left(\frac{x}{y}\right) + n\sqrt{(x^2+y^2)}.$$

27. Umgekehrt wird hieraus durch die Differentiation erhalten,

$$\partial z = \varphi'\left(\frac{x}{y}\right).\frac{\partial x}{y} - \varphi'\left(\frac{x}{y}\right).\frac{x\partial y}{yy}$$

$$+ \frac{nx\partial x}{\sqrt{(x^2+y^2)}} + \frac{ny\partial y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

Alſo $px = \varphi'\left(\frac{x}{y}\right).\frac{x}{y} + \frac{nx^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$;

$$qy = -\varphi'\left(\frac{x}{y}\right).\frac{x}{y} + \frac{ny^2}{\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

Folglich iſt $px + qy = n\sqrt{(x^2+y^2)}$.

28. Exempel. Es ſey $pxx + qyy = nxy$, ſo iſt $Q\partial x - P\partial y = yy\partial x - xx\partial y$;

$$M = \frac{1}{xxyy}; \quad \partial t = \frac{\partial x}{xx} - \frac{\partial y}{yy};$$

$$t = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{x-y}{xy}; \quad x = \frac{y}{1-ty};$$

$$\frac{R}{Q}\,\partial y = \frac{n\,\partial y}{1-ty}, \text{ und } V = -\frac{n}{t}\log.\text{nat}(1-ty)$$

$$= -\frac{nxy}{x-y}\log.\frac{y}{x},$$

als das partielle Integral nach y allein. Folglich

$$z = \varphi\left(\frac{x-y}{xy}\right) - \frac{nxy}{x-y}\log.\frac{y}{x}.$$

29. Aufgabe. Es ſey die gegebene Gleichung, $Pp + Qq = Rz$, wo P, Q, R Functionen von x und y ſind, die Function z zu finden. Dieſe Gleichung verbunden mit der, $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, giebt

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{p}{Qz}(Q\,\partial x - P\,\partial y) + \frac{R}{Q}\,\partial y.$$

Um $Q\,\partial x - P\,\partial y$ integrirbar zu machen, werde der Factor M zugeſetzt, und es ſey $M\,(Q\,\partial x - P\,\partial y) = \partial t$, ſo daß ſey

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{p}{MQz}\,\partial t + \frac{R}{Q}\,\partial y.$$

Wir haben nun eine partielle Differentialgleichung zwiſchen z, t, y. Das erſte Glied des zweyten Theils der Gleichung wäre in ſo fern nicht integrirbar, weil z in dem Differentialfactor vorkommt. Allein, da dieſer Factor unbeſtimmt bleibt, alſo nicht braucht bekannt zu ſeyn, ſo muß man ſich gedenken, daß z durch x und y ausgedruckt ſey, und daß ferner auch für x ſein Werth durch t und y geſetzt werde. Es iſt nun, wie in (25.), da hier $\frac{\partial z}{z}$ ſtatt des dortigen ∂z gekommen iſt,

$$\log\text{ nat. } z = \varphi(t) + \int \frac{R}{Q}\,\partial y,$$

wo die Functionen R und Q durch t und y auszudrucken ſind, und t als eine beſtändige Größe bey der Integration von $\frac{R}{Q}\,\partial y$ behandelt wird.

Nimmt man ſtatt des Logarithmen die Zahl z ſelbſt, ſo iſt

$$z = e^{\Phi(t) + \int (R:Q) dy},$$

$$\text{oder } z = e^{\Phi(t)} . e^{\int (R:Q) dy},$$

$$\text{oder } z = e^{\int (R:Q) dy} . \psi(t),$$

wo e die Baſis der natürlichen Logarithmen iſt. Es iſt nämlich, wenn log. $z = u$ iſt, $z = e^u$, (Logarithme 3, 30.). Auch iſt $e^{\Phi(t)}$ ſelbſt eine Function von t, daher dafür die Bezeichnung $\psi(t)$ gebraucht werden kann.

30. Exempel. Es ſey $py + qx = nz$, ſo iſt $P = y$; $Q = x$; $R = n$. Ferner iſt $Q \partial x - P \partial y = x \partial x - y \partial y$. Da dieſe Formel integrirbar iſt, ſo iſt $M = 1$, und $x \partial x - y \partial y = \partial t$, daher $x^2 - y^2 = 2t$. Nun iſt $Q = x = \sqrt{(2t + y^2)}$, und $\frac{R}{Q} = \frac{n}{\sqrt{(2t + yy)}}$; ferner $\int \frac{R}{Q} \partial y = \int \frac{n \partial y}{\sqrt{(2t+yy)}} = n \log. (y + \sqrt{(2t+yy)}) = n \log (y + x) = \log (x + y)^n$. Demnach iſt $e^{\int (R:Q) dy} = e^{\log (x+y)^n}$. Dieſe Zahl ſey u, ſo iſt $\log u = \log (x + y)^n$, und $u = (x + y)^n$. Es iſt alſo $z = (x + y)^n . \psi(xx - yy)$.
Es iſt nämlich eine Function von 2t auch eine Function von t.

31. Euler findet bey der Integrirung der Gleichung, $z = py + qx$ eine Schwierigkeit, Calculus integr. T. III. 187. 188. Er giebt der Gleichung, welche aus dieſer, und der allgemeinen, $\partial z = p \partial x + q \partial y$, hergeleitet wird, die Form, $\partial z - \frac{z \partial y}{x} = p(\partial x - \frac{y \partial y}{x})$, und bemerkt, daß der Theil linker Hand nicht integrirbar iſt. Weiterhin §. 192. integrirt Euler die Gleichung $z = Mp + Nq$, wo M und N Functionen von x und y ſind, nicht auf die Art, wie es hier geſchehen iſt, ſondern ſetzt, daß in einem beſondern Falle der Werth von z bekannt ſey, und leitet daraus den allgemeinen Werth

von z her. Daraus findet er, §. 195. für die Gleichung, $z = py + qx$, daß $z = (x + y)\,\psi\,(xx - yy)$.

32. Aus der Gleichung, $px + qy = nz$, folgt nach der vorigen Methode, $z = y^n . \psi\left(\frac{x}{y}\right)$, oder auch $z = x^n . \psi\left(\frac{y}{x}\right)$.

33. Aufg. Die gegebene Gleichung ſey $(\alpha x + \beta y)\,p + (\gamma x + \delta y)\,q = z$, es wird die Function z geſucht.

Hier iſt $P = \alpha x + \beta y$; $Q = \gamma x + \delta y$; $R = 1$. Daher $Q\partial x - P\partial y = (\gamma x + \delta y)\,\partial x - (\alpha x + \beta y)\partial y$. Da dieſe Formel eine gleichartige iſt, ſo läßt ſich ein Factor dazu angeben, der ſie integrirbar macht (Integralgleichung, 31.). Dieſer iſt $\frac{1}{Qx - Py}$. Setzt man $y = ux$, wie am a. O. ſo wird

$$\frac{Q\partial x - P\partial y}{Qx - Py} = \frac{\partial x}{x} - \frac{V\partial u}{U - Vu},$$

wo $V = \alpha + \beta u$; $U = \gamma + \delta u$ iſt. Demnach iſt

$$\partial t = \frac{\partial x}{x} - \frac{(\alpha + \beta u)\,\partial u}{\gamma + (\delta - \alpha)\,u - \beta u^2}.$$

Das Integral des erſten Gliedes in dem zweyten Theile iſt log x. Das Integral des zweyten Gliedes wird aus den Formeln 25 — 29. des Artik. Integralformel gefunden. Oder kürzer, indem man das Differential in zwey Theile zerlegt, ſo daß

$$\partial t = \frac{\partial x}{x} - \frac{(\beta u - \frac{1}{2}(\delta - \alpha))\,\partial u}{\gamma + (\delta - \alpha)\,u - \beta u^2} - \frac{\frac{1}{2}(\delta + \alpha)\,\partial u}{\gamma + (\delta - \alpha)\,u - \beta u^2}.$$

Das Integral des zweyten Gliedes iſt $= + \frac{1}{2}\log(\gamma + (\delta - \alpha)\,u - \beta u^2)$. Das Integral des dritten iſt entweder ein Logarithme oder ein Kreisbogen (a. a. O.

25—27.). Iſt das erſtere, ſo ſey $\int \frac{\partial u}{\gamma + (\delta - \alpha) u - \beta u^2} =$ $\log V$, und es iſt

$$t = \log. x + \tfrac{1}{2} \log. (\gamma + (\delta - \alpha) u - \beta u^2) - \tfrac{1}{2} (\alpha + \delta) \log V,$$

$$\text{oder } t = \tfrac{1}{2} \log. \frac{x^2 (\gamma + (\delta - \alpha) u - \beta u^2)}{V \alpha + \delta}.$$

Stellt man für u deſſen Werth her, ſo iſt

$$t = \tfrac{1}{2} \log \frac{x (\gamma x + \delta y) - y (\alpha x + \beta y)}{V^{\alpha + \delta}}.$$

Nun ſollte in dem Factor des Differentials $\frac{R \partial y}{Q}$, oder $\frac{\partial y}{\gamma x + \delta y}$, die veränderliche x durch t und y ausgedruckt werden, damit die Formel integrirbar werde, indem t als eine Conſtante behandelt wird. Da t durch x und y gegeben wird, ſo findet eine gewiſſe Relation zwiſchen den Differentialen von x und y ſtatt, wenn t als unveränderlich behandelt wird, daher auch eine Relation der zugleich veränderlichen x, y, für ein zwar willkürliches, aber beſtändiges t. Es iſt $\partial t = \frac{Q \partial x - P \partial y}{Q x - P y}$, daher $Q \partial x = P \partial y$, wenn t beſtändig genommen wird, das iſt $\frac{\partial x}{\alpha x + \beta y} = \frac{\partial y}{\gamma x + \delta y}$. Aus dem gefundenen Werthe von ∂t iſt, wenn $\partial t = 0$ geſetzt wird,

$$\frac{\partial x}{x} = \frac{(\alpha + \beta u) \partial u}{\gamma + (\delta - \alpha) u - \beta u^2},$$

oder, weil $\alpha x + \beta u x = \alpha x + \beta y$ iſt,

$$\frac{\partial x}{\alpha x + \beta y} = \frac{\partial u}{\gamma + (\delta - \alpha) u - \beta u^2},$$

$$\text{oder } \frac{\partial y}{\gamma x + \delta y} = \frac{\partial u}{\gamma + (\delta - \alpha) u - \beta u^2},$$

Das Integral dieſer Formel iſt log. V, wie vorher angenommen iſt. Folglich iſt $\frac{R \partial y}{Q} = \log. V$, und demnach

$$z = \psi(t) \cdot e^{\log V} = V \cdot \psi(t).$$

Hier kann t auch die Function $\frac{x(\gamma x + \delta y) - y(\alpha x + \beta y)}{V^{\alpha+\delta}}$ bedeuten, weil die Function eines Logarithmen auch eine Function der Zahl zu dem Logarithmen iſt. Der Logarithme wird aus dieſer auf eine beſtimmte Art zuſammengeſetzt. In dem Falle, daß $\int \frac{\partial u}{\gamma + (\delta - \alpha) u - \beta u^2)}$ ein Kreisbogen iſt, wird V eine unmögliche Größe, (Differentialformeln 47 ff. Goniometrie 149. ff.). Da t auch die Function V enthält, ſo hebt ſich das unmögliche in den beiden Factoren des Werthes von z, indem die Logarithmen ſich in Kreisbogen verwandeln.

Euler hat ſich bey dieſer Aufgabe der vorher erwähnten Methode bedient, aus einem beſondern Falle für die Function z den allgemeinen Werth derſelben herzuleiten, l. c. §. 199—202.

34. In dem Exempel (30.) iſt $\alpha = 0$; $\beta = 1$; $\gamma = 1$, $\delta = 0$. Setzt man daſelbſt $n = 1$, ſo iſt $\log. V = \int \frac{\partial u}{1 - uu} = \frac{1}{2} \log. \frac{1+u}{1-u}$ (Integralformel, 12.), das iſt $V^2 = \frac{1+u}{1-u} = \frac{x+y}{x-y}$, und $V = \frac{x+y}{\sqrt{(x^2-y^2)}}$. Ferner $t = \frac{1}{2} \log (x^2 - y^2)$, alſo $z = \psi(x^2 - y^2) \cdot \frac{x+y}{\sqrt{(x^2-y^2)}}$, das iſt,

$z = (x+y)\psi(x^2 - y^2)$, weil $\frac{\psi(x^2-y^2)}{\sqrt{(x^2-y^2)}}$ auch eine Function von $(xx - yy)$ iſt. Denn eine Function dieſer Größe wird daraus, als aus einer einzigen untrenn-

baren, und aus Conſtanten zuſammengeſetzt, welches auch geſchieht, wenn noch der Diviſor $\sqrt{(x^2 - y^2)}$ hinzugefügt wird.

35. Aufgabe. Die vorgegebene Gleichung ſey $Pp + Qq = R$, und P, Q, R ſeyn Functionen von einer, zweyen oder allen der drey Größen, x, y, z. Die Verbindung mit der allgemeinen Gleichung, $\partial z = p\partial x + q\partial y$, giebt

$$P\partial z - R\partial x = q\,(P\partial y - Q\partial x),$$

oder

$$Q\partial z - R\partial y = p\,(Q\partial x - P\partial y),$$

oder auch

$$p\,(P\partial z - R\partial x) = q\,(R\partial y - Q\partial z).$$

Wenn auf jeder Seite einer unter dieſen Gleichungen keine andern veränderlichen vorkommen, als diejenigen, deren Differentiale darin enthalten ſind, ſo wird die Gleichung für integrirbar angenommen, und die vorgegebene Gleichung wird als aufgelöſet angeſehen.

36. La Grange hat in den Mém. de l'Acad. de Berlin, a. 1774, pag. 253; a. 1779. pag. 152; und a. 1785, pag. 174, eine Methode angegeben, Gleichungen von der Form, $Pp + Qq = R$, zu integriren. Das Verfahren, wie er ſolches am letzten Orte, pag. 179, beſchreibt, iſt folgendes. Man integrire nach den bekannten Regeln die Differentialgleichungen, $P\partial z - R\partial x = 0$, und $Q\partial z - R\partial y = 0$, und bringe die beiden Integrale auf die Form, $A = \alpha$; $B = \beta$, wo A und B Functionen von x, y, z ſind, und α, β die beiden willkürlichen Conſtanten, die durch die Integration eingeführt werden. Darauf ordne man irgend eine Gleichung zwiſchen den Größen A, B an, welche man durch $F(A, B) = 0$, oder durch $A = \phi(B)$ bezeichne, und dieſe Gleichung iſt das vollſtändige Integral der vorgegebenen Gleichung.

Die Methode läßt ſich auch auf vier und noch mehrere veränderliche Größen anwenden, wenn die Differentiale lineariſch bleiben.

Die für dieſen Artikel zu ausführliche Rechnung findet man auch in Boſſüts Integralrechnung, §. 1005, und in der Integralrechnung von la Croix, §. 721; auch in deſſen Traité élementaire du Calcul intégral, §. 316. Doch iſt der Geiſt des Beweiſes geändert. La Croix nimmt das Reſultat als richtig an; und zeigt, daß dieſe Annahme auf etwas mögliches führet.

La Grange ſelbſt hat dieſe Unterſuchung noch einmahl vorgenommen, in der Théorie des fonctions analytiques, nr. 101. ff. und in den Leçons sur le calcul des fonctions, à Paris, 1806, leçon 20.

Zur Erläuterung werden folgende Bemerkungen mit ein paar Beyſpielen dienen.

37. Die drey Formeln in (35.) ſind von derſelben Art wie diejenigen, welche entſtehen, wenn eine Gleichung zwiſchen drey veränderlichen Größen ſo differentiirt wird, daß eine derſelben als unveränderlich betrachtet wird. Sie ſtellen die Curven dar, welche durch den Schnitt einer krummen Fläche mit einer Ebene, die zweyen Axen der Coordinaten parallel iſt, entſtehen, mittelſt der Differentialverhältniſſe zweyer Coordinaten. Nur ſind an der krummen Fläche die Formeln, als Gleichungen, jede $= 0$; hier ſind ſie mit einander, wiewohl auf eine willkürliche Art, verbunden. Da p, q, $\frac{p}{q}$ willkürliche Functionen von x, y, z ſind, ſo können ſie immer als der Differentialfactor in dem Differential einer Function jener Größen angenommen werden, ohne daß man ſie zu kennen oder zu beſtimmen nöthig hat. Daher ſind die Integrale der Formeln in den drey Gleichungen (35.) jede eine Function der andern. Es ſey nämlich $P\partial z - R\partial x = \partial u$; $P\partial y - Q\partial x = \partial t$, ſo iſt $\partial u = \partial t . \varphi'(t)$, alſo $u = \varphi(t)$, oder $\int(P\partial z - R\partial x) = \varphi\int(P\partial y - Q\partial x)$. Eben ſo verhält es ſich mit den andern beiden Gleichungen.

38. Es kommt nun darauf an, die Function u und t zu finden. Wir wollen von den drey Gleichungen in

(35.) nur die erſte in Betrachtung nehmen, weil daſſelbe auf die beiden andern angewandt werden kann.

Enthält ∂u nur x und z, ſo wie ∂t nur x und y, ſo kommt es nur darauf an, eine Formel für zwey veränderliche Größen zu integriren; die Integrale ſind dann jedes eine Function des andern. Das Integral wird gefunden, wenn man die Formel $= 0$ ſetzt, und in der Integralgleichung eine willkürliche, von x, y, z unabhängige, Conſtante beyfügt.

Enthält $P\partial y - Q\partial x$ nur x und y, indem $P\partial z - R\partial x$ nebſt x und z auch y enthält, ſo ſuche man aus dem Integral von $P\partial y - Q\partial x$ nebſt deſſen Conſtante, den Werth von y durch x und die unbeſtimmte Conſtante a, und ſetze dieſen in die Gleichung $P\partial z - R\partial x$, um eine Gleichung zwiſchen z und x allein zu erhalten. Das Integral derſelben, gleichfalls eine willkürliche Conſtante, b, iſt eine Function von a. Setzt man nun für a den unbeſtimmten Werth durch x und y, ſo ergiebt ſich die allgemeine Integralgleichung zwiſchen x, y und z. Die Subſtitution für y kann inzwiſchen Schwierigkeit machen.

Sind alle drey Formeln (35.) mit den drey veränderlichen Größen behaftet, ſo verſuche man, ob aus den drey Gleichungen daſelbſt ſich eine herleiten laſſe, die einen der beiden vorigen Fälle giebt.

Iſt dieſes nicht möglich, ſo möchte es am beſten ſeyn, die Form für die endliche Gleichung zu ſuchen, dieſe zu differentiiren, und die Differentialgleichung mit der gegebenen zu vergleichen, um daraus die endliche Gleichung zu beſtimmen.

Den Differentialformeln kann man jeden Factor oder Diviſor beyfügen, weil dadurch nur p oder q verändert werden, deren Werth ganz unbeſtimmt gelaſſen wird.

39. Exempel I. Die vorgegebene Gleichung ſey $px + qz + y = 0$, ſo iſt $P = x$; $Q = z$; $R = -y$. Dadurch iſt $p(x\partial z + y\partial x) = q(-y\partial y - z\partial z)$,

oder $x\partial z + y\partial x = \frac{q}{p}(-y\partial y - z\partial z)$. Die Gleichung, $y\partial y + z\partial z = 0$, giebt $yy + zz = aa$. In der Gleichung, $x\partial z - y\partial x = 0$, ſetze man für y den Werth durch a, nämlich $y = \sqrt{(aa - zz)}$, ſo iſt $x\partial z + \partial x \sqrt{(aa-zz)} = 0$, oder $\frac{\partial z}{\sqrt{(aa-zz)}} + \frac{\partial x}{x} = 0$. Daraus iſt $\text{Ang. sin}\,\frac{z}{a} + \log\frac{x}{b} = 0$, oder $\text{Ang. sin}\,\frac{z}{a} = \log\frac{b}{x}$, das iſt, $e^{\text{ang. sin}(z:a)} = \frac{b}{x}$, und $b = x\,e^{\text{ang. sin}(z:a)}$. Da b eine Function von aa iſt, ſo iſt

$$x\,e^{\text{ang. sin}(z:a)} = \varphi(aa).$$

Dieſes iſt die Form der geſuchten Gleichung, bey dem Werthe aa für $zz + yy$. Da aa ganz unbeſtimmt bleibt, ſo kann man eben dieſe unbeſtimmte Größe dafür ſetzen, und es iſt allgemein

$$x\,e^{\text{ang. sin}(z:\sqrt{(yy+zz)})} = \varphi(yy + zz).$$

Nimmt man die zweyte Gleichung aus (35.), ſo iſt, auf gleiche Art,

$$x\,e^{-\text{ang. sin.}(y:\sqrt{(zz+yy)})} = \varphi(z^2 + y^2),$$

wo der Winkel das Complement jenes Winkels zum rechten iſt.

40. Um rückwärts hieraus durch Differentiirung die Gleichung, $px + qz + y = 0$, herzuleiten, bemerke man, daß $\log\varphi(yy + zz)$ durch $\psi(yy + zz)$ dargeſtellt werden kann. Das Differential derſelben iſt $(2y\partial y + 2z\partial z)\,\psi'(yy + zz)$. Hier kann man die Function $\psi'(yy + zz)$ durch $\frac{\chi(yy + zz)}{yy + zz}$ ausdrucken. Man nehme nun die Werthe, welche p und

q bey der Differentiirung der beiden gefundenen Gleichungen bekommen, ſo ergiebt ſich, daß $px + qz = -y$ iſt, wie in der vorgegebenen Gleichung.

41. Exempel II. Die gegebene Gleichung mit partiellen Differentialen ſey

$$(y - \beta z)p - (x - \alpha z)q = \beta x - \alpha y.$$

Hier iſt $P = y - \beta x$; $Q = -(x - \alpha z)$; $R = \beta x - \alpha y$. Die Differentialformeln in (35.) ſind:

$$P\partial z - R\partial x = (y - \beta z)\partial z - (\beta x - \alpha y)\partial x.$$
$$P\partial y - Q\partial x = (y - \beta z)\partial y + (x - \alpha z)\partial x.$$
$$R\partial y - Q\partial z = (\beta x - \alpha y)\partial y + (x - \alpha z)\partial z.$$

Keine dieſer Differentialformeln iſt für ſich integrirbar. Allein es iſt zu verſuchen, ob durch Verbindungen von ihnen integrirbare Formeln entſtehen mögen. Wenn die erſte durch α, die dritte durch β multiplicirt, und letztere von jener abgezogen wird, ſo wird erhalten,

$$(\alpha y - \beta x)(\partial z + \alpha\partial x + \beta\partial y).$$

Multiplicirt man die erſte durch x, die dritte durch y, und zieht die letztere von jener ab, ſo wird erhalten,

$$(\alpha y - \beta x)(z\partial z + x\partial x + y\partial y).$$

Da die Integrale der Formeln, $P\partial z - R\partial x$; $P\partial y - Q\partial x$; $R\partial y - Q\partial z$, jedes eine unbeſtimmte Function der andern ſind, ſo ſind auch die daraus zuſammengeſetzten, und mit gegebenen Functionen von x, y, z verbundenen Formeln jede eine Function der andern. So iſt das Integral von $\alpha(P\partial z - R\partial x) - \beta(R\partial y - Q\partial z)$ eine Function des Integrals von $x(P\partial z - R\partial x) - y(R\partial y - Q\partial z)$. Auch die Integrale dieſer durch $(\alpha y - \beta x)$ dividirten Differentialen ſind Functionen von einander. Demnach iſt $\int(\partial z + \alpha\partial x + \beta\partial y)$ eine Function von $\int(z\partial z + x\partial x + y\partial y)$, das iſt,

$$z + \alpha x + \beta y = \varphi(zz + xx + yy).$$

Die hier vorgegebene Differentialgleichung iſt die in (16.) gefundene, nur daß die dort gegebenen a, b, c hier $= 0$ genommen ſind.

Partielle Differentialgleichungen vom zweyten Grade.

42. In den Gleichungen mit partiellen Differentialen vom zweyten Grade kommen die Quotienten $\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}$ vor, deren Bedeutung (9.) erklärt iſt, einer, oder zwey, oder alle drey. Manche Fälle der Verbindungen ſind nicht auflösbar. Hier können nur einige merkwürdige Beyſpiele angeführt werden.

43. Aufgabe. Es ſey $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = P$, einer Function von x und y. Da $\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$ das Differential von $\frac{\partial z}{\partial x}$ in Beziehung auf ∂x, durch ∂x dividirt iſt, ſo iſt $\partial . \frac{\partial z}{\partial x} = P \partial x$, alſo $\frac{\partial z}{\partial x} = \int P \partial x + \text{Const.}$ Die Conſtante iſt eine willkürliche Function von y, welche bey der Integration, ſo wie in dem zweyten Differential als eine beſtändige Größe angeſehen iſt. Alſo iſt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \int P \partial x + f(y).$$

In dem Differentialquotienten iſt y als unveränderlich angeſehen, daher iſt es auch ſo bey der Integration zu behandeln, ſo daß

$$z = \int \partial x \int P \partial x + x f(y) + F(y),$$

wo f (y) eine zweyte willkürliche Function von y iſt. Die zwey Integrationen erfordern zwey Conſtanten, wenn das Integral vollſtändig ſeyn ſoll, ſ. Integral, Th. II. S. 747.

44. Exempel. Es ſey $P = \frac{xy}{a}$, ſo iſt

$$z = \frac{x^3 y}{6a} + x f(y) + F(y).$$

45. Aufg. Die gegebene Gleichung ſey $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = P$, die Function z zu finden.

Der Ausdruck bedeutet, daß z zuerſt in Abſicht auf x, und das Differential in Abſicht auf y differentiirt werden ſoll. Auf gleiche Art iſt die Formel rückwärts zu integriren. Nimmt man zuerſt blos y veränderlich, ſo iſt $\frac{\partial^2 z}{\partial x} = P \partial y$, und $\int \frac{\partial^2 z}{\partial x} = \int P \partial y + f'(x)$, oder $\frac{\partial z}{\partial x} = \int P \partial y + f'(x)$. Nun iſt x allein als veränderlich zu nehmen, wodurch iſt

$$\partial z = \partial x \int P \partial y + \partial x f'(x), \text{ und daraus}$$
$$z = \int \partial x \int P \partial y + f(x) + F(y).$$

Es iſt hier, zufolge (6.), der Differentialfactor zu ∂x durch $f'(x)$ bezeichnet, um das Integral durch $f(x)$ anzudeuten.

46. Aufgabe. Die gegebene Gleichung ſey $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = aa \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, die Function z daraus herzuleiten.

Die allgemeine Gleichung, $\partial z = p \partial x + q \partial y$, giebt $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. Es iſt alſo $\frac{\partial q}{\partial y} = aa \frac{\partial p}{\partial x}$. Nun ſey $\partial p = r \partial x + s \partial y$, und $\partial q = s \partial x + t \partial y$, (Differentialgleichung, 12.), ſo iſt $\frac{\partial p}{\partial x} = r$; $\frac{\partial q}{\partial y} = t$, alſo $t = aar$, und $\partial q = s \partial x + aar \partial y$. Die Verbindung dieſer Gleichung mit der erſten, $\partial p = r \partial x + s \partial y$, giebt

$$a \partial p + \partial q = (ar + s)(\partial x + a \partial y),$$
$$a \partial p - \partial q = (ar - s)(\partial x - a \partial y).$$

Damit der zweyte Theil jeder dieſer beiden Gleichungen integrirbar ſey, muß $ar + s$ eine Function von $x + ay$, ſo wie $ar - s$ von $x - ay$ ſeyn, daher auch die

Integrale dieſer Theile Functionen von $x + ay$ und $x - ay$ ſind, oder $ap + q = f'(x + ay)$; und $ap - q = F'(x - ay)$ iſt. Daraus iſt

$$2ap = f'(x + ay) + F'(x - ay),$$
$$2q = f'(x + ay) - F'(x - ay).$$

Da $\partial z = p\partial x + q\partial y$ iſt, ſo ergiebt ſich der Werth von z leicht. Man muß nämlich den Werth von $p\partial x$ in Abſicht auf x allein, und den Werth von $q\partial y$ in Abſicht auf y allein integriren. So iſt

$$z = \frac{1}{a} f(x + ay) + \frac{1}{a} F(x - ay),$$

wo f und F die Functionszeichen für die Integrale ſind, im Gegenſatze gegen f′ und F′, als Functionszeichen für die Differentiale. Der zweyte Theil von z mag auch ſubtractiv genommen werden. Denn es iſt $\partial q - a\partial p = (s - ar)(\partial x - a\partial y)$, alſo $q - ap = F'(x - ay)$. Dadurch werden die Vorzeichen von $F'(x - ay)$ vertauſcht.

47. Wenn $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ iſt, ſo iſt

$$z = f(x + y) \pm F(x - y).$$

48. Dieſe Integration iſt merkwürdig, weil durch ſie die Rechnung mit partiellen Differentialen aufs neue in Anregung gekommen, und ſeit der Zeit ſehr eifrig bearbeitet iſt. Sie dient zur Beſtimmung der Figur ſchwingender Saiten, ſo fern dieſe zugleich von der Zeit abhängt, da ſie ſich mit jedem Zeitmomente ändert. Die eine der veränderlichen Größen, x, iſt die Zeit, die andere, y, ein Bogen oder die zugehörige Abſciſſe, und z iſt die Ordinate.

49. Wenn anſtatt der veränderlichen x, y zwey andere t, u eingeführt werden, deren jede durch x und y gegeben iſt, ſo iſt es nöthig, die partiellen Differentialquotienten in Abſicht auf x und y in ſolche zu verwandeln, die ſich auf t und u beziehen. Dieſes dient

zugleich zur Erläuterung der Rechnung mit dieſen Differentialquotienten. Ein Beyſpiel wird hier genügen, da das Verfahren ſelbſt daſſelbe bleibt.

50. Es ſey $t = \alpha x + \beta y$, und $u = \gamma x + \delta y$. Wie bisher, ſey $\partial z = p\,\partial x + q\,\partial y$, und auf gleiche Art $\partial z = P\,\partial t + Q\,\partial u$. Für ∂t und ∂u ſetze man ihre Werthe durch ∂x und ∂y, ſo iſt
$\partial z = (P\alpha + Q\gamma)\,\partial x + (P\beta + Q\delta)\,\partial y$, alſo

$$p = P\alpha + Q\gamma \quad ; \quad q = P\beta + Q\delta,$$

das iſt

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha\frac{\partial z}{\partial t} + \gamma\frac{\partial z}{\partial u}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \beta\frac{\partial z}{\partial t} + \delta\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Ferner iſt (4.) $\partial P = \frac{\partial P}{\partial t}\,\partial t + \frac{\partial P}{\partial u}\,\partial u$

$$= \left(\alpha\frac{\partial P}{\partial t} + \gamma\frac{\partial P}{\partial u}\right)\partial x + \left(\beta\frac{\partial P}{\partial t} + \delta\frac{\partial P}{\partial u}\right)\partial y;$$

und eben ſo

$$\partial Q = \left(\alpha\frac{\partial Q}{\partial t} + \gamma\frac{\partial Q}{\partial u}\right)\partial x + \left(\beta\frac{\partial Q}{\partial t} + \delta\frac{\partial Q}{\partial u}\right)\partial y.$$

Man bemerke, daß $\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial Q}{\partial t}$ iſt, (Differentialgleichung, 12). Es iſt daher

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\alpha\alpha\frac{\partial P}{\partial t} + 2\alpha\gamma\frac{\partial P}{\partial u} + \gamma\gamma\frac{\partial Q}{\partial u}\right).$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} = \left(\beta\beta\frac{\partial P}{\partial t} + 2\beta\delta\frac{\partial P}{\partial u} + \delta\delta\frac{\partial Q}{\partial u}\right).$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \left(\alpha\beta\frac{\partial P}{\partial t} + (\alpha\delta + \beta\gamma)\frac{\partial P}{\partial u} + \gamma\delta\frac{\partial Q}{\partial u}\right),$$

das iſt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\alpha\alpha\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2\alpha\gamma\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u} + \gamma\gamma\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\beta\beta\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2\beta\delta\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u} + \delta\delta\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\alpha \beta \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + (\alpha\delta + \beta\gamma) \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} + \gamma\delta \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right).$$

Erweis einer Bedingungsgleichung für Differentialgleichungen mit mehr als zwey veränderlichen Größen.

51. Es seyn x und y zwey veränderliche Größen, und $\partial y = p \partial x$; $\partial p = q \partial x$; $\partial q = r \partial x$; $\partial r = s \partial x$, u. s. f. Ferner sey z irgend eine Function der Größen x, y, p, q, r, s, etc. das ist, eine Zusammensetzung aus diesen veränderlichen Größen, auch sey das partielle Differential $\partial z = V \partial x$, wo V ebenfalls eine Function von x, y, p, q, r, etc. ist.* In dieser Function ist ein Differentialquotient mehr als in z. Nun sey das aus allen partiellen Differentialen zusammengesetzte vollständige,

$$\partial V = M \partial x + N \partial y + P \partial p + Q \partial q + R \partial r + S \partial s + \text{etc.} = 0.$$

Es ist

$$M = \frac{1}{\partial x} . \partial \frac{\partial z}{\partial x} \quad ; \quad N = \frac{1}{\partial x} . \partial \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$P = \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{\partial x} . \partial \frac{\partial z}{\partial p}; \quad Q = \frac{\partial z}{\partial p} + \frac{1}{\partial x} . \partial \frac{\partial z}{\partial q}.$$

$$R = \frac{\partial z}{\partial q} + \frac{1}{\partial x} . \partial \frac{\partial z}{\partial r}; \quad S = \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{\partial x} . \partial \frac{\partial z}{\partial s}.$$

u. s. f.

Erstlich ist der allgemeine Ausdruck für das Differential von z,

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial x} \partial x + \frac{\partial z}{\partial y} \partial y + \frac{\partial z}{\partial p} \partial p + \frac{\partial z}{\partial q} \partial q + \text{etc.}$$

und durch die Einführung der Bezeichnungen p, q, r, s, etc.

$$\partial z = \frac{\partial z}{\partial z} \partial x + \frac{\partial z}{\partial y} p \partial x + \frac{\partial z}{\partial p} q \partial x + \frac{\partial z}{\partial q} r \partial x + \text{etc.}$$

Da $\partial z = V \partial x$ gesetzt ist, so ist

$$V = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} p + \frac{\partial z}{\partial p} q + \frac{\partial z}{\partial q} r + \text{etc.}$$

Das Differential von V iſt allgemein ausgedruckt,

$$\partial V = \frac{\partial V}{\partial x}\partial x + \frac{\partial V}{\partial y}\partial y + \frac{\partial V}{\partial p}\partial p + \text{etc.}$$

Aus dem Werthe von V iſt aber

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} p + \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial x} q + \frac{\partial^2 z}{\partial q \partial x} r + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} p + \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial y} q + \frac{\partial^2 z}{\partial q \partial y} r + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial p} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial p} p + \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} q + \frac{\partial z^2}{\partial q \partial p} r + \text{etc.}$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial p}{\partial p}$$

$$\frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial q} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial q} p + \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial q} q + \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} \cdot r + \text{etc.}$$

u. ſ. f.

$$+ \frac{\partial z}{\partial p} \cdot \frac{\partial q}{\partial q}$$

Man bemerke, daß

$$\partial \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\partial y + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial p}\partial p + \text{etc.}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} p \partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial p} q \partial x + \text{etc.}$$

und auf gleiche Art,

$$\partial \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} p \partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial p} q \partial x + \text{etc.}$$

$$\partial \cdot \frac{\partial z}{\partial p} = \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial x}\partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial p \partial y} p \partial x + \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} q \partial x + \text{etc.}$$

u. ſ. f.

Folglich iſt

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\partial x}\partial \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\;; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{\partial x}\partial \frac{\partial z}{\partial y}\;;$$

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{dx}\, d\frac{dz}{dp} + \frac{dz}{dy}\ ;\quad \frac{dV}{dq} = \frac{1}{\partial x}\, \partial\frac{\partial z}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\ ;$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{dx}\, d\frac{dz}{dr} + \frac{dz}{dq}\ ;\quad \text{u. ſ. f.}$$

Dieſes ſind die Werthe der in dem Satze durch M, N, P, Q, etc. bezeichneten Differentialfactoren.

52. Man muß nicht etwa in den partiellen Differentialquotienten eines der in dem Nenner befindlichen Differentiale gegen daſſelbe, ſo ferne es zugleich Factor jenes Quotienten iſt, aufheben wollen, weil jene Ausdrücke ein Ganzes ausmachen, und zuſammen eine gewiſſe Function von x, y, p, q, etc. anzeigen.

53. Es iſt, wenn die Coefficienten P, Q, R, S, etc. vollſtändig differentiirt werden, bey einem beſtändigen ∂x,

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \text{etc.}$$

Denn es iſt $\frac{\partial P}{\partial x} = N + \frac{1}{\partial x^2}\, \partial^2 \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)$;

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{1}{\partial x^2}\, \partial^2 \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right) + \frac{1}{\partial x^3}\, \partial^3 \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right);$$

$$\frac{\partial^3 R}{\partial x^3} = \frac{1}{\partial x^3}\, \partial^3 \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right) + \frac{1}{\partial x^4}\, \partial^4 \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right);$$

u. ſ. f.

Die Verbindung dieſer Gleichungen durch abwechſelndes Addiren und Subtrahiren giebt

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} - \text{etc.} = N.$$

54. Dieſes iſt der Satz, der in dem Artikel, Differentio-Differentialrechnung, 28. angeführt iſt, und den Euler nicht anders als durch Hülfe der Variationsrechnung erweiſen konnte. Der hier gegebene iſt für den

Gegenſtand leicht genug. Hier iſt z als eine reale Function von x, y, p, q, r, etc. angenommen. Daher iſt $\frac{\partial z}{\partial x}$ oder V auch eine reale Function dieſer Größen. Darum muß, wenn V eine reale Function derſelben ſeyn ſoll, auch die Relation, welche der Satz angiebt, Statt haben.

55. Exempel. Es ſey $\partial z = v\partial x + u\partial y$, wo v und u Functionen von x und y ſind, ſo iſt $V = v + \frac{u\partial y}{\partial x} = v + up$. Daher iſt $M = \frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial x}$; $N = \frac{\partial v}{\partial y} + p\frac{\partial u}{\partial y}$; $P = u$; $\partial P = \frac{\partial u}{\partial x}\partial x + \frac{\partial u}{\partial y}\partial y$, und $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial y}$. Da in der Gleichung für V nur die drey Größen x, y, p vorhanden ſind, ſo fallen die Coefficienten Q, R, etc. weg, und es iſt $N = \frac{\partial P}{\partial x}$, alſo ſind die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, wie es nach Differentialgleichung, 12, ſeyn muß.

Ein umſtändlicheres Exempel a. a. O. 30.

Verwandlung einer Function durch Hülfe der partiellen Differentiale.

56. Es ſey $y = x - e\varphi(x)$; und $\psi(x)$ eine andere Function von x von gegebener Beſchaffenheit, wie es auch die Function $\varphi(x)$ iſt; es ſoll $\psi(x)$ in eine Function von y verwandelt, oder aus Functionen von y zuſammengeſetzt werden.

I. Man ſetze zur Abkürzung $\psi(x) = u$, und nehme für u eine Reihe an,

$$u = A + Be + Ce^2 + De^3 + Ee^4 + \text{etc.}$$

worin A, B, C, D, E, etc. Functionen von y allein ſeyn. Da u auf eine beſtimmte Art von e und y ab-

hängt, ſo bleibt die Form jener Coefficienten dieſelbe, was auch e ſeyn mag. Man betrachte nun u und e als die zuſammengehörigen veränderlichen Größen, y aber als unveränderlich, ſo wird durch die ſucceſſiven Differentiirungen der u in Abſicht auf e, wenn ∂e conſtant genommen wird, erhalten,

$$\frac{\partial u}{\partial e} = B + 2Ce + 3De^2 + 4Ee^3 + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial e^2} = 2C + 6De + 12Ee^2 + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial e^3} = 6D + 24Ee + \text{etc.}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial e^4} = 24E + \text{etc.}$$

u. ſ. f.

II. Damit die Coefficienten A, B, C, etc. Functionen von y allein, ohne e, ſeyn, muß in den Werthen der partiellen Differentialquotienten $e = 0$ geſetzt werden. Dadurch werden dieſe Quotienten nach der Reihe, B, 2C, 6D, 24E, etc. Da bey dieſer Annahme $x = y$ iſt, ſo iſt $A = \psi(y)$, und es iſt

$$u = \psi(y) + \frac{\partial u}{\partial e} e + \frac{\partial^2 u}{1.2 \partial e^2} . e^2 + \frac{\partial^3 u}{1.2.3 \partial e^3} . e^3 + \frac{\partial^4 u}{1.2.3.4 \partial e^4} . e^4 + \text{etc.}$$

Dieſe Differentialquotienten, die ſich auf ein veränderliches e beziehen, müſſen nun in ſolche verwandelt werden, die zwiſchen x und y ſtatt haben, damit e als unveränderlich beybehalten werden könne.

III. Wenn mit den veränderlichen x, y, z auch e als veränderlich betrachtet wird, ſo iſt, wenn $\varphi x = t$ geſetzt, alſo $y = x - et$ iſt,

$$\partial y = \partial x - e\partial t - t\partial e.$$

Daraus entſtehen die partiellen Differentialgleichungen,

Digitized by Google

$$1 = \frac{\partial x}{\partial y} - e\frac{\partial t}{\partial y};$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial e} - e\frac{\partial t}{\partial e} - t.$$

Aus beiden ergiebt ſich

$$\frac{\partial x}{\partial e} - t\frac{\partial x}{\partial y} = e\frac{\partial t}{\partial e} - et\frac{\partial t}{\partial y}.$$

Da e jeden Werth haben kann, ſo iſt jeder Theil dieſer Gleichung für ſich Null, und es iſt

$$\frac{\partial x}{\partial e} = t\frac{\partial x}{\partial y}; \quad \frac{\partial t}{\partial e} = t\frac{\partial t}{\partial y}.$$

Aus beiden folgt

$$\frac{\partial x}{\partial e} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial e} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}.$$

IV. Die erſte dieſer drey Gleichungen gilt auch, wenn ſtatt x eine Function von x, ohne y oder e zu enthalten, wie u oder $\psi(x)$ genommen wird, oder es iſt $\frac{\partial u}{\partial e} = t\frac{\partial u}{\partial y}$. Denn wenn $\partial u = v\partial x$ iſt, ſo multiplicire man die erſtere Gleichung in beiden Theilen mit v, ſo iſt $\frac{v\partial x}{\partial e} = t\frac{v\partial x}{\partial y}$, das iſt $\frac{\partial u}{\partial e} = t\frac{\partial u}{\partial y}$.

Auch iſt $\frac{\partial u}{\partial e} = vt\frac{\partial x}{\partial y}$.

V. Da u jede Function von x bedeutet, ſo iſt auch $\frac{\partial v}{\partial e} = t\frac{\partial v}{\partial y}$. Dieſe Gleichung verbunden mit der $\frac{\partial x}{\partial e} = t\frac{\partial x}{\partial y}$, giebt $\frac{\partial x}{\partial e} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial e} \cdot \frac{\partial x}{\partial y}$.

VI. Durch Hülfe dieſer Formeln laſſen ſich die Differentialquotienten in Beziehung auf u und e in Quotienten zwiſchen x und y verwandeln.

Zuerſt iſt $\frac{\partial u}{\partial e} = vt\,\frac{\partial x}{\partial y}$.

VII. Aus dieſem Quotienten wird durch die Differentiirung in Abſicht auf e in beiden Theilen die Gleichung erhalten

$$\frac{\partial^2 u}{\partial e^2} = t\,\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial e} + v\,\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial t}{\partial e} + vt\,\frac{\partial^2 x}{\partial y.\partial e}.$$

Durch die Vertauſchungen (V.) wird

$$\frac{\partial^2 u}{\partial e^2} = t\,\frac{\partial x}{\partial e}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + v\,\frac{\partial x}{\partial e}\cdot\frac{\partial t}{\partial y} + vt\,\frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial e}.$$

Der Theil rechter Hand iſt der partielle Differentialquotient, wenn $vt\,\frac{\partial x}{\partial e}$ in Abſicht auf y differentiirt wird. Der Quotient $\frac{\partial^2 x}{\partial y\,\partial e}$ zeigt zwey Differentiirungen an, es ſey zuerſt nach e und dann nach y, oder zuerſt nach y und dann nach e. Statt $\frac{\partial x}{\partial e}$ ſetze man deſſen Werth $t\,\frac{\partial x}{\partial y}$, ſo iſt $\frac{\partial^2 u}{\partial e^2}$ der partielle Differentialquotient aus $vt^2\,\frac{\partial x}{\partial y}$ in Abſicht auf y, oder es iſt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial e^2} = \frac{\partial . vt^2(\partial x:\partial y)}{\partial y}.$$

VIII. Auf gleiche Art wird der Quotient $\frac{\partial^3 u}{\partial e^3}$ gefunden, da anſtatt t kommt t^2, welches wie eine einfache Größe beym Differentiiren behandelt werde. So iſt

$$\frac{\partial^3 u}{\partial e^3} = \frac{\partial^2 . vt^3(\partial x:\partial y)}{\partial y^2}.$$

Hieraus ergiebt ſich

$$\frac{\partial^4 u}{\partial e^4} = \frac{\partial^3 . v t^4 (\partial x : \partial y)}{\partial y^3},$$

und allgemein

$$\frac{\partial^n u}{\partial e^n} = \frac{\partial^{n-1} . v t^n (\partial x : \partial y)}{\partial y^{n-1}}.$$

IX. In allen dieſen Quotienten, ſo fern ſie die Coefficienten in der Reihe für $u = \psi x$ angeben ſollen, iſt $x = y$, alſo ψy für ψx, und φy für φx zu ſetzen. Folglich iſt

$$\psi x = \psi y + e . v \varphi y + e^2 . \frac{\partial . v (\varphi y)^2}{1 . 2 \partial y^2}$$
$$+ e^3 . \frac{\partial . v (\varphi y)^3}{1 . 2 . 3 \partial y^3} + e^4 . \frac{\partial . v (\varphi y)^4}{1 . 2 . 3 . 4 \partial y^4} + \text{etc.}$$

wie in dem Artikel, la Grange's Lehrſatz, 11, wo p und z hier v und e ſind.

Exempel aus der Aſtronomie, die drey Anomalien, (die mittlere, excentriſche und wahre) nebſt dem Radius Vector in einer Ellipſe betreffend, kommen daſelbſt 15—19 vor.

X. Die hier vorgetragene Methode hat la Place in der Théorie du mouvement et de la figure elliptique des Planètes, X. angewandt. Die Beweiſe der einzelnen Sätze ſind aber von mir ganz abgeändert, um ſie einleuchtender zu machen. Man vergleiche auch die Theorie der analytiſchen Functionen von la Grange, Nr. 97—99.

Integration einer totalen Differentialgleichung des erſten Grades zwiſchen drey veränderlichen Größen.

57. Die totalen Differentialgleichungen zwiſchen drey veränderlichen Größen enthalten jedes der Differentiale derſelben. Die allgemeine Form dieſer Gleichungen iſt $P \partial x + Q \partial y + R \partial z = 0$, wo P, Q, R Functionen von x, y, z oder zweyer, oder einer derſelben, oder eine gegebene Größe ſind. Dieſe Functionen müſſen aber ſo beſchaffen ſeyn, daß die Bedingungsgleichung, welche in

dem Artikel, Differentialgleichung, 17. gefunden iſt, dabey Statt habe. Da nur eine Gleichung zwiſchen den drey veränderlichen vorhanden iſt, ſo kann man eine derſelben als unveränderlich betrachten, und es bleibt noch eine unbeſtimmte Gleichung zwiſchen den beiden andern übrig. Man nehme z als unveränderlich an, und ſetze demnach $P\partial x + Q\partial y = 0$. Die hieraus hergeleitete Integralgleichung muß nun aber, damit ſie die geſuchte zwiſchen den dreyen, x, y, z ſey, noch eine Function von z als Conſtante enthalten. Das Differential dieſer Function nebſt dem partiellen Differential nach z aus dem andern Theile der Integralgleichung muß das Differential $R\partial z$ geben. Differentiirt man nun die gefundene Integralgleichung nebſt der beygefügten Function von z vollſtändig, in Abſicht auf alle drey veränderlichen Größen, ſo erhält man in dem Differentialfactor zu ∂z eine Function, welche der R gleich iſt. Daraus wird denn auch die unbekannte Function von z gefunden.

58. Exempel. Die aufgegebene Gleichung ſey $(ay - bz)\partial x + (cz - ax)\partial y + (bx - cy)\partial z = 0$. Hier iſt $P = ay - bz$; $Q = cz - ax$;

$R = bx - cy$. Ferner iſt $\frac{\partial P}{\partial y} = a$; $\frac{\partial P}{\partial z} = -b$;
$\frac{\partial Q}{\partial x} = -a$; $\frac{\partial Q}{\partial z} = c$; $\frac{\partial R}{\partial x} = b$; $\frac{\partial R}{\partial y} = -c$.

Dieſe Werthe in die Bedingungsgleichung, a. a. O. geſetzt, thun ihr Genüge, obgleich die einzelnen Bedingungen, daſ. 16. nicht erfüllt werden, welches anzeigt, daß hier noch ein Multiplicator hinzukommen muß. Inzwiſchen brauchen wir dieſen nicht zu kennen.

Setzt man z conſtant, ſo iſt

$$(ay - bz)\,\partial x + (cz - ax)\,\partial y = 0,$$

oder $\frac{\partial x}{cz - ax} + \frac{\partial y}{ay - bz} = 0$. Davon iſt die Integrale, ſo fern z unveränderlich iſt,

$$-\frac{1}{a}\log(cz-ax)+\frac{1}{a}\log(ay-bz)=\phi(z),$$

oder $\frac{1}{a}\log.\frac{ay-bz}{cz-ax}=\phi(z)$.

Daher iſt auch die Zahl $\frac{ay-bz}{cz-ax}$ eine Function von z. Dieſe bezeichne man durch Z, ſo daß die Integralgleichung ſey $\frac{ay-bz}{cz-ax}=Z$. Dieſe differentiirt giebt

$a[(ay-bx)\partial x+(cz-ax)\partial y+(bx-cy)\partial z]:(cz-ax)^2=\partial Z$.

Der Zähler dieſes Bruches iſt die gegebene Gleichung mit a multiplicirt, alſo iſt $\partial Z=0$, und $Z=C$, eine unveränderliche Größe. Man ſetze $Z=n$, ſo iſt die vollſtändige Integralgleichung,

$$nax+ay-(b+nc)z=0,$$

welche eine neue Größe n enthält, die durch die Integration hinzugekommen iſt.

Mehrere Beyſpiele anzuführen, würde wegen der weitläufigen Rechnung zu vielen Raum wegnehmen. Man ſehe aber Euleri Calc. Integr. T. III. P. I. Sect. 1. cap. 1. und la Croix Integralrechnung, Nr. 698—715.

Zur Geſchichte der Rechnung mit partiellen Differentialquotienten.

59. Euler hat auch zu dieſer feinen analytiſchen Theorie den Grund gelegt, in zwey Abhandlungen de infinitis curvis ejusdem generis, Comm. Acad. Petrop. T. VII. a. a. 1734. 1735. Krumme Linien von einerley Gattung nennt er ſolche, die nicht weiter von einander verſchieden ſind, als in Abſicht auf eine für jede derſelben unveränderliche Linie, welche man den Parameter zu nennen pflegt. Jede algebraiſche Gleichung zwiſchen den veränderlichen z, x und einer unveränderlichen a (welche aber auch mehrere gegebene enthalten mag) ſtellt unendlich viele Curven dar, nachdem

a verſchiedene Werthe erhält. Allein bey dieſen (welche in der That nur Varietäten ſind) bleibt Euler nicht ſtehen, ſondern er ſucht Gleichungen auf, in welchen z eine willkürliche Function von x und a iſt, wiewol er ſich über dieſe große Erweiterung des Begriffs von Curven einerley Art nicht erklärt. Wenn $z = \varphi\left(\frac{x}{a} + c\right)$ iſt, ſo gehören unter dieſelbe Gattung die Linien, deren Gleichung iſt $z = \frac{x}{a} + c$; $z = \left(\frac{x}{a} + c\right)^2$; $z = \left(\frac{x}{a} + c\right)^3$. u. ſ. f. auch alle, in welchen der Werth von z aus $\frac{x}{a} + c$, als einer untheilbaren Größe betrachtet, zuſammengeſetzt iſt, auch circulare und logarithmiſche und unbenannte Functionen ſind. Dieſes mag aber bey Seite geſetzt werden, da es nur eine Benennung betrifft.

60. Es ſey $\partial z = P\partial x$, wo P eine Function von x und a iſt, die aber nicht bekannt iſt, weil $P\partial x$ ſich nicht integriren läßt. Nimmt man a veränderlich, ſo wird $\partial z = P\partial x + Q\partial a$, wo $Q = \int \frac{\partial P}{\partial a}\partial x$ iſt (Differentialgleichung, 20.). Nun ſucht Euler ſolche Werthe für P und Q, wodurch die Formel $P\partial x + Q\partial a$ ſich integriren läßt. Zuerſt ſetzt er in der zweyten Abhandlung $Q = -\frac{Px}{a}$, wodurch iſt $\partial z = P\left(\partial x - \frac{x\partial a}{a}\right)$. Damit dieſe Formel ſich integriren laſſe, muß $P = \frac{1}{a}$ ſeyn, und es iſt $z = \frac{x}{a} + c$, wo c eine willkürliche Conſtante iſt. Anſtatt des Multiplicators $\frac{1}{a}$ kann man

aber auch den $\frac{1}{a} f'\left(\frac{x}{a}+c\right)$ ſetzen, wo f' ein Functionszeichen iſt. Alſo iſt allgemein $z = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}+c\right)$. Daraus folgert Euler, daß wenn P a eine Function der x und a von keiner Dimenſion iſt, $Q = -\frac{Px}{\partial a}$, und $\partial z = P\partial x - \frac{Px}{a}\partial a$ ſey. Er betrachtet auch mehr zuſammengeſetzte Formeln, wie unter andern dieſe, $\partial z = \partial X f(X+A)$, wo X und A Functionen, jene von x, dieſe von a, ſind; und ſucht verſchiedene ſehr allgemeine Formen für P und Q, bey welchen die Formel $P\partial x + Q\partial a$ ſich integriren läßt. Er bemerkt, daß die Gleichung, $BP = \frac{\partial X}{\partial x} f(X+A)$, wo B wie A eine Function von a iſt, zwar noch auf eine Differentialgleichung vom erſten Grade führt, worin aber Producte von zwey Differentialen enthalten ſind. Dann betrachtet er auch ſolche Formen, die auf Differentialgleichungen von höhern Graden führen.

Euler hat die Unterſuchung nicht allgemeiner gemacht, und ſie auf die Differentialgleichungen von drey veränderlichen Größen überhaupt angewandt. Mich wunderts, daß er nicht von der Annahme ausgegangen iſt, daß z oder eine Function von x, y, z eine Function dieſer Größen ſeyn ſolle, und daraus die Differentialgleichung geſucht hat, wie es im Anfange dieſes Artikels geſchehen iſt.

61. D'Alembert kam bey ſeinen Unterſuchungen über die Figur ſchwingender Saiten auf eine Gleichung mit partiellen Differentialen, und zwar auf eine vom zweyten Grade (47.). Man hatte bis dahin dieſe Figur unabhängig von der Zeit betrachtet, in welcher ein Punct der Saiten aus der von der Axe entfernteſten Lage in

Digitized by Google

irgend eine andere gekommen iſt. Die Ordinaten der Curve ſind eines Theils Functionen der Abſciſſe allein, andern Theils aber auch Functionen der Zeit, alſo Functionen der Abſciſſe und der Zeit zugleich. D'Alembert integrirte zuerſt eine Gleichung mit partiellen Differentialen, wenn ſie in der jetzt gewöhnlichen Form gegeben wird. Mémoires de l'Acad. de Berlin, a. 1747. p. 216, à Berlin 1749.

Beſonders aber ward man durch d'Alemberts neue Theorie über den Widerſtand flüſſiger Materien, die 1752 herauskam, überzeugt, daß manche Aufloſungen, welche man bis dahin für allgemeine gehalten hatte, es nicht waren, und nun gewannen die phyſiſch-mathematiſchen Unterſuchungen durch den neuen Zweig der Integralrechnung eine ganz neue Geſtalt.

62. Euler ergriff die neue Theorie mit Eifer, und lieferte eine ausführliche Abhandlung darüber in den Petersburger neuen Commentarien, T. IX. a. a. 1763. Er machte darüber eine Bemerkung, die für die Anwendung auf phyſiſche Gegenſtände wichtig iſt. Er behauptete, daß nichts die Beſtimmung der willkürlichen Functionen einſchränken dürfe, welche in die allgemeine Integrale der Gleichungen mit partiellen Differentialen hineinkommen. Man müſſe auch irreguläre und nicht ſtetige Functionen (discontinuas) gelten laſſen, dergleichen die Ordinaten einer aus freyer Hand gezogenen krummen Linie in Abſicht der Abſciſſen ſeyn würden. (Comm. novi Petrop. T. XI. de usu functionum discontinuarum in Analysi. Calc. integr. T. III. §. 37.) Er dringt ſehr oft auf dieſe ganz uneingeſchränkte Annahme. Seine paradore Behauptung fand Widerſpruch. D'Alembert insbeſondre wollte ſie nicht zugeben. Die Streitfrage galt vornämlich die Figur ſchwingender Saiten. Die Verhandlungen darüber findet man in den Berliner und Petersburger akademiſchen Schriften, und in den Opuscules von d'Alembert. De la Grange trat in ſeinen Unterſuchungen über die Natur und die Fortpflanzung des Schalles, in

den Miscellaneis Taurinensibus, T. I. II. Eulern bey, näherte ſich aber nachher, veranlaßt durch eine anders angeſtellte Analyſis, der Meynung d'Alemberts. Condorcet, in den Mém. de l'Acad. des Sc. 1771. de la Place in denſelben für 1779 fügten jeder gewiſſe Einſchränkungen der Veränderlichkeit der willkürlichen Functionen bey. Der Abbate de Caluſo trat in den Mém. de Turin für 1786 und 1787 größtentheils Condorcet bey. Monge ſuchte durch geometriſche Conſtructionen in den Turiner Memoiren, T. IV. zu zeigen, daß die willkürlichen Functionen nicht ſtetig zu ſeyn brauchen, welches er in den Mém. préſentés, T. VII. und IX. noch mehr entwickelte. Die Petersburger Akademie gab im J. 1787 als Preisfrage die Unterſuchung über die willkürlichen Functionen auf. Arbogaſt, damahls Profeſſor zu Colmar, erhielt den Preis. Die Preisſchrift iſt 1791 zu Petersburg gedruckt, in franzöſiſcher Sprache, 96 S. 4. ſtark. Die zunächſt gewürdigte, lateiniſch abgefaßte, 28 S. ebendaſ. iſt nach Montücla's Angabe von dem Cavaliere Lorgna in Verona. Beide Verfaſſer pflichten Eulern bey. Die erſtere enthält zugleich viele nützliche Erläuterungen über die Gleichungen mit partiellen Differentialen ſelbſt, von welchen manche als Beyſpiele angeführt und durch geometriſche Conſtructionen dargeſtellt ſind. — Charles ſucht in den Mém. préſentés, T. X. darzuthun, daß alle noch ſo irreguläre und unzuſammenhängende Functionen es nur dem Scheine nach ſind, weil das Geſetz ihrer Bildung zu ſehr zuſammengeſetzt ſey, als daß man es darſtellen könnte.

63. Ich wage es kaum, nach ſolchen angeſehenen Analyſten, noch etwas über die Streitfrage von meinen Gedanken beyzufügen. Da die Auflöſung der Gleichungen mit partiellen Differentialen auf willkürliche Functionen führt, ſo müſſen dieſe der Gattung nach auch veränderlich ſeyn können. Dieſes vermehrt die Anzahl der veränderlichen Beſtimmungen um eine. Sind drey veränderliche Größen, x, y, z, mit einander durch eine

willkürliche Function einiger unter ihnen oder aller verbunden, ſo iſt es ſo gut, als wenn man eine Gleichung zwiſchen vier veränderlichen Größen t, x, y, z hätte. Dieſe können ſich aber mit einander nicht anders als ſtetiger Weiſe verändern. Sind die Veränderungen von t, x, y unendlich klein, ſo iſt es nothwendig die Veränderung von z auch. Es ſey z. B. $z = \varphi(ax + by)$, und die Function ſey irgend eine Potenz von $ax + by$, ſo iſt es nicht nöthig, den Exponenten dieſer Potenz unveränderlich zu nehmen, allein man wird ihn auch nicht plötzlich ſich ändern laſſen können. Iſt er

$$\begin{matrix} & 1, & 2, & 3, & 4, & \text{u. ſ. f.} \\ \text{für} & x', & x'', & x''', & x^{\text{IV}} & — \\ & y', & y'', & y''', & y^{\text{IV}} & — \end{matrix}$$

ſo muß für die zwiſchen dieſen fallenden Werthe von x und y auch der Exponent der Potenz zwiſchen die jenen zugehörigen Werthe des Exponenten fallen. Es ſteht nicht in des Geometers Macht, eine nach einem beſtimmten Geſetze angefangene krumme Linie abzubrechen. Was man in der ſinnlichen Zeichnung thun kann, iſt in der reinen Vorſtellung nicht möglich. Eine Linie aus verſchiedenartigen Portionen zuſammenſetzen heißt mehrere vollſtändige Linien ſich ſchneiden laſſen, und die Segmente zwiſchen je zwey Durchſchnittspuncten zu einem Aggregate verbinden. In der Natur mag es ſehr wohl Linien geben, die keine ſtetige Fortſchreitung der Veränderungen, der veränderlichen Größen, auch nicht der Krümmung enthalten; das rührt von äußern Einwirkungen her, die der Geometrie fremd ſind. Eine geſpannte Saite mag durch äußere Einwirkung die Geſtalt zweyer geraden ſich ſchneidenden annehmen; ſie mag, wenn jene äußere Kraft entfernt wird, ſich in ein Polygon von vielen kleinen geraden Linien umgeſtalten, und eine ſolche Geſtalt bis zu der Coincidenz mit der geraden durch die Befeſtigungspuncte behalten, eine ſolche Figur iſt nicht mehr eine rein geometriſche. Die ganz willkürlichen Functionen laſſen gar nichts über den Zuſammenhang der Größen zu gedenken übrig.

64. Die Veränderlichkeit der Functionen mag zu der Einſchaltung in ſehr irregulären Fortſchreitungen nützlich gebraucht werden können.

65. So wie bey der Integration totaler Differentialgleichungen die Conſtanten den beſondern Bedingungen einer Aufgabe gemäß beſtimmt werden, ſo geſchieht dieſes auch bey der Beſtimmung der willkürlichen Functionen, die in den Integralen der partiellen Differentialgleichung in die Stelle jener Conſtanten treten. Gewöhnlich kommt es hierbey auf die Integration einer Gleichung mit endlichen Differenzen an. Condorcet hat ſich mit dieſer Unterſuchung viel beſchäftigt. Mém. de l'Acad. des Sc. 1770. 1771. 1772. Mémoires présentés, T. VII.

66. Zum ausführlichern Unterrichte dienen die oft angeführten Lehrbücher von Cousin. T. I. Ch. 3. T. II. Ch. 4, 5, 6. Bossut T. II. p. 351 — 434. Lacroix, T. II. p. 476 — 624. auch deſſelben Traité élémentaire de Calcul diff. et intégral, p. 438 — 458. vornämlich der dritte Theil von Eulers Integralrechnung, worin aber die Benennung, partielle Differentiale, nicht gebraucht iſt.

Von la Grange ſind drey lehrreiche Abhandlungen über die Integration der Gleichungen mit partiellen Differentialen in den Mémoires de l'Acad. de Berlin 1772, 1779 und 1785. Eine Methode aus vollſtändigen Gleichungen zwiſchen zwey veränderlichen und gegebenen Größen durch Wegſchaffung einiger Conſtanten, die als veränderliche behandelt werden, eine ganz allgemeine Gleichung mit willkürlichen Functionen herzuleiten, in eben der Sammlung für 1774, in dem Mémoire sur les intégrales particulieres, Article V. und für 1779 in einem Mém. sur différentes questions d'Analyse, Art. V.

In den Mémoires de l'Acad. des Sc. 1773 iſt eine Abhandlung von la Place, und in dem Jahrgange für 1787 eine von Legendre enthalten.

Zuſatz über die allgemeine Gleichung für Revolutions-Flächen, zu 18.

In dem Artikel, krumme Fläche, 48. iſt eine allgemeine Gleichung für alle krumme Flächen, die durch Umdrehung einer Curve um eine Axe entſtehen, nach Monge angeführt. Hier füge ich, wegen des davon in (18.) gemachten Gebrauchs den Beweis bey.

Eine krumme Fläche werde durch eine Curve, die ſich um ihre Axe dreht, beſchrieben. Den Umfang jedes auf dieſe Axe ſenkrechten Kreisſchnittes kann man ſich vorſtellen, als den Durchſchnitt zweyer Kugelflächen, deren Mittelpuncte auf der Drehungsaxe liegen, weil der Durchſchnitt zweyer Kugelflächen immer ein Kreis iſt. Es iſt der gemeinſchaftliche Durchſchnitt jeder der beiden Kugelflächen mit einer Ebene, die durch einen der Durchſchnittspuncte ſenkrecht auf die gerade durch ihre Mittelpuncte ſteht.

Da die Kreislinien auf der krummen Fläche eine ſtetige Folge bilden, ſo laſſe man die Halbmeſſer der zugehörigen Kugelflächen und die Coordinaten zu ihren Mittelpuncten ebenfalls in einer ſtetigen Folge ſich verändern, indem jede der Kugelflächen mit der vorhergehenden einen der Kreisumfänge und mit der nachfolgenden den nächſten Kreisumfang giebt. Da die Lage der Axe durch zwey Gleichungen zwiſchen ihren drey Coordinaten gegeben wird, ſo kann man zwey derſelben wegſchaffen, und es iſt nun eine Relation zwiſchen drey veränderlichen Größen vorhanden, nämlich der Ordinate an der Curve, welche der Halbmeſſer eines Kreisumfanges auf der krummen Fläche iſt, dem Halbmeſſer der dieſe Fläche ſchneidenden Kugel und der einen Coordinate zu ihrem Mittelpuncte.

Die Coordinaten zu der krummen Fläche ſeyn x, y, z, welche zugleich zu der ſchneidenden Kugelfläche gehören; die Coordinaten zu der Drehungsaxe ſeyn p, q, r, und die beiden Gleichungen für dieſe gerade Linie ſeyn, $p = ar + \alpha$; $q = br + \beta$. Der Halbmeſſer einer

Kugel, deren Mittelpunct in der Axe liegt, ſey $= u$. Die Coordinaten dieſes und jedes andern Mittelpuncts ſind ebenfalls p, q, r. Daher iſt $(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2 = u^2$. Denn der Halbmeſſer der Kugel iſt die Diagonale eines rechtwinklichten Parallelepipedum, deſſen Seiten $x-p$; $y-q$; $z-r$ ſind, welche auch entgegengeſetzte Lagen in Abſicht auf die hier angenommenen haben können.

Man ſetze für p und q ihre Werthe, ſo iſt die Gleichung für die Kugelfläche,

$$\begin{aligned}&(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2\\ &-2r[a(x-\alpha) + b(y-\beta) + z]\\ &+(1 + a^2 + b^2)r^2 - u^2 = 0.\end{aligned} \qquad (A).$$

Da der Halbmeſſer jedes Kreiſes auf der krummen Fläche durch x, y, z gegeben wird, ſo vertritt dieſe Gleichung die Stelle einer unmittelbaren Gleichung zwiſchen jenem Halbmeſſer, dem Halbmeſſer der Kugel, und der Höhe ihres Mittelpunctes über der Ebene der x, y. Die Größe des Halbmeſſers der Kugel hängt alſo für jeden Punct der krummen Oberfläche oder jenen Kreisumfang auf derſelben von r, das iſt, von der Lage ihres Mittelpunctes ab. Daher kann man u als eine Function von r, daher auch $(1 + a^2 + b^2)r^2 - u^2$ als eine Function von r betrachten, oder ſetzen $(1 + a^2 + b^2)r^2 - u^2 = F(r)$. Dadurch wird die Gleichung (A) dieſe:

$$\begin{aligned}&(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2\\ &-2r[a(x-\alpha) + b(y-\beta) + z) + F(r) = 0.\end{aligned} \qquad (B).$$

Da zu demſelben Kreisumfange auf der krummen Fläche zwey unendlich wenig verſchiedene Kugeln gehören, das iſt, zwey nächſte Höhen, r, ihrer Mittelpuncte über der Ebene der x, y oder p, q, ſo giebt die Differentiirung einen Werth für eine andre Function von r. Es iſt nämlich

$$-2\partial r[a(x-\alpha) + b(y-\beta) + z) + F'(r).\partial r = 0,$$

wo F' das Functionszeichen in dem Differential von $F(r)$ iſt. Es iſt alſo

$$2[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+z]=F'r.$$

Umgekehrt iſt r eine Function von

$$a(x-\alpha)+b(y-\beta)+z.$$

Daher iſt in der Gleichung (B) die Summe der drey Quadrate eine Function eben dieſer Größe, das iſt $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=\varphi[a(x-\alpha)+b(y-\beta)+z]$.

Wenn die Drehungsaxe durch den Anfang der Coordinaten geht, ſo iſt $\alpha=0$; $\beta=0$, und die gefundene Gleichung verwandelt ſich in dieſe,

$$x^2+y^2+z^2=\varphi(ax+by+z).$$

Geht die Drehungsaxe durch diejenige der z, ſo iſt (weil $p=0$, $q=0$ iſt) auch $a=0$; $b=0$, und $x^2+y^2+z^2=\varphi(z)$, daher x^2+y^2 eine Function von z, und umgekehrt z eine Function von x^2+y^2 iſt, d. i. $z=\chi(x^2+y^2)$.

Partitio numerorum, ſ. Zerlegung der Zahlen.

Pascals Dreyeck und Tabelle, ſ. arithmetiſches Dreyeck.

Pelecoides figura, axtähnliche Figur, beſteht aus einem Halbkreiſe und zwey Quadranten, die ihre convexe Seite der concaven des Halbkreiſes zukehren, und ſich an einem ihrer Endpuncte berühren. Der Jeſuit **Bettini** führt ſie in ſeinen Apiariis, Progymnasmate V, VI, nebſt andern geometriſchen Spielereyen an. Die Figur iſt durch Zuſetzen und Wegnehmen gleicher Segmente quadrirbar. Kraft hat ſie in ſeiner Geom. sublim. §. 169. angeführt.

Pells Aufgabe iſt eine zur unbeſtimmten Analytik gehörige, die Formel $axx+1$ zu einem Quadrate in ganzen Zahlen zu machen, wo nur a kein Quadrat oder negativ ſeyn darf. Pells Auflöſung iſt aber in manchen Fällen ſehr langwierig. Man ſehe Eulers Algebra, den Abſchnitt von der unbeſtimmten Analytik, §. 98. ff.

Eine ſehr kunſtreiche Methode enthält deſſelben Abhandlung, de usu novi algorithmi in problemate Pelliano solvendo. Comm. novi Acad. Petrop. T. XI. worin die Kettenbrüche zur Ausziehung der Quadrat-Wurzeln angewandt werden. Euler gebraucht zum Beyſpiele die Aufgabe, zwey Zahlen p und q zu finden, ſo daß $pp = 157\,qq + 1$ ſey. Hier iſt der kleinſte Werth für p eine Zahl von 14 Ziffern, und q eine von 13 Ziffern.

Pell war ein angeſehener Mathematiker in England, geb. 1610, geſt. 1685. Er hat ſich unter andern mit der unbeſtimmten Analytik beſchäftigt, und gedachte vom Diophantus eine neue Ausgabe zu liefern. In ſeiner vermehrten und verbeſſerten Ausgabe von Rahns Algebra, die Brancker aus dem Deutſchen überſetzt hatte, kommt vieles über jenen Zweig der Analyſis vor, wie man aus dem Auszuge ſieht, den Wallis in ſeiner Algebra, Cap. 57. davon giebt. Dieſer nennt den deutſchen Verfaſſer Rhonius. Pell hat auch manches über die Aſtronomie geſchrieben.

Pentadik, ein Zahlenſyſtem, worin alle Zahlen durch Potenzen von 5 und deren Vielfache durch 2, 3, 4 dargeſtellt werden. Es iſt nie in Gebrauch gekommen, es müßte denn bey einem wilden Volke geſchehen ſeyn. Bey den Sereren in Senegambien glaubt man es gefunden zu haben.

Pentaedrum iſt von einigen ein Prisma genannt, deſſen Grundflächen gleichſeitige Dreyecke ſind.

Pentagonalzahl iſt eine Gattung der Polygonalzahlen, deren Form iſt $\frac{3nn - n}{2}$. Schränkt man dieſe Form nicht blos auf poſitive Werthe von n ein, wie es zu geſchehen pflegt, ſo ſind darunter auch die Zahlen von der Form $\frac{3nn + n}{2}$ begriffen. Euler hat eine b-

ſondere Abhandlung über die Pentagonalzahlen in dieſer erweiterten Bedeutung geliefert: de mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium. Acta Acad. Petr., T. IV. P. I. a. a. 1780. Er hat ſonderbare Beziehungen dieſer Zahlenreihe auf andere ganz fremde Reihen entdeckt.

Die Reihen der Pentagonalzahlen nach beiden Formeln ſind

0, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70 etc.
0, 2, 7, 15, 26, 40, 57, 77 etc.

Ordnet man dieſe Zahlen nach ihrer Größe, ſo entſteht daraus eine ganz irreguläre Reihe:

0, 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40, etc.

Dieſe Zahlen finden ſich auch in einer Formel für die Summe aller Theiler einer Zahl, die Einheit und die Zahl ſelbſt mit einbegriffen. Man bezeichne die Zahl durch N, die Summe der Theiler durch $\int N$, ſo iſt

$$\int N = \int(N-1) + \int(N-2) - \int(N-5) - \int(N-7) + \int(N-12) + \int(N-15) - \int(N-22) - \text{etc.}$$

Dieſe Formel hat Euler in den Comm. novis Ac. Petr. T. V. erwieſen. Sie wird ſo weit fortgeſetzt, bis daß die Zahlen aufhören poſitiv zu ſeyn. Trifft man auf ein Glied $\int(N-N)$, ſo ſetzt man dafür die Zahl N ſelbſt.

Z. B. Es ſey $N = 13$, ſo iſt

$$\int 13 = \int 12 + \int 11 - \int 8 - \int 6 + \int 1.$$

das iſt, $\int 13 = 28 + 12 - 15 - 12 + 1 = 14.$

Es ſey $N = 12$, ſo iſt

$$\int 12 = \int 11 + \int 10 - \int 7 - \int 5 + \int 0,$$

das iſt,

$$\int 12 = 12 + 18 - 8 - 6 + 12 = 28.$$

Euler hat ferner in den Actis Petr. T. IV. gefunden, daß das Product

$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)$. etc.

entwickelt die Reihe

$1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} +$ etc.

giebt, wo die Exponenten gerade die Pentagonalzahlen nach beiden Formeln ſind.

Pentagonum, Pentangulum, eine geradlinichte Figur von fünf Seiten, ſ. Vieleck.

Pentedecagonum, eine in funfzehn Seiten eingeſchloſſene geradlinichte Figur.

Perfectus numerus, ſ. vollſtändige Zahl.

Pericauſtica iſt eine Curve, die aus der Cauſtica oder Brennlinie einer gegebenen Curve für einen ſtrahlenden Punct auf folgende Art entſteht. Der zurückgeworfene Strahl, von dem Zurückwerfungspuncte bis an die Brennlinie genommen, werde auf den verlängerten einfallenden Strahl jenſeits der zurückwerfenden Curve getragen, ſo iſt ihr Endpunct in der Pericauſtica. Dieſe iſt das Bild der Brennlinie für ein in dem ſtrahlenden Puncte befindliches Auge, wenn die zurückwerfende Linie der Spiegel iſt. Jakob Bernoulli hat dieſe Erzeugungsart einer Curve und ähnliche erdacht. Operum T. I. Nr. 49. Sie iſt nicht weiter als für die logarithmiſche Spirale gebraucht.

Perimeter iſt der Umfang einer Figur.

Periode, cykliſche, iſt eine Verbindung verſchiedener Zahlenreihen (Cyklen), deren jede mit 1 anfängt, bis zu ihrer Endzahl fortgeht, und ſo oft wiederholt wird, bis alle zugleich jede an ihre Endzahl gekommen ſind; wobey die Periode ſich ſchließt, und eine neue, der erſten ganz gleiche, wieder anfängt. Auf dieſe folgen dann die dritte, vierte Periode, u. ſ. f. ohne Ende.

Z. B. die Zahlenreihen oder Cyklen ſeyn
I. 1, 2, 3. II. 1, 2, 3, 4, 5. III. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ſo entſteht daraus die erſte Periode

(1)	1.	1.	1	(35)	2.	5.	7.
(2)	2.	2.	2	:	:	:	:
(3)	3	3	3	(105)	3.	5.	7.
:	:	:	:				
(15)	3.	5.	1				
:	:	:	:				

wo die in Klammern eingeſchloſſenen Zahlen die Ordnungszahlen der Glieder der Periode ſind.

1. Die Glieder oder Complexionen einer Periode beſtehen aus ſo vielen Zahlen als Cyklen vorhanden ſind. Jede Zahl iſt der Überſchuß der Ordnungszahl über ein Vielfaches (oder das Einfache) der Endzahl; iſt dieſer Überſchuß = 0, ſo wird ſtatt 0 die Endzahl ſelbſt geſetzt.

2. Aus der Ordnungszahl einer Complexion findet man daher ſehr leicht die Zahlen in derſelben, z. B. die 83ſte Complexion in dem gegebenen Exempel iſt 2, 3, 6.

3. Aus den Zahlen in einer Complexion die Ordnungszahl zu finden, iſt etwas ſchwer. Die Aufgabe iſt aus den Reſten, die eine unbekannte Zahl durch zwey, drey oder mehrere gegebene Zahlen dividirt, übrig läßt, die Zahl ſelbſt zu finden. Die Aufgabe gehört unter die unbeſtimmten. Dieſelbe Complexion kommt in jeder Periode vor. Was alſo unbeſtimmt bleibt, iſt die Ordnungszahl der Periode. In jeder Periode aber wird die Ordnungszahl einer beſtimmten Complexion durch dieſe gegeben. In dem obigen Exempel ſieht man, daß der erſte Cyklus, 1, 2, 3, fünfmahl wiederholt werden muß, ehe die Endzahl 5 aus dem zweyten Cyklus mit der Endzahl 3 des erſten zuſammentrifft, und die partielle Periode beider Cyklen wieder mit 1, 1 anfängt. Dieſe Periode muß 7 mahl wiederholt werden, ehe die Endzahl 7 des dritten Cyklus 1 . . . 7 mit 3, 5 zuſammentrifft. Denn die 16te Complexion iſt 1, 1, 2; die 31ſte iſt 1, 1, 3; die 46ſte iſt 1, 1, 4, u. ſ. w. immer eine andere, daher auch alle zwiſchen liegende verſchieden ſind.

4. Man muß hierbey bemerken, daß die Anzahl der Complexionen in einer Periode nur dann dem Producte

der Endzahlen gleich iſt, wenn dieſe Primzahlen ſind, oder doch keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben. Denn in dieſem Falle läßt keine andere Zahl als dieſes Product, mit jeder der Endzahlen dividirt, den Reſt o oder, welches hier daſſelbe iſt, die Endzahl ſelbſt. Sonſt aber iſt die Anzahl der Complexionen in jeder Periode die kleinſte Zahl, in welcher alle Endzahlen ohne Reſt aufaufgehen.

Ein Exempel für den erſten Fall wird uns auf die Form der Ordnungszahl leiten.

5. Es ſey $N = 15\,A + a$, und auch $N = 19\,B + b$, die Werthe von N zu finden. Die Zahlen ſind alle ganze, wie hier durchgehends angenommen wird.

Aus der Gleichheit beider Formeln iſt

$A = B + \frac{4\,B + b - a}{15}$. Daher iſt $4\,B + b - a = 15\,C$, und $B = 3\,C + \frac{3\,C - b + a}{4}$. Daraus ferner $3\,C - b + a = 4\,D$, und $C = D + \frac{D - a + b}{3}$.

Hieraus $D - a + b = 3\,E$, und $D = 3\,E + a - b$, wo für E jede ganze Zahl genommen werden mag. Nun iſt rückwärts $C = 4\,E + a - b$; und $B = 15\,E + 4\,(a - b)$. Alſo iſt $N = 15 \,.\, 19\,E + 76\,a - 75\,b$. Um den ſubtractiven Theil in einen additiven zu verwandeln, ſetze man $15 . 19\,b - 15 . 19\,b$ hinzu, ſo iſt $N = 15 . 19\,(E - b) + 76\,a + 210\,b$. Hier iſt $76 = 15 \,.\, 5 + 1 = 4 . 19$; und $210 = 19 . 11 + 1 = 14 . 15$. Daraus ſieht man, wie die Bedingungen der Aufgabe erfüllt werden. Die Zahl E—b iſt willkürlich, und iſt = o für die erſte Periode.

6. Die Coefficienten von B, C, D in den Brüchen, die ganze Zahlen ausdrucken ſollen, ſind die Reſte, welche man findet, wenn man den Bruch $\frac{19}{15}$ auf die kleinſten Zahlen zu bringen ſucht, wo in den ſucceſſiven

Diviſionen, ein Diviſor zum Dividendus und der vorhergehende Reſt zum Diviſor gemacht wird.

7. Das berechnete Beyſpiel zeigt uns die allgemeinen Formeln für eine Periode von zwey Cyklen. Es ſey $N = pA + a$, und $N = qB + b$, ſo iſt ſowol

$$N = pqC + (p\alpha + 1) + (q\beta + 1)b,$$

als

$$N = pq . C + mq . a + np . b,$$

wo $p\alpha + 1 = mq$, und $q\beta + 1 = np$ ſind, ſo daß α, β, m, n noch unbeſtimmt bleiben, aber möglichſt klein genommen werden müſſen. Denn die Zahl N läßt ſolchergeſtalt, durch p dividirt, den Reſt a, durch q den Reſt b. Die Forderungen ſind zwar faſt dieſelben wie in der Aufgabe ſelbſt, aber dadurch einfacher, daß ſtatt der unbeſtimmten a und b hier die Einheit gekommen iſt.

8. Exempel. Es ſoll ſeyn $N = 19A + a = 28B + b$, ſo iſt $19\alpha + 1 = 28m$, und $28\beta + 1 = 19n$. Die erſtere Gleichung giebt $9m - 1 = 19\gamma$; $\gamma + 1 = 9\delta$; $\gamma = 8$, und daher $m = 17$. Die andere Gleichung giebt $9\beta + 1 = 19\gamma$; $\gamma - 1 = 9\delta$; $\gamma = 1$; $\beta = 2$, und $n = 3$. Alſo iſt

$$N = 19.28\,C + 17.28\,a + 3.19\,b.$$

Die Periode dieſer beiden Cyklen iſt die des Mondscyklus und des Sonnencyklus in der Chronologie, welche die Victoriſche oder Dionyſiſche genannt wird. Sie beträgt 19.28, das iſt, 532 Jahre.

9. Wenn das Aggregat $mqa + npb$ mehr als eine Periode beträgt, ſo wird das Product pq ſo oft davon weggeworfen, als es angeht, um die Ordnungszahl in einer einzelnen Periode zu erhalten, oder in der erſten ſchlechthin. Dieſe Bemerkung gilt auch für Perioden von mehreren Cyklen.

10. Es ſeyn drey Cyklen mit einander verbunden; die Endzahlen ſeyn p, q, r; die Diviſionsreſte oder die Zahlen einer Complexion ſeyn a, b, c, ſo daß

$N = pA + a = qB + b = rC + c$ iſt. Es ſoll die daraus zuſammengeſetzte Form von N gefunden werden.

Wenn p, q, r keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben, ſo beſteht eine Periode aus pqr Gliedern oder Complexionen. Nach der Analogie der Auflöſung für zwey Cyklen iſt

$N = pqrD + (p\alpha + 1)a + (q\beta + 1)b + (r\gamma + 1)c,$

und

$N = pqrD + lqr.a + mpr.b + npq.c,$

wo $lqr = p\alpha + 1$; $mpr = q\beta + 1$; und $npq = r\gamma + 1$ iſt. Denn bey dieſen Formen der Coefficienten von a, b, c läßt N durch p dividirt den Reſt a, durch q den Reſt b, durch r den Reſt c.

11. Exempel. Es ſey $N = 15A + a = 19B + b = 28C + c$. Es muß nun ſeyn $15\alpha + 1 = 532l$; $19\beta + 1 = 420m$; $28\gamma + 1 = 285n$.

Die erſte Gleichung giebt $\alpha = 35l + \frac{7l - 1}{15}$;

alſo $7l - 1 = 15\delta$; daher $\frac{\delta + 1}{7}$ eine ganze Zahl ſeyn muß. Dieſes giebt ſogleich $\delta = 6$; wodurch $l = 13$; $lqr = 6916$, welche Zahl durch 15 dividirt zum Reſte 1 läßt, wie es ſeyn muß.

Die zweyte Gleichung giebt $2m - 1 = 19\delta$, alſo $\delta = 1$; $m = 10$, und $mpr = 4200$, welche durch 19 dividirt zum Reſte 1 giebt.

Die dritte Gleichung giebt $5n - 1 = 28\delta$, oder $5n = 28\delta + 1$; daher $3\delta + 1 = 5\varepsilon$, und $\delta = 3$, alſo $n = 17$, und $npq = 4845$. Alſo iſt

$N = 15.19.28 D + 6916a + 4200b + 4845c.$

Dieſe Aufgabe kommt in der Chronologie vor, nämlich aus den drey Kennzeichen eines Jahrs, der Indiction, der güldnen Zahl und der Zahl des Sonnencyklus (eigentlicher Wochencyklus) die Ordnungszahl deſſelben in der Julianiſchen Periode zu finden. Der

Cyklus der Indictionen hält 15 Jahre, der Mondscyklus 19, der Sonnencyklus 28; die ganze Periode 7980 Jahre.

12. Man ſieht ſchon hinlänglich, wie für Perioden von mehr als drey Cyklen zu verfahren iſt. Es iſt für vier Cyklen, deren Endzahlen p, q, r, s ſind,

$$N = pqrsE + (p\alpha + 1)a + (p\beta + 1)b + (r\gamma + 1)c + (s\delta + 1)d,$$

und zugleich

$$N = pqrsE + iqrs.a + lprs.b + mpqs.c + npqr.d.$$

13. Wenn unter den Endzahlen p, q, r, s, etc. einige einen gemeinſchaftlichen Theiler haben, ſo läßt ſich die vorher angewandte Methode nicht gebrauchen. Denn es ſey z. B. $p = 14$; $q = 21$, ſo kann man nicht ſetzen $p\alpha + 1 = mq$; das iſt, $14\alpha + 1 = 21m$. Denn dieſes gäbe, daß die Einheit durch den gemeinſchaftlichen Theiler von 14 und 21 oder überhaupt durch den von p und q theilbar ſeyn ſollte. Die Form für die Ordnungszahlen in Perioden von dieſer Beſchaffenheit iſt eine andere als die für Perioden, in welchen alle Endzahlen Primzahlen unter ſich ſind.

14. Es ſey $N = pA + a = qB + b$, wo p und q einen gemeinſchaftlichen Factor d haben ſollen. Iſt $q = mp + n$, ſo hat n denſelben Factor wie p und q haben, oder iſt auch dieſer ſelbſt. Nun iſt $pA = mpB + nB + b - a$. Da p und n ſich durch d theilen laſſen, ſo iſt auch $b - a$ durch d theilbar, ſo daß d und b nicht ganz unabhängig von einander ſind. Übrigens iſt das Verfahren, N durch die Reſte a und b darzuſtellen, eben daſſelbe, wie in (5.).

15. Exempel. Es ſey $N = 14A + a = 21B + b$, ſo iſt $7B + b - a = 14C$. Hieraus iſt $21B = 42C + 3(a - b)$, und $N = 42C + 3a - 2b$, oder, wenn man von dem unbeſtimmten Vielfachen 42C

einmahl $42\,b$ wegnimmt, und zu $-2b$ ſetzt, $N = 42C + 3a + 40b$. Dieſe Formel durch 14 dividirt, giebt zum Reſte $3a + 12b = 15a + 12(b - a)$. Da $b - a$ ſich durch 7 theilen laſſen muß, ſo iſt der Reſt von der Diviſion der Zahl N durch 14 blos a. Dieſelbe Zahl durch 21 dividirt, giebt zum erſten Reſte $3a + 19b = 3(a - b) + 22b$. Hier iſt $3(a - b)$ ein Vielfaches von 21 oder 21 ſelbſt, alſo läßt die Zahl N durch 21 getheilt den Reſt b.

16. Exempel. Es ſey $N = 12A + a = 45B + b$, ſo iſt $a - b$ oder $b - a$ ein Vielfaches von 3. Es ſey $b - a = 3c$, ſo iſt $4A = 15B + c$, und $3B + c = 4C$. Ferner $C - c = 3D$. Folglich $4C = 12D + 4c$; $3B = 12D + 3c$; alſo $N = 180D + 45c + b = 180D - 15a + 16b$, oder $N = 180D + 165a + 16b$. Dieſe Formel durch 12 dividirt giebt zum erſten Reſte $9a + 4b = 13a + 4(b - a)$, zum zweyten a. Eben dieſelbe giebt durch 45 dividirt zum Reſte $30a + 16b = 30(a - b) + 46b$, das iſt, b.

17. Wenn drey Cyklen mit einander zu verbinden ſind, deren Endzahlen gemeinſchaftliche Diviſoren haben, ſo ſuche man erſtlich für zwey derſelben den allgemeinen Ausdruck einer Complexion, betrachte dieſen als für einen einfachen Cyklus gehörig, und ſuche dann für dieſen und den dritten Cyklus die Form der Complexion. Auf dieſe Art verfahre man auch für vier und mehrere Cyklen.

18. Exempel. Es ſey $N = 14A + a = 21B + b = 30C + c$. Die Reſte a, b, c hängen hier von einander ab, ſo daß $a - b$ durch 7; $a - c$ durch 2; $b - c$ durch 3 theilbar iſt. Die beiden erſten Formeln geben $N = 42D + 3a + 40b$. Es ſey $3a + 40b = d$, alſo $N = 42D + d$, ſo iſt $c - d$ durch 6 theilbar. Man ſetze $c - d = 6e$. Da $30C + c = 42D + d$ iſt, ſo iſt $12D + d - c = 30E$, das iſt $2D - e = 5E$. Hieraus iſt $E + e = 2F$, und $E = 2F - e$. Ferner $D = 5F - 2e$; alſo $N = 210F - 84e + d$, oder $N = 210F + 15d - 14c$, oder $N = 210F + 15d + 196c$.

Für d deſſen Werth, $3a + 40b$, geſetzt, iſt
$N = 210F + 45a + 600b + 196c$, oder
$N = 210F + 45a + 180b + 196c$, wenn nämlich $2.210b$ zu dem Vielfachen $210F$ genommen werden. Der Factor 210 iſt die kleinſte Zahl, worin 14, 21, 30 aufgehen.

Die Zahl $210F + 45a + 180b + 196c$ durch 14 dividirt läßt zum Reſte, $3a + 12b$ oder $15a + 12(b - a)$. Da $b - a$ durch 7 theilbar iſt, ſo iſt $12(b - a)$ durch 14 theilbar, und der Reſt durch 14 iſt a, wie verlangt wird.

Wird eben dieſe Zahl durch 21 dividirt, ſo iſt der Reſt $3a + 12b + 7c = 22b + 3a - 10b + 7c = 22b + 3(a - b) + 7(c - b)$. Da $a - b$ durch 7, und $c - b$ durch 3 theilbar iſt, ſo iſt der Reſt bey der Diviſion durch $21 = b$.

Eben dieſe Zahl durch 30 dividirt giebt zum Reſte $15a + 16c = 15(a - c) + 31c$. Da $a - c$ durch 2 theilbar iſt, ſo iſt der Reſt $= c$.

19. Aufgabe. Es ſoll eine Zahl N gefunden werden, die durch 2, 3, 5, 6, 9, 10 getheilt, folgeweiſe die Reſte 1, 2, 4, 5, 9 gebe, und durch 11 getheilt keinen Reſt laſſe.

Es iſt alſo

$N = (2a + 1)11$; $N = (3b + 1)11$.
$N = (5c + 4)11$; $N = (6d + 1)11$.
$N = (9e + 7)11$; $N = (10f + 9)11$.

Oder N iſt ein Product aus der Zahl 11 in eine Zahl z, welche jede der Formen,

$2a + 1$; $3b + 1$; $5c + 4$;
$6d + 1$; $9e + 7$; $10f + 9$,

hat.

Damit die erſte dieſer Formen Statt finde, müſſen b, e gerade Zahlen ſeyn, c aber eine ungerade. Man ſetze nun $2b$, $2c + 1$, $2e$ ſtatt b, c, e, ſo hat z die Formen

$2a + 1$; $6b + 1$; $10c + 9$; $18e + 7$.

Die erſte iſt in den übrigen Formen, die zweyte in der vierten enthalten. Folglich bleiben blos die beiden letzten, $10c + 9$ und $18e + 7$, ſo daß ſeyn muß

$$10c + 9 = 18e + 7.$$

Daraus folgt $8e - 2 = 10f$, oder $4e = 5f + 1$. Der kleinſte Werth von f iſt $= 3$. Dieſes giebt $e = 4$, und $z = 79$, alſo $N = 79 \cdot 11 = 869$. Dieſes iſt der Werth von N in der erſten Periode von Cyklen, deren Endzahlen 2, 3, 5, 6, 9, 10, 11 ſind. Der Werth in jeder andern Periode iſt das kleinſte Product, worin dieſe Endzahlen enthalten ſind, nebſt der Zahl 869. Jenes Product iſt 2. 3. 5. 3. 11 oder 990. Oder man ſuche die Form für f, wodurch $5f + 1 = 4e$ wird. Dieſe iſt $f = 4g - 1$. Daher $e = 5g - 1$, und $z = 90g - 11$, oder $z = 90g + 79$, und daher $N = 990g + 869$.

20. In dem Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik von Bernoulli und Hindenburg, 3tes St. 1786 iſt von letzterm eine Abhandlung: Verbindungsgeſetz cykliſcher Perioden; Natur und Eigenſchaften derſelben; ihr Gebrauch in der diophanteiſchen oder unbeſtimmten Analytik. Daraus ein ſtarker Auszug in Lorenz Lehrbegriff der Mathematik, I. Th. 2te Abth. S. 406 — 442. Die in dieſem Artikel angewandte Methode hat wenig mit jener gemein.

21. Von der Aufgabe über die Julianiſche Periode ſehe man Käſtners angewandte Mathematik in der Chronologie, §. 46. das Verfahren, welches Wallis zur Auflöſung derſelben angiebt (Operum, T. II. p. 451 — 455) iſt in der That empiriſch. Wallis ſagt, (l. c. p. 236.) daß er die Unterſuchungen aus der diophanteiſchen Algebra nicht ſehr liebe.

Clausberg kommt in ſeiner demonſtrativen Rechenkunſt, §. 1366. auf die Frage, diejenige Zahl zu finden, welche in 7 aufgehet, und in 15 dividirt, 10 übrig läßt, welches er einen harten Knoten nennt. Doch giebt er in §. 1493 die Auflöſung einer ſolchen Aufgabe in einem Exempel.

Peripherie (Perimeter, circumferentia, ambitus) iſt der Umfang einer Figur, einer geradlinichten oder krummlinichten. Im Griechiſchen wird das Wort auch für Kreisbogen gebraucht, weil in dieſer Sprache das Wort τοξον, ein Bogen zum Schießen, nicht zum Kunſtworte gemacht iſt. Euclides L. I. def. 20. L. III. probl. 1. Cleomedes in ſeiner ſphäriſchen Aſtronomie, I B. gebraucht auch den Ausdruck, περιφερια ἀπο του δρακοντος ἐπι καρκινου, die Peripherie vom Drachen bis zum Krebſe.

Permutatio, ſ. Verſetzung.

Perpendikel iſt eine gerade Linie, welche auf eine andere ſenkrecht ſteht, d. i. auf beiden Seiten gleiche Winkel mit ihr macht. Wie ſie gezogen wird, lehret jedes Elementarbuch.

Perpendikel auf eine krumme Linie, ſ. Normale.

Perſpectiv iſt die Theorie von der Entwerfung eines Gegenſtandes auf einer gegebenen Fläche durch gerade Linien, welche von jedem Puncte deſſelben nach einem gegebenen Puncte gezogen werden. Die Durchſchnittspuncte dieſer Linien mit der Fläche geben auf dieſer eine Abbildung des Gegenſtandes. Die Fläche iſt am gewöhnlichſten eine ebene. Man gedenke ſie ſich als eine Glastafel, durch welche man den Gegenſtand betrachtete, und auf welcher man die Puncte bemerkte, wo die zugehörigen Puncte des Gegenſtandes erſcheinen.

1. Die Perſpectiv iſt ein Theil der Lehre von den Projectionen, zu welcher erſtlich noch der Fall gehört, da die gezogenen geraden einander parallel ſind. Ferner begreift dieſe noch verſchiedene Anwendungen in der Aſtronomie, und in der Geographie wegen der Zeichnung einiger Gattungen von Landcharten.

2. Die Perſpectiv pflegt faſt durchgehends zur angewandten Mathematik, und zwar zur Optik, gerechnet zu werden. Doch hat Käſtner ſie ſchon ſeinen Anfangsgründen der Geometrie angehängt. In der That, ſo

weil ſie mathematiſch, nicht techniſch iſt, beruht ſie ganz und gar auf der Elementar-Geometrie. Hauſen hat auch ſchon in der Vorrede zu ſeinen Elementis Matheseos bemerkt, daß die Perſpectiv nichts anders als eine Geometrie der Projectionen iſt. Sie entlehne nichts aus der Optik, als die geradlinichte Richtung des Lichts. Aber auch dieſes iſt nicht nöthig, weil man die Linien, die von dem Gegenſtande nach einem fixen Puncte gezogen werden, ſehr wol als bloße Linien betrachten kann, und dieſen fixen Punct blos als einen Punct, nicht als ein Auge.

3. Sie iſt dem Zeichner, vorzüglich dem architektoniſchen, und dem Theatermahler ſehr nöthig. Doch müſſen dieſe Künſtler noch verſchiedenes, was die Geometrie nicht lehrt, beobachten, wenn die Täuſchung möglichſt vollkommen ſeyn ſoll. Sie müſſen die Beſtimmtheit der Umriſſe gehörig ſchwächen, ſo wie die Gegenſtände entfernter ſeyn ſollen; auch muß die ſcheinbare Helligkeit abnehmen; die Farben der Gegenſtände und der Luft ſelbſt, welche durch den weitern Abſtand eine Veränderung leiden, müſſen dieſem gemäß gehalten werden.

4. Es kann ſelbſt eine Abweichung von den Vorſchriften der Geometrie zur mehrern Täuſchung erforderlich ſeyn. Wir beurtheilen die Größe wirklicher Gegenſtände oft nicht nach den Geſichtswinkeln, z. B. die Fenſter und Schäfte an einem langen Gebäude; in der Zeichnung aber werden wir allerdings ſie nach der wirklichen Länge und Breite, welche ſie darauf erhalten, beurtheilen. Dieſes mag auch bisweilen der Fall in der Theatermahlerey ſeyn.

5. Über die Perſpectiv iſt ſehr viel geſchrieben, weil ihre Gründe nicht weit herzuholen ſind. Die meiſten Anweiſungen beſchäftigen ſich mit beſondern Fällen. Hier iſt die Abſicht, eine allgemeine Theorie der Perſpectiv zu geben, woraus die beſondern Fälle und Vortheile ſich herleiten laſſen mögen. Es kommt hier nur auf zwey Aufgaben an: erſtlich durch einen perſpectiviſch gegebenen Punct die Projection einer gegebenen geraden Linie zu

ziehen; zweytens auf dieſer die Projection einer gegebenen Länge abzuſchneiden. Die geraden Linien, welche abgebildet werden, mögen im Raume jede Lage haben. — Die Entwerfungsfläche ſey eine Ebene.

6. Die Ebene der beiden geraden AB, AC (Fig. 145.) iſt die Tafel, worauf die Projection geſchieht. Sie ſey zuerſt ſenkrecht auf die Ebene der DE, EF, welche die Grundebene (Fundamentalebene) heißt. Der Durchſchnitt AB beider Ebenen heißt die Grundlinie. Jede auf die Tafel ſenkrechte Ebene kann zur Grundebene dienen, ſo fern die zu entwerfenden Puncte und Linien darauf liegen. Der Punct O vor der Tafel ſey derjenige, nach welchem die Entwerfungslinien gezogen werden. Er heißt der Geſichtspunct oder das Auge. Die Höhe deſſelben über der Grundebene iſt OS, und der ſenkrechte Abſtand von der Tafel iſt OP. Der Punct P, wo die ſenkrechte OP die Tafel trifft, heißt der Augenpunct. Der Punct S auf der Grundebene kann der Grundpunct heißen. Die Ebene POS ſchneide die Tafel in PQ, die Grundebene in QS. Sie heißt die Verticalebene, nämlich vorzugsweiſe. Da ſie auf die Tafel und die Grundebene ſenkrecht ſteht, ſo ſteht der Durchſchnitt dieſer beiden, AB, auf jene ſenkrecht (Ebene, 22.), das iſt auf PQ und QS. Durch P werde mit AB die parallele GH gezogen. Dieſe heißt die Horizontallinie, und die Ebene durch O und GH die Horizontalebene, beides vorzugsweiſe.

7. Aufgabe. Das Bild einer horizontalen (der Grundebene parallelen) geraden Linie zu entwerfen.

Es ſey der Punct L auf der Tafel gegeben, wo die horizontale dieſelbe trifft, und der Winkel A, welchen ſie mit der Verticalfläche macht. Die Tafel iſt in Fig. 146. vorgeſtellt, auf welcher P der Augenpunct, GH die Horizontallinie, L der Punct iſt, wo die gegebene gerade die Tafel trifft. Dieſer Punct wird durch ſeinen Abſtand von der Verticalebene und der durch das Auge horizontalen Ebene gegeben, das iſt, wenn ALB die durch L horizontale, und PQ die darauf durch P

ſenkrechte iſt, durch LQ und PQ. Auf der PQ nehme man PO dem Abſtande des Auges von der Tafel gleich, und auf GH die PT gleich der Tangente des Winkels A für PO als Halbmeſſer, und ziehe LT, ſo iſt dieſe LT das Bild oder die Projection der ganzen unendlichen Linie von L an jenſeits der Tafel.

Denn das Bild einer geraden Linie überhaupt iſt der Durchſchnitt der durch das Auge und die gerade gelegten Ebene mit der Tafel. Nun ſey Ll (Fig. 145.) die gegebene horizontale, welche die Tafel in L trifft. Durch das Auge O ziehe man Oo parallel mit Ll, ſo iſt die Ebene der beiden parallelen diejenige, in welcher alle geraden, die von den Puncten der Ll nach O gezogen werden mögen, liegen. Ihr Durchſchnitt mit der Tafel iſt LT, die gerade zwiſchen den Puncten L und T, worin Ll und Oo die Tafel treffen. Der Punct T liegt in der horizontalen Ebene durch O, alſo auf der horizontalen GH. Es ſey Lk ſenkrecht auf die Tafel in L, ſo iſt der Winkel KLl die Abweichung der Ll von der Verticalfläche. Da die OP der Lk parallel iſt (Ebene, 10.), und OT der Ll, ſo iſt der W. POT = KLl (Ebene, 13.), und PT die Tangente des Winkels POT oder KLl für OP als Halbmeſſer. Die gerade LT iſt das Bild der ganzen unendlichen Ll von L an, weil jede gerade, die von O nach einem Puncte der Ll gezogen wird, zwiſchen L und T die Tafel trifft, ſo daß der Punct T ſelbſt das Bild eines unendlich entfernten Punctes iſt.

8. Die Länge der Tangente PT kann man aus den trigonometriſchen Tafeln nehmen. Man gebe der PO tauſend Theile, ſo findet man PT unmittelbar aus ihnen, wenn man die vier letzten Ziffern wegläßt. Oder man findet PT durch eine Conſtruction, indem man mit dem Halbmeſſer PO einen Quadranten beſchreibt, und an dieſem aus den Winkeln in der Grundzeichnung die Tangenten beſtimmt. Oder der Punct T wird aus dem Grundriſſe des Gegenſtandes gefunden.

Trägt man die Tangenten der Winkel von 5 zu 5 Graden auf beiden Seiten von dem Augenpuncte auf die Horizontallinie, ſo hat man einen perſpectiviſchen Winkelmeſſer, durch deſſen Hülfe man die Projectionen nach ihren ſcheinbaren Winkeln leicht ziehen kann.

9. Der Punct T iſt der Vereinigungspunct der Projectionen aller mit L l, das iſt, mit O T parallelen. Denn der Punct L mag in Abſicht der Verticalebene und der Horizontalebene, welche Lage es ſey, haben, ſo bleibt die Lage von O o und des Punctes T dieſelbe.

Die Horizontallinie GH iſt der geometriſche Ort der Vereinigungspuncte der Projectionen von allen Linien, die mit der Grundebene und unter ſich parallel ſind. Sie iſt die Gränzlinie für das Bild der ganzen unendlichen Ebene.

Die Vereinigungspuncte, wie T, welche auch außerhalb der Horizontallinie, für geneigte Linien, liegen können, heißen zufällige Puncte, in Beziehung auf den Augenpunct, welcher in dieſer Rückſicht der Hauptpunct heißt.

10. Es erhellt nun, wie man an einen gegebenen Punct der Projection einer geraden die Projection eines gegebenen Winkels zeichnen könne. — Der gegebene Winkel ſey = A. Man zerlege ihn in die beiden B + C oder B — C, wo der Winkel B der Abweichungswinkel der gegebenen geraden Linie iſt. In dem erſtern Falle trägt man von dem Augenpuncte nach der entgegengeſetzten Seite von derjenigen, wohin die gegebene Linie abweicht, auf der Horizontallinie die Tangente des Winkels C; in dem andern Falle nach derſelben Seite hin, und zieht nach dem Endpuncte der Tangente von dem gegebenen Puncte eine gerade, ſo macht dieſe mit der gegebenen die Projection des gegebenen Winkels.

11. Aufgabe. Auf der Projection einer geraden Linie einen Theil abzuſchneiden, dem eine gegebene Länge auf dieſer zugehöre.

I. Es ſey LT (Fig. 146.) die Projection und auf derſelben von L aus ein Stück LN zu nehmen, welches die Projection einer Länge LM ſey. Nun trage man auf der horizontalen ALB dieſe LM; nehme auf GH die PU = tang ($45° - \frac{1}{2}$A), für PO als Halbmeſſer, wenn A der Abweichungswinkel für LT iſt, ziehe MU, welche LT in N ſchneide, ſo iſt LN der LM perſpectiviſch gleich.

Denn es ſoll LMN die Projection eines gleichſchenkligen Dreyecks ſeyn, worin die Winkel bey M und N gleich ſind. Da in dieſem der Winkel L = 90° — A iſt, ſo iſt M = $45° + \frac{1}{2}$ A, und die Abweichung der MN = $45° - \frac{1}{2}$ A nach der Gegend von AG. Daher iſt PU = der Tangente von $45° - \frac{1}{2}$A. Umgekehrt, wenn PU = tang ($45° - \frac{1}{2}$A) und PT = tang A iſt, ſo iſt LNM das Bild eines gleichſchenkligen Dreyecks, worin LN = LM iſt.

II. Oder man nehme TU gleich der Secante des Abweichungswinkels A, für den Halbmeſſer PO, und ziehe UM. Denn es ſey in Fig. 145. LM die gegebene Länge. Zieht man OM, welche LT in N ſchneidet, ſo iſt LN die Projection von LM. Es iſt aber OT in dem bei P rechtwinkligen Dreyeck OPT die Secante von POT oder A für den Halbmeſſer OP. Nimmt man alſo in Fig. 146. die TU gleich der Secante des Winkels A für denſelben Halbmeſſer, und zieht UM, ſo wird die TL in N nach dem Verhältniſſe TU:LM eingetheilt, eben ſo wie in Fig. 145. durch die OM in der Ebene der beiden Parallelen Oo und LM.

III. Auf der Projection LT ſoll von N aus ein Stück Nn getragen werden, welches einer gegebenen Mm zugehöre.

Man ziehe erſtlich durch N und U, nach der Vorſchrift I. oder II. die gerade UNM, welche AB in M ſchneide. Von M nehme man Mm der gegebenen Länge gleich und ziehe Um, welche LT in n ſchneide, ſo iſt Nn die verlangte Länge auf LT.

12. Es iſt sec. A — tang A = tang (45° — ½ A), zufolge Goniometrie, 48, das iſt TU — PT = PU.

13. Wenn die abzubildenden Linien ſenkrecht auf die Tafel ſind, ſo iſt PT = o, PU = o, und TU = PO. Dieſe Linien laufen alle in dem Augenpuncte P zuſammen. Es iſt nun LQ der ſenkrechte Abſtand des Punctes N von der Verticalfläche und LM der ſenkrechte Abſtand von der Tafel, wie in der Zeichnung Fig. 147. Der Winkel A iſt = o, und PLM iſt die Projection eines rechten Winkels; die Winkel M, N ſind Projectionen eines halben rechten.

14. Dieſes iſt die gewöhnlichſte Methode zu perſpectiviſchen Zeichnungen, wo die Abſtände jedes Punctes von der Verticalfläche und der Tafel aus einem Grundriſſe genommen werden. Die Projection einer geraden Linie wird durch zwey Puncte, wie hier N, beſtimmt. In denen Fällen, wo der Punct T weit von P entfernt liegt, das iſt, wo die geraden Linien einen groſsen Winkel mit der Verticalfläche machen, iſt dieſes Verfahren das leichteſte, wenn man ſich nicht etwa der Rechnung bedienen will. Hingegen kann die Methode der Vereinigungspuncte wieder ſehr dienlich ſeyn, wenn der eine gegebene Punct der abzubildenden Linie ſehr weit entfernt liegt.

15. Durch N (Fig. 147.) ziehe man Nn parallel mit LQ, ſo iſt QLNn die Projection eines Rechtecks, deſſen Seiten LQ, LM ſind.

Denn die gerade Nn, die unbeſtimmt verlängerte, iſt parallel mit der Grundebene, da ſie mit der AB in derſelben parallel iſt; ſie ſchneidet alſo die gerade, welche der Durchſchnitt der Grundebene und der durch das Auge und Nn gelegten Ebene iſt, nicht, und iſt ihr parallel, da beide in einer Ebene liegen. Dieſe Durchſchnittslinie und die AB, welche der Nn parallel ſind, ſind einander parallel (Ebene, 12.). Da LN, Qn Projectionen von zwey auf die Tafel ſenkrechten ſind, ſo iſt LQnN die Projection eines Rechtecks.

Nimmt man LM = LQ, ſo wird QLNn die Abbildung eines Quadrats, in welchem man auf QP die Verkürzungen nach der Tiefe, ſenkrecht auf die Tafel, und auf Nn nach der Breite, parallel mit der Grundlinie, hat, woraus die Zeichnung eines perſpectiviſchen Maßſtabes nach dieſen Richtungen ſich ergiebt.

16. Hieraus ergiebt ſich, wie man für jede der Tafel parallele und horizontale ihre Projection, und aus der perſpectiviſchen Größe die wahre angeben könne.

17. Der Punct O heißt der Diſtanzpunct, weil PO dem Abſtande des Auges von der Tafel gleich iſt. Er wird auf die eine oder die andere Seite von P getragen, auf die entgegengeſetzte derjenigen, nach welcher M von PQ ab liegt. Die Projection LN pflegt die perſpectiviſche Vertiefung des Punctes N genannt zu werden; beſſer heißt ſie die perſpectiviſche Entfernung von der Tafel, ſo wie Nn dieſelbe von der Verticalebene.

18. Die Projection einer auf die Grundebene ſenkrechten iſt auf die Grundlinie ſenkrecht. — Denn die Ebene durch jene und das Auge iſt ſenkrecht auf die Grundebene. Da die Tafel auch darauf ſenkrecht iſt, ſo iſt der Durchſchnitt der Tafel und jener Ebene, das iſt die Projection der ſenkrechten auf die Ebene, und alſo auch auf die Grundlinie ſenkrecht. Ebene, 22.

19. Aufgabe. Durch die Projection eines gegebenen Puncts der Grundfläche die Projection einer ſenkrechten von gegebener Länge zu ziehen.

Die Projection des Punctes ſey N, (Fig. 148.), welcher aus ſeinem Abſtande von der Vertical- und Fundamentalebene gefunden iſt. Man ziehe durch N und den Augenpunct P die gerade PND bis an die Grundlinie in D. In D errichte man auf AB die ſenkrechte DE, und mache DE von der gegebenen Länge, ziehe PE, und dann durch N die mit DE parallele NM bis an PE, ſo iſt MN die verlangte Projection.

Denn die geraden PD, PE ſind parallelen, ſo wie DE und MN, alſo iſt DEMN die Projection eines Rechtecks. Daher iſt die gerade, wovon NM die Projection iſt, der DE gleich. Da DE auf der Tafel ſelbſt befindlich iſt, ſo hat ſie ihre eigene Länge unverändert, und es iſt alſo MN die verlangte Projection.

20. Anſtatt des Augenpunctes kann man jeden Punct der Horizontallinie nehmen, da die Linien, welche nach einem Puncte derſelben gezogen werden, horizontale parallelen ſind. Dieſes iſt bequem, um mittelſt derſelben ſenkrechten, wie DE, mehrere Höhen über verſchiedenen Puncten zu errichten.

21. Wenn der Punct, auf welchem die ſenkrechte errichtet werden ſoll, nicht in der angenommenen Grundfläche liegt, ſo muß man AB in demjenigen Abſtande von GH legen, welcher der Tiefe des Punctes unter der Horizontalebene gleich iſt. — Oder man nimmt DE um ſo viel größer oder kleiner als der Punct über der Grundfläche oder darunter liegt. Wenn n die Projection des gegebenen Punctes iſt, ſo beſtimme man zuerſt den Grundpunct N deſſelben auf der angenommenen Grundfläche, d. i. den ſenkrecht unter jenem liegenden Punct. Dann ziehe man PN und DE, nehme Dd der Höhe des Punctes über der Grundfläche gleich, (in dem entgegengeſetzten Falle unterhalb D), ziehe Pd, welche NM in n ſchneidet, ſo iſt n die Projection des gegebenen Punctes. Iſt dE die Länge der darauf ſenkrechten, ſo giebt PE auf NM den Punct M, und dadurch die Projection nM der gegebenen ſenkrechten.

22. Aufgabe. Die Projection einer gegen die Grundfläche geneigten geraden zu zeichnen.

Die Neigungsebene der geraden mache mit der Verticalebene den Winkel A, und die gerade in derſelben mit der Grundebene den Winkel B. Nun ſey, Fig. 149. GH die Horizontallinie, P der Augenpunct, PO der Abſtand des Auges von der Tafel, POT der Ab-

weichungswinkel der Neigungsebene nach BH hin, TV die Tangente des Neigungswinkels für den Halbmeſſer OT, ſo daß VOT in der auf die Ebene der Zeichnung ſenkrechten Ebene der Neigungswinkel iſt. Der Punct L ſey derjenige, in welchem die gegebene gerade die Tafel trifft. Man ziehe LV, ſo iſt dieſe die Projection der gegebenen geraden Linie.

Der Beweis ergiebt ſich durch Betrachtung der Fig. 145. In dieſer iſt LR die gegebene gerade, die Neigungsebene iſt die Ebene der beiden geraden LR, LM. ſo daß KLM = A; MLR = B iſt. Es iſt KL auf die Tafel in der Grundebene ſenkrecht. Es ſey, wie ſchon oben geſchehen iſt, OP parallel mit LK; OT parallel mit LM, und nun noch Ov parallel mit LR, ſo iſt der W. POT = KLM, und W. oOv = MLR; die Oo begegne der Tafel in T, die Ov in V. Da die Ebene des Winkels oVv ſenkrecht auf die Grundebene iſt, weil ſie der Ebene MLR parallel iſt, und die Tafel auch ſenkrecht auf die Grundebene ſteht, ſo iſt die Durchſchnittslinie TV ſenkrecht auf die Horizontalebene, das iſt, auf PT und TO. In dem bey P rechtwinkligen Dreyeck OPT iſt PT = tang POT = tang A, und OT = sec A. In dem bey T rechtwinkligen Dreyeck VTO iſt TV = TO . tang TOV = sec A. tang B. Nun ſeyn P, T, V, L in Fig. 149. dieſelben Puncte, wie die gleichnamigen in der Tafel Fig. 145. ſo iſt LV dort dieſelbe Linie wie hier, und in derſelben Lage. Es iſt aber LV in Fig. 145 die Projection der unendlichen Linie LR, eben ſo wie es von LT in Beziehung auf LM erwieſen iſt. Alſo iſt LV die Projection der geraden, deren Abweichung A, und Neigung B iſt.

23. Aufgabe. Auf der Projection einer geneigten geraden Linie eine Länge abzuſchneiden, die einem gegebenen Stücke dieſer zugehöre.

Man trage die TO (Fig. 149.) auf der Horizontallinie von T nach U, ziehe UV, mit dieſer durch L die parallele LR. Auf dieſer nehme man LR gleich

der gegebenen Länge, ziehe UR, welche LV in N ſchneide, ſo iſt LN die Projection einer der LR gleichen Länge.

Der Beweis iſt derſelbe wie in (11. II.).

24. Die Linie UV oder OV (Fig. 145.) iſt = sec A. sec B.

25. Man kann den Linien VU, LR jede andere, nur parallele, Lage geben. Dadurch wird der Durchſchnittspunct der beiden LV, UR nicht geändert. Jene Linien müſſen zugleich die hier beſtimmte Länge behalten.

26. Beyſpiele von geneigten Linien ſind die Dachkanten in perſpectiviſchen Baurißen; in Dachverbindungen und andern Zuſammenſetzungen von Zimmerhölzern in Gebäuden und Maſchinen; auch die nach der Sonne oder dem Monde laufenden Linien, wenn dieſe Körper auf der Zeichnung erſcheinen ſollen. Es ſey POT (Fig. 149.) die Abweichung der Sonne von der Verticalfläche, und TUV die Höhe der Sonne über dem Horizont, wo TU = TO iſt, ſo iſt V das Bild des Mittelpunctes der Sonne, und T der Punct des Horizonts, über welchem ſie ſenkrecht ſteht, oder der Durchſchnitt mit dem Verticalkreiſe der Sonne. Die Schattenebene geht durch VT. Will man den Schatten einer ſenkrechten Linie zeichnen, ſo hat man durch ihren Grundpunct in der Grundebene und durch T eine gerade zu ziehen, dann durch ihren oberſten Punct und durch V; beider Durchſchnitt giebt den Endpunct des Schattens. Der Punct T iſt das Bild des als unendlich weit entfernten Punctes auf der Horizontalebene, über welchem die Sonne in einer ſenkrechten ſteht.

27. Wenn die ebenen Figuren, deren Projection verlangt wird, in einer gegen die Tafel geneigten Ebene liegen, ſo kann man ſich zur Entwerfung der einzelnen darin befindlichen Linien der Vorſchrift in (13. 14.) bedienen; allein es iſt bequemer, die Ebene der Figuren ſelbſt zur Grundebene zu nehmen. Die Gränzlinie der

ſelben tritt nun an die Stelle der Horizontallinie für eine auf die Tafel ſenkrechte Grundebene.

28. Es ſtelle die Ebene der Zeichnung Fig. 150. die Neigungsebene der Tafel und der Grundebene, in der durch das Auge gehenden Lage vor, das iſt, eine auf ihre Durchſchnittslinie ſenkrecht durch das Auge geſtellte Ebene. Der Durchſchnitt dieſer Ebene mit der Tafel iſt AB, mit der Grundebene CD, der Winkel der Tafel und der Grundebene iſt AEC. Der Ort des Auges ſey O. Man ziehe OP ſenkrecht auf AB, ſo ſteht OP ſenkrecht auf die Tafel (Ebene, 25.), und es iſt P der Augenpunct auf der Tafel, der Vereinigungspunct der Projectionen aller auf die Tafel ſenkrechten geraden. Die auf AB und CD zugleich ſenkrechte durch E iſt der Durchſchnitt der Tafel und der Grundebene, welche auch hier die Grundlinie heiße. Durch O ziehe man mit EC eine parallele Oo, und lege durch dieſelbe eine mit der Grundebene parallele Ebene, ſo ſchneidet dieſe die Tafel in einer mit der durch E gehenden Grundlinie parallelen Linie. Denn beide Durchſchnittslinien ſchneiden ſich nicht, weil ſie in parallelen Ebnen liegen. Die Oo ſchneide die AB in F, ſo iſt die durch F mit der durch E gehenden Grundlinie parallel gezogene gerade die Gränzlinie für die Projectionen aller auf der Grundebene gezogenen geraden, von dem Puncte angenommen, wo ſie die Tafel treffen. Nämlich jede von O nach einem Puncte der Grundebene gezogene gerade trifft die Tafel in einem Puncte zwiſchen der Grundlinie und der durch F ihr parallelen. Dieſe letztere heiße deswegen die Gränzlinie für die geneigte Grundebene, wie in 9. Der Punct F iſt der Vereinigungspunct für alle geraden, welche der CE parallel ſind, das iſt, keine Abweichung von der Ebene des Auges (der Neigungsebene) haben, wiewol ſie gegen die Tafel geneigt ſind. Dieſer Punct F iſt daher als Augenpunct in Beziehung auf die geneigte Ebene anzuſehen, ſo wie es P in Beziehung auf die gegen die Tafel ſenkrechte Ebene iſt. Man kann ihn den zweyten Augenpunct nennen.

29. Weicht eine gerade, der Grundebene parallele, von der Ebene des Auges ab, ſo ziehe man derſelben eine parallele durchs Auge. Dieſe, da ſie der Grundebene parallel iſt, ſchneidet die Tafel in der Gränzlinie für die Grundebene, in einem Puncte, der der Vereinigungspunct für alle jener parallelen iſt, wie in 11.

30. Es ſey $OP = a$; der Neigungswinkel der Grundebene gegen die Tafel $= E$; die Abweichung einer darauf oder ihr parallel gezogenen geraden von der Ebene des Auges OFE ſey der Winkel A, ſo iſt $PF = a \cot E$, und $OF = a \operatorname{cosec} E$. Der Abſtand des Vereinigungspunctes von F bey dem Abweichungswinkel A iſt $= a \operatorname{cosec} E. \tang A$. Der Abſtand des Auges von dem Vereinigungspuncte iſt $= OF \times \sec A = a \operatorname{cosec} E. \sec A$.

31. Die Länge der Projection jeder der geneigten Grundebene parallel laufenden Linie wird ganz auf dieſelbe Art wie für horizontale Linien in (11.) gefunden. Die Projection der ganzen unendlichen Linie von dem Puncte, wo ſie die Tafel trifft, bis zu dem Vereinigungspuncte wird nach dem Verhältniſſe der wahren Linie eines abzuſchneidenden Stücks zu dem Abſtande des Auges von dem Vereinigungspuncte eingetheilt. Auch die Methode durch die gleichſchenkligen Dreyecke mittelſt der Tangenten der Abweichungswinkel daſ. I. iſt hier anwendbar. Überhaupt, wenn man die Durchſchnittslinie einer geneigten Ebene mit der Tafel und den zweyten Augenpunct beſtimmt hat, iſt alles, was für Zeichnungen auf einer horizontalen Ebene gefunden wird, auch auf Zeichnungen in der geneigten anwendbar.

32. Man ziehe (Fig. 150.) auf die CD die ſenkrechte OG vom Auge her, welche AB in H treffe. Der Punct H auf der Tafel iſt der Vereinigungspunct für die Projectionen aller auf die Grundebene ſenkrechten. Es iſt $PH = a \tang E$, und $OH = a \sec E$. Für dieſe Linie iſt $A = o$ und der Neigungswinkel gegen die

Tafel $= 90° - E$. Die Abmeſſung der perſpectiviſchen Länge von dem Puncte, wo eine ſolche ſenkrechte auf die Tafel ſtößt, geſchieht eben ſo wie in dem vorhergehenden Falle.

33. Wenn der Vereinigungspunct der perſpectiviſch parallelen zu weit entfernt liegt, als daß er in dem beſchränkten Raume der Zeichnung auf die Horizontallinie getragen werden könnte, und die Conſtruction vermittelſt der Abſtände eines Punctes von der Vertical- und Grundebene auch nicht paßlich ſeyn ſollte, ſo muß man ſich der Rechnung bedienen. In Fig. 146. ſchneide die LT die PQ in R, ſo iſt $LQ + PT : LQ = PQ : QR$. Hier iſt LQ der Abſtand eines gegebenen Punctes von der Verticalebene, und PQ der Abſtand ſeiner Grundebene von der horizontalen Ebene durchs Auge; PT die Tangente des Abweichungswinkels der projicirten Linie LT. Es ſey der Abſtand des Auges von der Tafel $= a$, der Abſtand des Punctes L von der Horizontalebene durch $GH = b$; von der Verticalfläche, $LQ = c$; der Abweichungswinkel $= A$, ſo iſt $QR = \frac{bc}{c + a \text{ tang } A}$. Nachdem der Punct R auf PQ gefunden iſt, zieht man LR, und verlängert dieſe, ſo weit es der Raum der Zeichnung erlaubt.

34. Auf dieſe LR eine gegebene Länge perſpectiviſch zu tragen, wenn dieſe auf der Grundlinie, zufolge der Conſtruction in (11.), nicht Raum hat, muß man zur Rechnung ſich wenden. Es iſt (Fig. 146.) $LM + TU : LM = LT : LN$. Hier iſt LM die gegebene Länge, welche d ſey; $TU = a \sec A$. Aber LT muß erſt beſonders berechnet werden. Es iſt $LT = \frac{PQ}{\sin L}$, und $\text{tang } L = \frac{RQ}{LQ} = \frac{b}{c + a \text{ tang } A}$. Sucht man alſo erſt die Tangente des Winkels L, und aus den Tafeln den zugehörigen Sinus, wozu immer die Tafeln, ohne Einſchaltung nöthig zu haben, hinreichen, ſo

findet man LT, und dann durch die angegebene Proportion LN.

35. Das bisher vorgetragene wird für alle Fälle, die bey der perſpectiviſchen Entwerfung vorkommen mögen, hinreichen. Ebene Figuren, ſie mögen in einer auf die Tafel ſenkrechten, oder gegen ſie geneigten liegen, werden keine Schwierigkeit machen, da die Maßen der geradlinichten Seiten, Diagonalen und Winkel entweder in Zahlen gegeben, oder aus einer Zeichnung gefunden werden. Krumme Linien werden mittelſt einiger ihrer Puncte aufgetragen, deren Projectionen aus freyer Hand auf eine geſchickte Art durch einen Zug verbunden werden. Die Projection eines Kreiſes iſt eine Ellipſe, zu deren Conſtruction fünf Puncte gegeben werden müſſen, ſ. krumme Linien der erſten Claſſe, 15, 21, 22. Von der Entwerfung krummer, horizontal liegender Linien auf der vertical ſtehenden Tafel, ſehe man Karſtens Lehrbegriff, Th. VII. S. 206. ff.

36. Körperliche Figuren können mehr Schwierigkeit machen. Man muß die Lehren der ſphäriſchen Trigonometrie wohl inne haben, um aus den gegebenen Lagen von Linien und Ebenen gegen einander die davon abhängenden herzuleiten.

37. Ich gebe keine Beyſpiele, weil ſie zu vielen Raum wegnehmen würden. Man wird in allen Büchern von der Perſpectiv mancherley ſolche finden. Noch beſſer iſt es, wenn man ſie ſich ſelbſt giebt, und ſie nach den hier gegebenen Vorſchriften behandelt. Man nehme dazu geometriſche Körper, die man mit ihren Schatten auf einer Ebene, es ſey horizontalen, verticalen, geneigten, auch mehrern nach einander entwerfe. Die regelmäßigen Körper ſind gute Übungsſtücke, beſonders wenn man ſie in ſchwierigen Stellungen zeichnet. Am nutzbarſten ſind Zeichnungen aus der Baukunſt und dem Maſchinenweſen. Mit Bogenſtellungen und Dachverbindungen mache man den Anfang.

Zur Geſchichte der Perſpectiv.

Wie weit die Alten in der lineariſchen Perſpectiv gekommen ſeyn, wiſſen wir nicht. Die Stelle beym Vitruv von der theatraliſchen Mahlerey der Griechen iſt im 2 Th. S. 318. angeführt. Plinius erzählt im 35ſten Buche vieles von täuſchenden Nachahmungen natürlicher Gegenſtände durch die alten Mahler, welches aber ohne geometriſche Kenntniß möglich war. Man ſehe zwey Abhandlungen über dieſe Materie von Meiſter in den Schriften der Göttingiſchen Societät der W. T. V. VI. für die Jahre 1774 und 1775; auch meine Überſetzung von Prieſtley's Geſchichte der Optik, Th. I. S. 75. ff.

Ptolemäus lehrte die ſtereographiſche Entwerfung der Kreiſe einer Kugelfläche auf eine Ebene durch ihren Mittelpunct, welches in der That eine perſpectiviſche Vorſtellung iſt, für ein Auge, das ſich in dem Pole des Kreiſes, deſſen Ebene die Tafel iſt, befindet. Er begnügte ſich damit, dieſe Theorie zur Entwerfung der Planiſphärien zu gebrauchen.

Die Mahlerey und Baukunſt gaben, nach der Wiederherſtellung der Wiſſenſchaften, Veranlaſſung zur Entdeckung einiger Regeln für perſpectiviſche Zeichnungen. Der erſte, welcher etwas brauchbares über die Perſpectiv geſchrieben hat, iſt Pietro della Francesca dal Borgo S. Sepolcro im 16ten Jahrhundert geweſen, wie Egnazio Danti in der Vorrede zu ſeinem Commentar über die Perſpectiv des Vignola anführt. Seine drey Bücher über dieſe Kunſt ſind nicht gedruckt. Daniel Barbaro, Patriarch zu Aquileja, hat daraus vieles in ſein Buch über die Perſpectiv getragen. Unter den erſten Schriftſtellern über dieſe Wiſſenſchaft war auch Balthaſar von Siena, deſſen Methode Sebaſtian Serlio in ſeinem Werke über die Baukunſt gebraucht hat. Dieſes meldet Danti a. a. O. Jener Balthaſar führt den Zunamen Peruzzi, und war ein ſehr angeſehener Baumeiſter und Zeichner, der 1536 zu Rom in einem Alter von 36 Jahren geſtorben iſt. (Dictionnaire

de Peinture et d'Architecture, à Paris 1746.). Daß er den Diſtanzpunct gebraucht hat, ſieht man aus einer Conſtruction, welche Danti von ihm a. a. O. S. 82. anführt, und die auch jener Pietro dal Borgo S. Sepolcro ſchon entdeckt hat. Unſer Albrecht Dürer hat auch Vorſchriften zu perſpectiviſchen Zeichnungen gegeben in ſeiner Underweyſung der meſſung mit dem zirckel und richtſcheyt, 1525. Auch lehrte er ein mechaniſches, wiewol ſehr beſchwerliches Verfahren, von einem wirklichen Gegenſtande eine perſpectiviſche Zeichnung zu entwerfen. Käſtner hat dieſes und vieles andere aus Dürers Buche angeführt, welches nicht ſo nöthig geweſen wäre, als deſſen perſpectiviſche Entwerfungsarten, wovon nichts angezeigt wird.

Ein Hauptbuch über die Perſpectiv mag im 16ten Jahrhundert das von Barozzi da Vignola geweſen ſeyn, Regole della proſpettiva pratica, Roma, 1583. Fol. wovon im J. 1602 noch drey Ausgaben in Folio, Quart und Octav erſchienen ſind. Egnatio Danti, Matematico dello Studio di Bologna, gab dieſe in kurzen Sätzen verfaßte Anweiſung mit einem weitläufigen Commentar heraus, Rom 1611 Fol., wovon in der Folge noch zwey Ausgaben herausgekommen ſind. Vignola (geſt. 1573) trägt zwey Regeln oder Methoden vor. Zuerſt bedient er ſich des Ortes des Auges ſelbſt und deſſen Grundpunctes auf der Grundebene. Die gerade von jenem Puncte nach einem Puncte des Gegenſtandes giebt auf der Tafel die perſpectiviſche Höhe, die gerade von dem andern nach dem Grundpuncte des abzubildenden Punctes giebt den perſpectiviſchen Abſtand von der Ebene des Auges. Die Projectionen geſchehen, die eine in der Verticalebene durch das Auge, die andere in der Grundebene durch deſſen Grundpunct. Dieſe Methode iſt in der That die einfachſte, mit ſehr wenigen geometriſchen Kenntniſſen begreiflich. Die zweyte Methode nimmt den Diſtanzpunct (17.) nebſt dem Augenpuncte zu Hülfe, um vermittelſt jenes auf den nach dieſem laufenden perſpectiviſchen Linien eine gegebene Länge zu entwerfen.

Guido Ubaldi, mit dem Zunamen e Marchionibus Montis, erwies, daß alle mit der Grundebene parallelen in der perſpectiviſchen Abbildung in einem Puncte der Horizontallinie zuſammen kommen. Sein Werk über die Perſpectiv kam 1600 heraus. Es iſt nach damahliger Art weitſchweifig, doch gehört der Verfaſſer zu den beſten mathematiſchen Schriftſtellern ſeiner Zeit. Der Jeſuit Franciscus Aguilonius, welcher einen großen Folianten über die Optik (Opticorum libri sex, Antwerpiae, 1613) herausgegeben hat, erweiterte die Bemerkung auf parallelen, die in einer gegen die Tafel geneigten Ebene gezogen ſind. Er zerſtückelt den Satz in fünf Sätze, ohne Zeichnungen und Anwendungen, daher die Theorie dieſer Entwerfungen den praktiſchen Schriftſtellern über die Perſpectiv zu ſchwer geweſen ſeyn mag. Auch finde ich in Nicerons Thaumaturgus opticus, Parisiis, 1646 Fol. noch nichts von der Entwerfung ſolcher Linien, welche gegen die Horizontalebene geneigt ſind. Der Jeſuit Dechales handelt in dem dritten Theile ſeines großen Cursus mathematicus, Lugduni 1690, in dem vierten Buche von der Perſpectiv ausführlich von dieſer Entwerfung mit Beyſpielen.

De la Caille zeigte in ſeinen Leçons d'Optique (erſte Ausg. 1756, zweyte 1766), wie die Eintheilung der Horizontallinie nach den Tangenten der Geſichtswinkel am Auge als perſpectiviſcher Winkelmeſſer (8.) dient, jede mit der Grundebene parallele und gegen die Tafel geneigte Linie zu entwerfen. Lambert in ſeiner freyen Perſpectiv (1. Th. Zürch 1795, zweyter, 1774) hatte eben den Gedanken, ohne jenes Werk geſehen zu haben. Er zeigt auch daſelbſt, wie der Proportionalzirkel, mittelſt der darauf befindlichen Linien, der arithmetiſchen und der trigonometriſchen, zur Erleichterung perſpectiviſcher Zeichnungen gebraucht werden kann.

Mechaniſche Vorrichtungen zu perſpectiviſchen Abbildungen haben Dürer, Danti in ſeinem Commentar über Vignola, Niceron nach einem Mahler Lodovico

Ciaolo, Lambert u. a. angegeben. Meiſter hat in einer Gradual-Schrift, Instrumentum scenographicum, Gottingae 1753, ein aus verſchiedenen verſchiebbaren Linealen zuſammengeſetztes Inſtrument beſchrieben, wodurch vermittelſt des daneben gelegten Grundriſſes und Aufriſſes eine perſpectiviſche Zeichnung daraus gemacht werden kann. Man kann auch den Pantograph zu perſpectiviſchen Entwerfungen benutzen, wie es der Erfinder, Scheiner, in ſeiner Pantographice, p. 100, und nach ihm Dechales, a. a. O. pag. 566. gezeigt haben. Bürja ſchlägt dieſes Inſtrument auch zu dieſer Abſicht vor in ſeiner Perſpectiv, ohne jene Vorgänger zu kennen. In den Philos. Transactions, 1785, Nr 22. ſind drey Inſtrumente zu perſpectiviſchen Zeichnungen von Gebäuden und Maſchinen beſchrieben von Peacock. Das bequemſte Inſtrument möchte der Proportionalzirkel ſeyn, wie ihn Lambert in einer kleinen Schrift: Kurzgefaßte Regeln zu perſpectiviſchen Zeichnungen ꝛc. Augsburg, 1768 beſchrieben hat.

Verzeichniſſe von Schriften über die Perſpectiv findet man in Lamberts Perſpectiv, 2 Th. S. 6. ff. in Montucla Geſchichte der Mathematik, Th. II. S. 708 ff. in meiner Überſetzung von Prieſtley's Geſchichte der Optik, I. Th. S. 75 ff. am ausführlichſten in Scheibels mathematiſcher Bücherkenntniß, zehnten Stück, bis zum J. 1776. Zu dieſem Verzeichniſſe füge ich noch einige mir bekannt gewordene Schriften hinzu.

Von Segner Anfangsgründe der Perſpectiv, Berlin 1779. 94 S. 8. 8 K. ein völlig ausgearbeitetes Werk, welches nach dem Tode des Verfaſſers erſchienen iſt, ganz theoretiſch, nach geometriſcher Methode.

G. H. Werners Anweiſung alle Arten von Proſpecten nach den Regeln der Kunſt und Perſpectiv von ſelbſt ziehen zu lernen. Erfurt 1781. 130 S. 8. mit 17 K. ganz praktiſch.

Iosephi Torelli, Veronensis, elementorum Prospettivae libri II. opus posthumum, recensuit et edidit Io. Bapt. Bertolini Centurio Ar-

chitectus, Veronae 146 p. 4to. 1787. Götting. gel. Anz. 1788. St. 175.

Mönnichs Verſuch, die mathematiſchen Regeln der Perſpectiv für den Künſtler ohne Theorie anwendbar zu machen. Berlin 1794, 5 ½ Bog. 10 K. Mit einem neuen Titel 1801. Neue allgem. D. Bibl. XXI und LXXVI.

Bürjas mathematiſcher Maler, oder Anweiſung zur Perſpectiv nach verſchiedenen Methoden, mit einem Anhange über die theatraliſche Perſpectiv. Berlin 1795, 230 S. 8.

Horſtig Briefe über die maleriſche Perſpectiv, 2 Thle. Leipz. 1797. 32 K. Allgemeine Liter. Zeitung, 1798, Nr. 185. In Briefen an ein Frauenzimmer abgefaßt.

Traité de Perspective par Lavit, Prof. à l'Athénée de Paris, T. I. 4to. 50 pl à Paris.

Über die Luftperſpectiv von Lambert in den Mém. de Berlin 1774, und eine beſondre Schrift von St. Morien, Paris 1789.

Vorzügliche deutſche Schriften über die Perſpectiv ſind die vorher angeführte von Lambert, und die Abhandlung von Karſten in ſeinem Lehrbegriffe der Mathematik, Th. VII. S. 110—434. In der erſten iſt der Vortrag geometriſch, in der andern analytiſch-geometriſch, nur etwas zu weitläufig. Von der letztern iſt ein Auszug in deſſelben Verfaſſers Anfangsgründen der Mathematik, Th. III. S. 89—175.

Planimetrie iſt der Theil der Elementargeometrie, welcher von ebenen Figuren handelt; insbeſondere wird dieſes Wort von der Ausmeſſung ebener Figuren dem Inhalt nach gebraucht.

Planus locus und

Planum problema, ſ. Ort.

Plasmaticum, ein Kunſtwort, welches Diophantus in ſeiner Arithmetik oder Analyſis B. I. Aufg. 30.

31. 33 gebraucht. Es macht in Abſicht der Etymologie Schwierigkeit. Die Aufgaben, von welchen D. ſagt, daß ſie plasmatiſch ſind, ſind folgende. I. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe und Product gegeben werden. II. Zwey Zahlen zu finden, deren Summe und die Summe ihrer Quadrate gegeben werden. III. Zwey Zahlen zu finden, deren Unterſchied und Product gegeben werden; zugleich ſoll das Vierfache des Products mit dem Quadrate des Unterſchiedes eine Quadratzahl ausmachen. Die beiden erſten Aufgaben ſchließen, wenn ſie möglich ſeyn ſollen, eine Bedingung ein. Gleichung 33, 36, 48. Die dritte iſt zwar unbedingt möglich, wenn gerade keine ganze oder rationale Zahlen verlangt werden; allein die Rationalität, die gefordert wird, macht eine Bedingung. Diophant hat alſo durch ſein Kunſtwort die Abhängigkeit der Auflöſung von den Bedingungen, die er dem Vortrage derſelben beyfügt, anzeigen wollen. Das griechiſche Stammwort πλασσειν heißt formen und auch erdichten. Es iſt freylich nicht recht klar, wie dieſe Bedeutung ſich auf jene Abhängigkeit bezieht. Xylander hat in ſeinem Commentar über den Diophant das Wort überſetzt durch effictum aliunde. Bachet, ein anderer Commentator, tadelt jenen, und behauptet, es bedeute id, a quo aliud quippiam effingi et plasmari possit. Vieta gebraucht das Kunſtwort auch. In der Schrift, de recognitione aequationum, heißt es Cap. VIII. plasma inesse aequationibus intelligitur, quum deducuntur potestates affectae a puris vel minus affectis aeque altis, aut etiam altiores a depressioribus. In der Schrift, de emendatione aequationum, Cap. 1. ſagt er, die Gleichung $x^3 + 3ax^2 + bx = c$ ſey plasmatiſch, aequalitas aliunde effícta. Käſtner erwähnt der Frage über dieſes Kunſtwort auch, in der Geſchichte der Mathematik, 3. B. 158—160 S. Die Frage iſt nur grammatiſch. Dem Sinne nach muß es heißen: ein Fall, der etwas anders vorausſetzt.

Plus, ein Kunſtwort, welches Addition bezeichnet. Das Zeichen iſt +, welches zugleich auch eine poſitive Größe bedeutet.

Pol iſt jeder der Endpuncte eines Durchmeſſers einer Kugel, in Beziehung auf den großen Kreis und die kleinern parallelen, die auf den Durchmeſſer ſenkrecht ſtehen.

Pol bedeutet auch den fixen Punct, aus welchem an die Puncte einer Curve gerade Linien gezogen werden, als Ordinaten zu den Winkeln mit einer gegebenen, durch denſelben Punct gezogenen, geraden Linie, welche als Abſciſſen dienen.

Polarprojection, ſ. Projection.

Polyedrum oder **Polyhedrum** iſt ein Körper, der zwiſchen ebenen Flächen eingeſchloſſen iſt, von πολυ, viel, und ἑδρα, Sitz. Wenn die Seitenflächen gleiche und reguläre Figuren ſind, dann iſt das Polyedrum ein regulärer Körper, der in eine Kugel eingezeichnet werden kann. S. Vieleckige Körper.

Polyedralzahlen, ſ. in dem folgenden Artikel.

Polygon, ſ. Vieleck.

Polygonalzahlen ſind Summen arithmetiſcher Reihen, deren Anfangsglied die Einheit, der Unterſchied der Glieder eine der ganzen Zahlen iſt. Sie machen alſo nur eine beſondere Gattung von arithmetiſchen Reihen der zweyten Ordnung aus.

1. Sie heißen Triangularzahlen, wenn der Unterſchied der Glieder in der arithmetiſchen Reihe = 1 iſt, Quadratzahlen, Pentagonal-, Hexagonal-, Heptagonal-, Octogonalzahlen u. ſ. f. wenn der Unterſchied 2, 3, 4, 5, 6, u. ſ. f. iſt.

2. Die Seite oder Wurzel einer Polygonalzahl iſt die Anzahl der Glieder aus der zugehörigen Reihe, wovon ſie das ſummatoriſche Glied iſt. Die Anzahl der Winkel, welche zu ihrer Beſtimmung

gebraucht wird, iſt diejenige, welche das Vieleck hat, wovon die Polygonalzahl benannt iſt.

3. Der Grund der Benennung, Polygonalzahlen, iſt, daß dieſe Zahlen durch ihre Einheiten, als Puncte, in reguläre Vielecke geſtellt werden können, z. B. die Triangularzahlen in Form eines gleichſeitigen Dreyecks.

1

2 3

4 5 6

7 8 9 10

11 12 13 14 15

Hier enthält die Seite rechter Hand die Trigonalzahlen. Auf ähnliche Weiſe erhält man durch mehrere, mit einem gemeinſchaftlichen Winkel in einander gelegten, Vierecke, Fünfecke ꝛc. die Quadratzahlen, die Pentagonalzahlen, u. ſ. f.

4. Die Anzahl der Winkel in einem regulären Vieleck ſey m. Man nehme eine Folge von ſolchen Vielecken, in welchen die Seiten gleiche (oder, wenn man will, ungleiche) Unterſchiede haben, lege ſie mit einem gemeinſchaftlichen Winkel in einander, und zähle von dem gemeinſchaftlichen Winkelpuncte an die Eckpuncte und Theilungspuncte, ſo erhält man für das erſte Vieleck m Puncte, für das zweyte $2m - 3$, weil 3 Puncte mit dem erſten gemein ſind; für das dritte $3m - 5$; das vierte $4m - 7$; u. ſ. f. Dieſe Zahlen, nach der erſten, machen eine arithmetiſche Progreſſion aus, nämlich für $m = 3$ dieſe,

3, 3, 4, 5, 6 . . . oder 1, 2, 3, 4, 5 . . .
für $m = 4$ dieſe,

4, 5, 7, 9 . . . . oder 1, 3, 5, 7, 9 . . .
für $m = 5$ dieſe,

5, 7, 10, 13 . . . oder 1, 4, 7, 10, 13 . . .
u. ſ. f.

Die Summen dieſer und folgender arithmetiſchen Reihen ſind nach der Reihe die Polygonalzahlen.

5. Es ſey eine Polygonalzahl $= p$; ihre Wurzel

oder Seite $= r$; die Anzahl der Winkel in dem ihr gleichnamigen Vieleck $= m$; ſo iſt

$$p = \frac{1}{2}(m-2)r^2 - \frac{1}{2}(m-4)r.$$

Denn es ſey die arithmetiſche Reihe, deren Summe die Polygonalzahl iſt,

$$1 ; 1+d ; 1+2d ; \ldots 1+(r-1)d,$$

wo d der gemeinſchaftliche Unterſchied d iſt. Die Summe der r Glieder iſt $= \frac{1}{2}r(2+(r-1)d)$, ſ. arithm. Reihe, 6. Da $d = m-2$ iſt, ſo iſt dieſe Summe oder $p = r + \frac{1}{2}r(r-1)(m-2)$, woraus die angegebene Formel folgt.

6. Es iſt alſo eine

Triangularzahl $= \frac{rr+r}{2}$; Quadratzahl $= \frac{2rr}{2}$.

Pentagonalzahl $= \frac{3rr-r}{2}$; Hexagonalz. $= \frac{4rr-2r}{2}$

Heptagonalzahl $= \frac{5rr-3r}{2}$; u. ſ. f.

7. Die Folge dieſer Zahlen iſt

Triangularz.,	1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36 . .
Quadratz.,	1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 . .
Pentagonalz.,	1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92 . .
Hexagonalz.,	1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120 . .

Die Unterſchiede der Polygonalzahlen mit derſelben Seite nach der Folge der Winkelzahlen, ſind $\frac{1}{2}(n^2-n)$.

8. Aus der Polygonalzahl p einer Ordnung die Seite r zu finden, hat man eine quadratiſche Gleichung aufzulöſen. Es ſey der Kürze wegen $m-2=a$; $m-4=b$, ſo daß

$$2p = ar^2 - br, \text{ oder } r^2 - \frac{b}{a}r = \frac{2p}{a}.$$

Daher iſt (Gleichung, 34.) . . $r = \frac{b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{2p}{a} + \frac{bb}{4aa}\right)}$,

oder $r = \frac{b + \sqrt{(8ap+bb)}}{2a}$. Die negative Wurzel werde hier bey Seite geſetzt.

9. Es muß $8ap + bb$ das Quadrat einer ganzen Zahl ſeyn, wenn r eine ganze Zahl ſeyn ſoll. Wäre dieſes nicht, ſo wäre p keine Polygonalzahl im eigentlichen Verſtande, ſondern eine in der Reihe der Polygonalzahlen eingeſchaltete.

Iſt p eine urſprüngliche Polygonalzahl, ſo iſt $8ap + bb$ oder $8(m-2)p + (m-4)^2$ das Quadrat einer ganzen Zahl. Z. B. für Triangularzahlen iſt $8p+1$ ein Quadrat; für Quadrate $16p$, wo p ſelbſt ein Quadrat iſt, und $16p$ keines Zuſatzes bedarf; für Pentagonalzahlen $24p+1$; für Hexagonalzahlen $32p+4$; für Heptagonalzahlen $40p+9$; u. ſ. f.

10. Die Summe der Puncte auf den in einander gelegten Vielecken erhält man auch folgendergeſtalt. Man ziehe von der Reihe,

$$m + 2m + 3m + 4m \ldots\ldots + (r-1)m,$$

ab die Reihe von $r-2$ Gliedern,

$$3 + 5 + 7 \ldots\ldots + (2r-3).$$

Die Summe jener iſt $= \frac{1}{2}(r-1)rm$; dieſer $= r(r-2)$. Der Unterſchied iſt $= \frac{1}{2}(m-2)r^2 - \frac{1}{2}(m-4)r$, wie vorher.

11. Mit den Polygonalzahlen haben ſich die ältern Rechenmeiſter viel beſchäftigt. Marpurg hat in ſeinem Progreſſionalcalcul, Berlin 1774, ſie ſehr weitläufig behandelt. Er führt auch Central-Polygonalzahlen an, die aber nichts anders ſind, als die Summe der Winkel- und Theilungspuncte auf Vielecken, wenn man ſie um einen gemeinſchaftlichen Mittelpunct herum legt, und für dieſen noch 1 addirt. Theon von Smyrna handelt von den Polygonalzahlen in ſeinen mathematiſchen Erläuterungen. C. 19. 20.

12. Die **Polyedralzahlen** ſind den Polygonalzahlen verwandt. Es ſind die Summen der Puncte, welche auf den Ecken, Seitenlinien und Seitenflächen regulärer Polyedren, in gleichen Entfernungen von einander ſich ſtellen laſſen, auf gleiche Art wie die Polygonalzahlen Summen von Puncten in regulären Vielecken.

13. Ein Tetraedrum hat 4 Eckpuncte, 6 Seitenlinien und 4 Seitenflächen. Die Seitenlinie eines Tetraedrum nehme man zur Einheit. Verdoppelt man dieſe, ſo kommen, bey einer gemeinſchaftlichen Ecke (körperlichem Winkel) zu den 4 Puncten an dem erſtern hinzu 3 Eckpuncte und 3 Puncte in der Mitte der nicht gemeinſchaftlichen Seitenlängen, in Summe 6. — Man nehme die Seite = 3, ſo kommen hinzu 3 Eckpuncte, 2(6 — 3) innerhalb der Seitenlinien, und 1 innerhalb der Grundfläche, zuſammen 10. — Man nehme die Seite = 4, ſo kommen hinzu 3 Eckpuncte, 3(6 — 3) innerhalb der Seitenlinien, und 3 innerhalb der Grundfläche, in Summe 15. — Bey ferner ſucceſſiv vergrößerter Anzahl der Theile kommen nach der Reihe hinzu 21, 28, 36, 45, etc. Die Tetraedralzahlen von der Einheit an ſind nun die Summen der Glieder folgender arithmetiſcher Reihe zweyter Ordnung,

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45 ..

das iſt

1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165 ..

14. Ein Hexaedrum oder Würfel hat 8 Eckpuncte, 12 Seitenlinien und 6 Seitenflächen. Man nehme die Seitenlinie eines Hexaedrum zur Einheit, ſo giebt dieſer Körper 8 Puncte. Man verdoppele die Seiten, und gebe beiden Körpern eine gemeinſchaftliche Ecke, ſo kommen zu jenen 8 Puncten hinzu 7 Eckpuncte, 12 — 3 auf der Mitte jeder Seite, und 6 — 3 innerhalb der Seitenflächen, in Summe 19 Puncte. Man nehme die Seite = 3, ſo kommen hinzu 7 Eckpuncte, 2 (12 — 3) auf den Seitenlinien innerhalb der Endpuncte, und 4 (6 — 3) innerhalb der Seitenflächen, zuſammen 37. Nimmt man die Seite = 4, ſo kommen hinzu 7 + 3 (12 — 3) + 9 (6 — 3) = 61. So ſind die Hexaedralzahlen von der Einheit an die Summen der Glieder der arithmetiſchen Reihe zweyter Ordnung,

1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169 ...

das iſt 6 12 18

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512 ...

die Würfel der natürlichen Zahlen.

15. Auf gleiche Art wird ein Liebhaber dieſer Unterſuchungen finden, daß die Octoedralzahlen ſind die Summen der Glieder folgender Reihen,

1, 5, 13, 25, 41, 61, 85 . . .

alſo 4 8 12

1, 6, 19, 44, 85, 146, 231 . . .

16. Die Dodekaedralzahlen ſind die Summen der Glieder folgender Reihe,

1, 19, 64, 136, 235, 361, 514 . . .

alſo

1, 20, 84, 220, 455, 816, 1330 . . .

17. Die Ikoſaedralzahlen ſind die Summen der Glieder folgender Reihe,

1, 11, 36, 76, 131, 201, 286 . . .

alſo 10 25 40

1, 12, 48, 124, 255, 456, 742 . . .

18. Die allgemeinen Formeln für dieſe Zahlen zu finden, dient die Summirungsformel in dem Artikel, arithmetiſche Reihen höherer Ordnungen, 12. Für die Tetraedralzahlen iſt die Formel ſchon daſelbſt, 13, gefunden. Die rte Tetraedralzahl iſt $= \frac{1}{6} r (r+1)(r+2)$.

Die Summe von r Gliedern der Reihe 1, 7, 19, 37, etc. zu finden, iſt $A=1$; $\Delta A=6$; $\Delta^2 A=6$; $\Delta^3 A=0$, alſo die Summe $= r + \frac{r.r-1}{1.2} 6 + \frac{r.r-1.r-2}{1.2.3} 6$. $= r^3$, und die rte Hexaedralzahl $= r^3$.

Die Summe von r Gliedern der Reihe 1, 5, 13, 25 . . . zu finden, ſetze man $A=1$, $\Delta A=4$; $\Delta^2 A=4$, $\Delta^3 A=0$, ſo iſt die Summe $= r + \frac{r.r-1.}{1.2} 4 + \frac{r.r-1.r-2.}{1.2.3} 4$ $= \frac{1}{3} r (2r^2+1)$, als die rte Octoedralzahl.

Die Summe von r Gliedern der Reihe 1, 19, 64, 136 . . . iſt $= \frac{1}{2} r (9r^2 - 9r + 2)$, als die rte Dodekaedralzahl.

Die Summe von r Gliedern der Reihe 1, 11, 36, 76, 131 . . . iſt $= \frac{1}{2} r (5r^2 - 5r + 2)$, als die rte Ikoſaedralzahl.

Von den Polyedralzahlen handelt Marpurg a. a. O. S. 307—313. Die Formeln giebt er in Worten, ohne Beweis, auch ohne Erläuterung, wie dieſe Zahlen gefunden werden mögen. Auch in einigen Rechenbüchern findet man die Formeln; allein die geometriſche Herleitung der Polyedralzahlen habe ich, ſo viel ich nachſehen können, nirgends gefunden. Die Rechenmeiſter haben vielleicht gar ein Geheimniß daraus machen wollen.

Die Pyramidalzahlen ſind die ſummatoriſchen Glieder der Polygonalzahlen, ſ. unten.

Polygonometrie iſt die Lehre von der Ausmeſſung geradlinichter Figuren von mehr als drey Seiten, mittelſt der ſie beſtimmenden Seiten und Winkel. Es wird dienlich ſeyn, dieſe Materie bis zu dem Artikel, Tetragonometrie, zu verſparen, wo auch der Artikel, Trigonometrie, benachbart iſt. Der gegenwärtige Theil dieſes Werks möchte auch kaum die Unterſuchung noch faſſen.

Polynomium, eine Größe, die aus mehr als drey oder vier endlichen, beſonders bezeichneten, Theilen zuſammengeſetzt iſt. Es iſt auch eine aus unendlich vielen Theilen beſtehende Größe darunter begriffen, welche man insbeſondere Infinitinomium nennt.

Polynomial-Coefficient iſt der gegebene oder unveränderliche Factor zu den Potenzen der veränderlichen Größe, nach welchen die Potenz eines Polynomium geordnet iſt. Hindenburg verſteht darunter den Factor, der in dieſem Coefficienten zu dem darin enthaltenen Binomial-Coefficienten kommt, und bezeichnet denſelben durch die Buchſtaben des kleinen deutſchen Alphabets, ſ. Combinatoriſche Analyſis, 35.

Polynomiſcher Lehrſatz (Theorema polynomiale s. infinitinomiale) iſt die analytiſche Formel, welche die Zuſammenſetzung einer Potenz einer vieltheiligen

Größe aus den Theilen derſelben und dem Exponenten der Potenz darſtellt.

1. Die vieltheilige Größe iſt entweder ein bloßes Aggregat von Theilen (auch von ſubtractiven) ohne ein Geſetz der Folge, wie die Reihe,

$$a + b + c + d + e + f + \text{etc.}$$

Oder die Theile ſind nach den Potenzen einer in ihnen als Factor enthaltenen gemeinſchaftlichen Größe geordnet, auf eine ähnliche Art, wie die Theile einer Zahl in der dekadiſchen Fortſchreitung, als in der Reihe,

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \text{etc.}$$

oder allgemeiner

$$az^n + bz^{n+r} + cz^{n+2r} + dz^{n+3r} + \text{etc.}$$

wo a, b, c, d, etc. beſtimmte Größen ſind, z aber unbeſtimmt und veränderlich gelaſſen wird.

2. Eine vieltheilige Größe von der einen oder der andern Form auf eine Potenz zu erheben, kann man auf zweyerley Art verfahren. Entweder leitet man ſie aus dem binomiſchen Lehrſatze her; oder gründet ſie unmittelbar auf die Multiplication gleicher Factoren und die Lehre von den Combinationen. Die Anwendung der Differentialrechnung iſt weniger methodiſch, weil der Satz der Analyſis des Endlichen zugehört.

3. Man betrachte alle nach dem erſten folgende Theile als eine einzelne Größe, das Ganze alſo als eine zweytheilige, $P = A + R$, erhebe nun die Größe $A + R$ auf die Potenz mit dem gegebenen Exponenten m, ſo iſt nach dem binomiſchen Lehrſatze, mit den für denſelben gebrauchten Bezeichnungen der Coefficienten (Binomial-Coefficienten, 1.)

$$P^m = A^m + {}^m\mathfrak{A}\, A^{m-1} R + {}^m\mathfrak{B}\, A^{m-2} R^2 + {}^m\mathfrak{C}\, A^{m-3} R^3 + {}^m\mathfrak{D}\, A^{m-4} R^4 \ldots + {}^m\mathfrak{N}\, A^{m-n} R^n + \text{etc.}$$

Nun entwickele man die Potenzen R^2, R^3, R^4, etc. nach der gemeinen Multiplication, und ſetze die Werthe derſelben, ſo wie auch R ſelbſt, in die für P^m gefundene Reihe, ſo erhält man ſo viele Glieder für P^m als man nöthig findet, und mag auch daraus durch Bemerkung

des Geſetzes ihrer Formation ein allgemeines Geſetz herleiten, es ſey nun, daß man die Glieder von P^m nach den Potenzen des erſten Gliedes A der Reihe P oder nach den Potenzen von z ordnet. Um aber ohne Induction das Geſetz der Glieder in P^m zu erhalten, muß die durch R bezeichnete Reihe auf eine unbeſtimmte Potenz erhoben werden. Dieſes iſt nun freylich daſſelbe, wie das, was für die gegebene Reihe P verlangt wird, allein der Unterſchied iſt, daß die Reihe R nur auf eine Potenz mit einem ganzen Exponenten erhoben werden darf, dagegen der Exponent m für P jeder Art muß ſeyn können, eine ganze oder gebrochne, poſitive oder negative Zahl. Iſt nun der binomiſche Lehrſatz allgemein erwieſen, ſo hat man nur die Potenz einer polynomiſchen Größe für ganze Exponenten zu ſuchen, um dieſelbe auch für jede andere Art von Exponenten darſtellen zu können. Dieſen Weg hat Hindenburg befolgt in der Schrift, infinitinomii dignitatum exponentis indeterminati historia, leges ac formulae. Gottingae, 1779.

4. Nach dem beſchriebenen Verfahren erhebt man ſich von dem Beſondern zu dem Allgemeinen, von der Potenzirung einer zweytheiligen Größe zu der einer vieltheiligen. Allein es iſt auch erforderlich, das Allgemeine unabhängig von dem Beſondern zu erhalten, und dieſes zu einem Folgeſatze aus jenem zu machen. Der polynomiſche Lehrſatz muß für ganze Exponenten auch unabhängig von dem binomiſchen, aus der Natur der Multiplication, mit Zuziehung der Lehre von dem Combinationen gefunden werden. Dann iſt es noch nöthig, die für ganze Exponenten gefundene Form auch für jede andere Art von Exponenten als gültig zu erweiſen.

Erſte Form eines Polynomium:

$$a + b + c + d + e + f + \text{etc.} = P.$$

5. Aufgabe. Es ſoll das Aggregat, $a + b + c + d + e + f + \text{etc.} = P$, in welchem kein Geſetz der Form der einzelnen Theile nach ihrer Folge ange-

nommen wird, auf die Potenz mit dem ganzen poſitiven Exponenten m erhoben werden.

Da bey der Multiplication vieltheiliger Größen jeder einzelne Theil jedes Factors in jeden einzelnen Theil jedes der andern Factoren multiplicirt wird, ſo beſteht die Potenz P^m aus Partialproducten von der Form $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$ ..., in welchen die Summe der Exponenten $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc. $= m$ iſt, und die Größen a, b, c, d .... auf jede beliebige Art aus der Reihe P genommen werden können. Die hier angeſetzten a, b, c, d vertreten die Stelle aller übrigen. Ein Partialproduct kann lauter gleiche Factoren enthalten, wie a^m, b^m; oder zwey verſchiedene, wie $a^\alpha b^{m-\alpha}$; oder drey verſchiedene, wie $a^\alpha b^\beta c^\gamma$, oder mehrere theils verſchiedene, theils gleiche, oder lauter verſchiedene. So viele Zerfällungen die Zahl m zuläßt, ſo vielerley Formen von Partialproducten ſind vorhanden. Eine und dieſelbe Combination von Factoren, wie a, b, c, d, etc. mit denſelben Wiederholungsexponenten, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc. kann mehrmahls vorhanden ſeyn, weil die Factoren der Partialproducte auf verſchiedene Arten aus den gleichen Hauptfactoren P der Potenz P^m genommen werden können. Man unterſcheide dieſe gleichen Hauptfactoren nach den Stellen ihrer Folge, als

I. $a + b + c + d + e +$ etc.

II. $a + b + c + d + e +$ etc.

III. $a + b + c + d + e +$ etc.

u. ſ. f.

Die Factoren in den Partialproducten ordne man nach den Stellen der Hauptfactoren, woraus ſie genommen ſind, z. B. aabdabce, für $m = 8$, wo die beiden erſten a aus I. und II. das erſte b aus III; d aus IV. u. ſ. f. genommen ſind. Nun iſt klar, daß jede Combination ſo oft vorkommt, als oft ſich die Elemente derſelben, oder die Partialfactoren, verſetzen laſſen. Zufolge der Lehre von den Verſetzungen (ſ. Ver-

ſetzungen) iſt die Anzahl der Verſetzungen in derſelben Combination $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$ aus m Factoren =

$$\frac{m.m-1.m-2\ldots2.1.}{(\alpha.\alpha-1\ldots)(\beta.\beta-1\ldots1)(\gamma.\gamma-1\ldots1)(\delta.\delta-1\ldots1)\,\text{etc.}}$$

Der Zähler iſt die Anzahl der Verſetzungen von m verſchiedenen Dingen; die Factoren des Nenners ſind die Mengen der Verſetzungen von α, von β, von γ, von δ, u. ſ. f. verſchiedenen Dingen.

Es iſt alſo noch nöthig, alle Formen der Combinationen von je m Größen aus der Reihe, a + b + c + d + ... mit Wiederholungen ſowol als ohne ſolche aufzuſtellen, welche dann mit den zugehörigen Verſetzungszahlen begleitet werden. Die Formen ergeben ſich alle aus den Zerlegungen einer Zahl in alle ihre ganzen Theile, ſ. Zerlegung der Zahlen, oder Combination, IV. Bey kleinern Zahlen iſt die Sache äußerſt leicht.

Man bezeichne das Aggregat aller ähnlichen Verbindungen von a, b, c, d ... durch das vorgeſetzte Zeichen $\int$, ſo daß $\int a$ das Aggregat der a, b, c ..., $\int a^2$ die Summe ihrer Quadrate; $\int ab$ die Summe der Binionen; $\int abc$ der Ternionen; $\int a^2b$ die Summe der Verbindungen von denſelben gleichen mit einer von ihnen verſchiedenen, u. ſ. f.

Es iſt nun

$$P = \int a.$$
$$P^2 = \int a^2 + 2\int ab.$$
$$P^3 = \int a^3 + 3\int a^2 b + 6\int abc.$$
$$P^4 = \int a^4 + 4\int a^3bc + 6\int a^2b^2 + 12\int a^2bc + 24\int abcd.$$
$$P^5 = \int a^5 + 5\int a^4b + 10\int a^3b^2 + 20\int a^3bc + 30\int a^2b^2c + 60\int a^2bcd + 120\int abcde.$$
$$P^6 = \int a^6 + 6\int a^5b + 15\int a^4b^2 + 30\int a^4bc + 20\int a^3b^3 + 60\int a^3b^2c + 120\int a^3bcd + 90\int a^2b^2c^2 + 180\int a^2b^2cd + 360\int a^2bcde + 720\int abcdef.$$

etc. = etc.

Die Combinationen ſind in jedem Abſchnitte dieſer Formel lexikographiſch geordnet, wobey es kaum möglich iſt, eine Form zu überſehen. Formen, worin ein folgender Exponent gröſſer iſt, als ein vorhergehender, ſind ſchon in einer vorhergehenden Form begriffen.

6. Man ſetze $P = a + S$, ſo iſt

$$P^m = a^m + \mathfrak{A}a^{m-1} . S + \mathfrak{B}a^{m-2} . S^2 + \mathfrak{C}a^{m-3} . S^3 + \mathfrak{D}a^{m-4} . S^4 + \text{etc.}$$

Hier haben die Werthe der Potenzen von S eben die Form, welche die Potenzen von P in (5.) haben, indem man nur ſtatt a, b, c, d, etc. die Buchſtaben b c, d, e, etc. zu ſetzen braucht. Die Formel iſt die in (3.) angeführte, wozu hier nun die Potenzen von S in Bereitſchaft ſind. Wenn m eine ganze Zahl iſt, ſo begreift das letzte Glied der Formel alle Combinationen, die kein a enthalten.

7. Die Entwickelung der Summen der Combinationen iſt bey einer beträchtlichen Anzahl Glieder in P beſchwerlich. Man muß die Glieder nach ihrer Gröſſe ordnen, damit die unbeträchtlichen Glieder in der Potenz weggelaſſen werden können. Darum iſt die folgende Form vorzüglicher, bey welcher dieſes bequem erhalten werden kann.

Zweyte Form eines Polynomium,

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.} = P.$$

8. Es ſoll das Polynomium, $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \text{etc.} = P$ auf die Potenz mit dem ganzen poſitiven Exponenten m erhoben werden.

Die Potenz P^m werde ſo wie P nach den Potenzen von z geordnet, ſo hat ſie die Form,

$$P^m = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 \ldots + Nz^n + \text{etc.}$$

Jeder dieſer Coefficienten beſteht aus Producten von m Factoren aus der Reihe der Coefficienten in P, aber nur aus ſolchen, deren Stellenzahlen nach dem Zeiger,

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . . .
a, b, c, d, e, f, g . . . .

eine Summe gleich dem Exponenten von z geben, z. B.

zu z^5 die Producte $a^{m-1}f$; $a^{m-2}(be + cd)$; $a^{m-3}(b^2d + bc^2)$; $a^{m-4}b^3c$; $a^{m-5}b^5$.

Die Producte bis zu $n = 9$ ſind in dem Artikel, Combination, 40, angegeben, wo nur in der Horizontalzeile von g ſtatt b^5c und b^5 zu ſetzen ſind b^4c und b^6, und in der von l noch b^3h ſtatt bh^3. Oder man zerlegt den Exponenten von z in alle ſeine ganzen Theile, ſetzt für dieſe die in dem Zeiger zugehörigen Buchſtaben, und fügt jedem einzelnen Producte ſo viele Factoren a hinzu, daß die Anzahl aller $= m$ wird.

Der numeriſche Coefficient eines Literalproducts, $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$ iſt, wie vorher bemerkt worden $= \frac{m \cdot m-1 \ldots 2 \cdot 1}{(\alpha \ldots 1)(\beta \ldots 1)(\gamma \ldots 1)(\delta \ldots 1).\text{etc.}}$, oder $\frac{m \cdot m-1 \ldots (\alpha+1)}{(\beta \ldots 1)(\gamma \ldots 1)(\delta \ldots 1).\text{etc.}}$. Man ſetze $\alpha = m - r$, und gebe dem numeriſchen Coefficienten die Form

$$\frac{m.m-1\ldots(m-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots r} \times \frac{r \cdot r-1 \ldots 1}{(\beta\ldots1)(\gamma\ldots1)(\delta\ldots1).\text{etc.}},$$

ſo iſt der erſte Factor deſſelben der rte Binomialcoefficient in der mten Potenz eines Binomium. Der andere Factor iſt die Verſetzungszahl zu dem Producte $b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots$, welches mit dem Factor a^{m-r} oder a^α eines der Partialproducte ausmacht. Die Binomialcoefficienten bezeichne man durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, u. ſ. f. wie in dem Artikel, Binomial-Coefficienten, doch mit Weglaſſung der Bezeichnung des Exponenten.

Die Coefficienten von z in der Potenz P^m ſind nun

$A = a^m$.

$B = \mathfrak{A}a^{m-1}b$.

$C = \mathfrak{A}a^{m-1}c + \mathfrak{B}a^{m-2}b^2$.

$D = \mathfrak{A}a^{m-1}d + \mathfrak{B}a^{m-2}.2bc + \mathfrak{C}a^{m-3}b^3$.

$E = \mathfrak{A}a^{m-1}e + \mathfrak{B}a^{m-2}(2bd + c^2) + \mathfrak{C}a^{m-3}.3b^2c + \mathfrak{D}a^{m-4}.b^4$.

$F = \mathfrak{A}a^{m-1}f + \mathfrak{B}a^{m-2}(2be + 2cd) + \mathfrak{C}a^{m-3}(3b^2d$
$+ 3bc^2) + \mathfrak{D}a^{m-4}.4b^3c + \mathfrak{E}a^{m-5}.b^5.$
$G = \mathfrak{A}a^{m-1}g + \mathfrak{B}a^{m-2}(2bf + 2ce + d^2)$
$+ \mathfrak{C}a^{m-3}(3b^2e + 6bcd + c^3) + \mathfrak{D}a^{m-4}(4b^3d$
$+ 6b^2c^2) + \mathfrak{E}a^{m-6}.5b^4c + \mathfrak{F}a^{m-6}b^6.$
etc = etc.

9. Dieſe Form des Lehrſatzes entſteht aus der erſten, nach der Abänderung in (6.), durch Zerlegung der daſelbſt angegebenen Summen. Zu jedem der Glieder b, c, d, e, etc. fügt man die Potenzen von z in der zweyten Form nach der Reihe bey, und nimmt die Terminos zuſammen, welche einerley Potenz von z enthalten, um daraus die Glieder in P^m zu bilden. Die allgemeine Form ſowol in Abſicht der Combinationen von b, c, d . . . als der ganzen Coefficienten ſ. in combinatoriſcher Analyſis, 35.

Allgemeinheit der zweyten polynomiſchen Formel für alle Arten von Exponenten.

10. Es bezeichnen ${}^{\alpha}P$ und ${}^{\beta}P$ die zweyte Formel unſers Lehrſatzes, wenn darin ſtatt m irgend ein paar Exponenten, α, β, geſetzt werden, ohne dadurch ſchon anzunehmen, daß es Potenzen von P mit dieſen Exponenten ſeyn. Man multiplicire beide Werthe in einander, oder gedenke ſich nur, daß dieſe Operation vorgenommen werde. Sind α und β ganze Zahlen, ſo iſt ${}^{\alpha}P \times {}^{\beta}P = {}^{\alpha+\beta}P$, weil in dieſem Falle $P^{\alpha} . P^{\beta} = P^{\alpha+\beta}$ iſt, alſo das Product anſtatt α und β in den Factoren den Exponenten $\alpha + \beta$ enthält. Das Product hat alſo in dieſem Falle, welche ganze Werthe übrigens für α und β genommen werden, einerley Form mit ſeinen Factoren. Nun iſt es bey der wirklichen Multiplication einerley, ob α und β ganze oder gebrochne, poſitive oder negative Zahlen bedeuten, weil es einfache Symbole ſind, die in jedem dieſer Fälle auf einerley Art mit den übrigen Größen zuſammengeſetzt werden. Daher iſt allgemein

${}^{\alpha}P \times {}^{\beta}P = {}^{\alpha+\beta}P$, d. i. das Product hat dieſelbe Form mit ſeinen Factoren, indem $\alpha + \beta$ ſtatt α und β eintreten.

11. Daher hat das Product ${}^{\alpha}P \times {}^{\beta}P \times {}^{\gamma}P \times {}^{\delta}P \times$ etc. einerley Form mit den Factoren, oder es iſt $= {}^{\alpha+\beta+\gamma+\delta \ldots}P$.

12. Man ſetze $\alpha = \beta = \gamma = \delta =$ etc. und $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc. $= n\alpha$, ſo iſt $({}^{\alpha}P)^{n} = {}^{n\alpha}P$, und ${}^{\alpha}P = ({}^{n\alpha}P)^{\frac{1}{n}}$. Es ſey $n\alpha$ eine ganze Zahl $= m$, ſo iſt ${}^{n\alpha}P = {}^{m}P = P^{m}$, und ${}^{\alpha}P = P^{\frac{m}{n}}$ oder ${}^{n}P = P^{\frac{m}{n}}$: das iſt, die Formel für eine gebrochne Potenz von P wird erhalten, wenn in der polynomiſchen Formel ſtatt m der gebrochne Exponent $\frac{m}{n}$ geſetzt wird.

13. Man verwandle den einen Factor in dem Producte ${}^{\alpha}P \times {}^{\beta}P$ in einen Diviſor, ſo iſt $\frac{{}^{\alpha}P}{{}^{\beta}P} = {}^{\alpha-\beta}P$, wenn α und β ganze Zahlen, und β kleiner als α iſt. Der Quotient von ${}^{\alpha}P$ durch ${}^{\beta}P$ hat alſo in dieſem Falle dieſelbe Form mit dem Dividendus und Diviſor. Bey der wirklichen Diviſion iſt es gleichgültig, ob α größer oder kleiner ſey; alſo haben die Quotienten ${}^{\alpha}P : {}^{\beta}P$ und ${}^{\beta}P : {}^{\alpha}P$ einerley Form, das iſt, $P^{\alpha-\beta}$ mit $P^{\beta-\alpha}$, oder P^{-m} mit P^{+m}.

14. Da α und β auch gebrochne Zahlen seyn können, und dabey die Form der Potenzen P^{α}, P^{β} dieſelbe bleibt wie für ganze Zahlen, ſo hat auch $P^{-m:n}$ dieſelbe Form mit $P^{+m:n}$.

15. Die Allgemeinheit des binomiſchen Lehrſatzes iſt auf dieſelbe Art erwieſen worden (ſ. denſelben, 26—30.); nur konnte da durch Rechnung gezeigt werden, daß für

eine zweytheilige Größe P die durch $^{\alpha}P$ und $^{\beta}P$ bezeichneten Formeln ein Product von derſelben Form wie der Factoren ſelbſt geben, was man auch für α und β für Zahlen ſetzen mag.

16. Die erſte Form des polynomiſchen Lehrſatzes ſetzt ganze Exponenten voraus. Wenn man ſie aber ſo abändert, wie in (6.) geſchehen iſt, ſo iſt ſie eben ſo allgemein, wie der binomiſche Lehrſatz.

17. Einen gebrochnen Exponenten $\frac{m}{n}$ zerlege man in die nächſt kleinere ganze Zahl und den überſchießenden Bruch, z. B. $\frac{3}{2}$ in $1 + \frac{1}{2}$, oder $\frac{7}{3}$ in $2 + \frac{1}{3}$, und ſondere die Potenz von a mit dem Bruchexponenten von der Formel als gemeinſchaftlichen Factor ab.

18. Exempel. Es iſt

$$(a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \text{etc.})^{\frac{1}{2}} =$$

$$a^{\frac{1}{2}} \Big[1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} z + \left(\tfrac{1}{2} \cdot \frac{c}{a} - \tfrac{1}{8} \cdot \frac{b^2}{a^2} \right) z^2$$

$$+ \left(\tfrac{1}{2} \cdot \frac{d}{a} - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{bc}{a^2} + \tfrac{1}{16} \cdot \frac{b^3}{a^3} \right) z^3$$

$$+ \left(\tfrac{1}{2} \cdot \frac{e}{a} - \tfrac{1}{8} \cdot \frac{2bd + c^2}{a^2} + \tfrac{3}{16} \cdot \frac{b^2 c}{a^3} - \tfrac{5}{128} \cdot \frac{b^4}{a^4} \right) z^4$$

$$+ \text{etc.} \Big].$$

Dritte Form des polynomiſchen Lehrſatzes.

19. In den beiden erſten Formen iſt jeder Coefficient für ſich, unabhängig von den andern, durch Combinationen der Elemente a, b, c, d, etc. in der Wurzel gegeben. Es iſt noch eine dritte Form, eine involutoriſche oder rücklaufende, übrig, worin jeder Coefficient aus allen vorhergehenden zuſammengeſetzt wird. Wenn gleich nach dieſer alle vorhergehenden Coefficienten berechnet ſeyn müſſen, um einen Coefficienten in einer gegebenen Stelle zu finden, ſo empfiehlt ſich doch auch dieſe Form durch ihre faßliche Regelmäßigkeit.

Zu numeriſchen Berechnungen der Coefficienten iſt dieſelbe ſehr nützlich, da dieſe immer nach der Reihe geſucht werden. Die Formel iſt folgende.

20. Es ſey

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \text{etc.} = p;$$
$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.} = p^m = P,$$

ſo iſt

$$A = a^m.$$
$$aB = mbA.$$
$$2aC = 2mcA + (m-1)bB.$$
$$3aD = 3mdA + (2m-1)cB + (m-2)bC.$$
$$4aE = 4meA + (3m-1)dB + (2m-2)cC + (m-3)bD.$$
$$5aF = 5mfA + (4m-1)eB + (3m-2)dC + (2m-3)cD + (m-4)bE.$$

u. ſ. f.

21. Dieſe Form zu finden, ſehe man z als eine veränderliche Größe an, und ſuche Gleichungen zwiſchen den zuſammen gehörigen Veränderungen der Größe z, der vieltheiligen Größe p, und ihrer Potenz P. Da die Form der Coefficienten in P für die veränderte z dieſelbe bleibt, ſo wird dieſes auf Gleichungen zur Beſtimmung der Coefficienten führen.

22. Die zuſammen gehörigen endlichen Veränderungen von z, p, P ſeyn Δz, Δp, ΔP, das iſt, die Differenz zweyer Werthe von z, von p und von P. In dem Werthe von Δp bezeichne man alles, was das Quadrat von Δz und höhere Potenzen enthält, durch $q\Delta z^2$, ſo daß q außer den Theilen von p auch noch Potenzen von Δz enthalte; eben ſo bezeichne man alles, was in ΔP das Quadrat von Δz und höhere Potenzen enthält, durch $Q\Delta z^2$. Solchergeſtalt iſt, wenn der Werth der Größe p von dem Werthe $p + \Delta p$ abgezogen wird,

$$\Delta p = b\Delta z + 2cz\Delta z + 3dz^2\Delta z + 4ez^3\Delta z + \text{etc.} + q\Delta z^2.$$

Eben ſo, wenn P von $P + \Delta P$ abgezogen wird,

$$\Delta P = B\Delta z + 2Cz\Delta z + 3Dz^2\Delta z + 4Ez^3\Delta z + \text{etc.} + Q\Delta z^2$$

Weil $(p + \Delta p)^m = P + \Delta P$ iſt, ſo iſt

$$p^m + mp^{m-1}\Delta p + \frac{m.m-1}{1.2}p^{m-2}\Delta p^2 + \text{etc.} = P + \Delta P,$$

und, weil $p^m = P$ iſt,

$$mp^{m-1}\Delta p + \frac{m.m-1}{1.2}p^{m-2}\Delta p^2 + \text{etc.} = \Delta P, \text{ oder}$$

$$mp^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2}p^{m-2}\Delta p + \text{etc.} = \frac{\Delta P}{\Delta p}.$$

Hier ſetze man für ΔP und Δp ihre vorher gefundenen Werthe, ſo erhält man die Gleichung

$$mp^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2}p^{m-2}\Delta p + \text{etc.} = \frac{B + 2Cz + \text{etc.} + Q\Delta z}{b + 2cz + \text{etc.} + q\Delta z}.$$

Multiplicirt man dieſe Gleichung mit dem Nenner des Bruches in dem Theile rechter Hand, ſo beſteht ein Theil der dadurch erhaltenen Gleichung blos aus den Coeffizienten in p und P nebſt z und deren Potenzen, ein Theil enthält nebſt dieſen Δz und deren Potenzen, noch ein Theil Producte aus Δp und Δz und deren Potenzen. Nun iſt der Werth von Δz und der daraus fließende von Δp ganz willkürlich und unabhängig von den Coeffizienten in p und P. Die Relation dieſer letztern bleibt, was man auch der Veränderung Δz für einen Werth beylegt. Darum muß alles, was Δz und Δp enthält, für ſich allein ſich aufheben, weil ſonſt jene Relation dadurch veränderlich würde. Folglich macht alles, was kein Δz und Δp enthält, eine beſondere Gleichung für ſich allein aus. Solchergeſtalt iſt

$$mp^{m-1} = \frac{B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \text{etc.}}{b + 2cz + 3dz^2 + 4ez^3 + \text{etc.}}.$$

Dieſe Gleichung werde mit p und dem Nenner des Bruches multiplicirt, und darauf werde für p^m und p ihr Werth geſetzt, ſo iſt,

$m(A + Bz + Cz^2 + \text{etc.})(b + 2cz + 3dz^2 + \text{etc.})$
$= (a + bz + cz^2 + \text{etc.})(B + 2Cz + 3Dz^2 + \text{etc.})$
Dieſe beiden Producte entwickelt, und mit ihren Theilen auf eine und dieſelbe Seite des Gleichheitszeichens geſetzt, geben eine nach den Potenzen von z fortſchreitende Gleichung. Da die Coefficienten a, b, c, etc. ſo wie A, B, C, etc. von z ganz unabhängig ſind, ſo muß alles, was in dieſelbe Potenz von z multiplicirt iſt, eine beſondere Gleichung für ſich allein ausmachen, weil ſonſt jene Coefficienten für jeden veränderlichen Werth von z ſich verändern würden. Dadurch ergeben ſich nun die geſuchten Gleichungen zur Beſtimmung der Relation der Coefficienten, nämlich

I. $A = a^m$.
II. $mAb = aB$.
III $m(2Ac + Bb) = 2aC + bB$.
IV. $m(3Ad + 2Bc + Cb) = 3aD + 2bC + cB$.
V. $m(4Ae + 3Bd + 2Cc + Db) =$
$4aE + 3bD + 2cC + dB$.
VI $m(5Af + 4Be + 3Cd + 2Dc + Eb) =$
$5aF + 4bE + 3cD + 4dC + eB$.
u. ſ. f.

Hieraus folgen die oben für A, B, C, etc. angegebenen Werthe.

23 Die Beſchaffenheit des Exponenten m mag auch bey dieſer Form ſeyn, welche man will. Es kommt hier nur auf die beiden erſten Glieder der Binomialpotenz $(p + \Delta p)^m$ an, deren Form ſelbſt unabhängig von der Allgemeinheit des binomiſchen Lehrſatzes blos durch die Ausziehung der Wurzel nach der gemeinen Art ſich erweiſen läßt.

24 Man würde die Formeln für die Coefficienten A, B, C, etc. auch erhalten, wenn man ſtatt der Verhältniſſe endlicher Differenzen, $\Delta z : \Delta p$; $\Delta z : \Delta P$; $\Delta p : \Delta P$, die Differentialverhältniſſe anwendete, und würde dabey noch ſchneller zum Ziele kommen. Allein es iſt hier gar nicht die Abſicht, die letzten Verhältniſſe der Veränderungen anzugeben, welches die Beſtimmung

der Differentialrechnung iſt. Die Veränderungen von z, p, P werden hier nur eingeführt, um ſie wieder abzuſondern, und eine Gleichung zwiſchen den Coefficienten in der Wurzel und in der Potenz zu erhalten, die von jenen Veränderungen unabhängig iſt. Der polynomiſche Lehrſatz in dieſer dritten Form bleibt alſo auch ein Eigenthum der Analyſis endlicher Größen, ſelbſt wenn zu dieſem Beweiſe Differentialverhältniſſe angewandt würden.

25. Das Polynomium, $ax^n + bx^{n+r} + cx^{n+2r} + dx^{n+3r} +$ etc. auf eine Potenz zu erheben, iſt nur nöthig, den Factor x^n abzuſondern, um dieſen beſonders zu potenziren, und ſtatt z in den obigen Formeln x^r zu ſetzen.

Geſchichte des polynomiſchen Lehrſatzes.

26. Die erſte hier vorgetragene Form hat Leibnitz zuerſt gefunden. In einem Briefe an Joh. Bernoulli vom J. 1695 Commerc. epist. T. I. p. 47.) meldet er, daß er ſchon vor einiger Zeit eine ſehr merkwürdige Regel (mirabilem regulam) für die Coefficienten der Glieder in den Potenzen vieltheiliger Größen gefunden habe. Bernoulli zeigt ihm in der Antwort an, daß er auf dieſe Veranlaſſung die Regel entdeckt habe. Sie iſt die Formel für die Verſetzungszahlen.

27. Jakob Bernoulli giebt in einem nachgelaſſenen Aufſatze (Operum T. II. p. 993) zwey Methoden an. Die erſte führt auf die Form in (6.), doch wird nicht gezeigt, wie alle Combinationen zu finden ſind. Die zweyte giebt die zweyte oben vorgetragene Form, durch Differentiirung einer logarithmiſchen Gleichung. Die Coefficienten in der Potenz werden mühſam einer aus dem andern hergeleitet. Die Glieder der gegebenen Reihe, a, b, c, d, etc. bedeuten bey Bernoulli Potenzen einer veränderlichen Größe mit ihren Coefficienten, ſo auch die Glieder der Potenz. Dieſes erſchwert die Rechnung. Er iſt zu der Unterſuchung durch eine Ab-

handlung von Moivre in den engliſchen Transactionen veranlaßt worden, die er aber nicht geſehen hatte.

28. Dieſe Abhandlung von Moivre ſteht in der gedachten Sammlung, Vol. XIX. für das J. 1697. Sie enthält die zweyte Form des polynomiſchen Lehrſatzes, und beſchränkt ſich noch auf ganze Exponenten. Die Coefficienten in der Potenz werden jeder aus allen vorhergehenden hergeleitet.

29. Die dritte Form hat zuerſt Cheyne in der Schrift: Fluxionum methodus inversa, Londini, 1703, vorgetragen.

30. Colſon hat in ſeiner Überſetzung von Newtons Methodus fluxionum et serierum infinitarum, Londini, 1736, eine Herleitung des polynomiſchen Lehrſatzes aus der Differential- und Integralrechnung beygefügt, wobey die höhern Differentiale nach der Reihe gebraucht werden. Die Integrationen, welche bey ihm die Rechnung undeutlich machen, konnte er ſich leicht erſparen, wenn er in der Reihe für die Potenz des Polynomium die Coefficienten und die Potenzen von z nicht unter einem Symbol begriff, und die Differentialgleichungen von demſelben Grade nach einander verglich, wobey es ganz klar iſt, daß $z = 0$ geſetzt werden kann, und daß dadurch jedesmahl ein Coefficient beſtimmt wird.

31. Die dritte Form des polynomiſchen Lehrſatzes hat Euler auf eine kurze und einleuchtende Art aus der Differentialgleichung vom erſten Grade hergeleitet, in den Institt. Calc. diff. P. II. §. 202. Nur war es nicht nöthig, logarithmiſche Differentiale zu gebrauchen, da die Differentiale der Potenzen ſchon zureichen. Nämlich, wenn das Polynomium $= p$, und $p^m = P$ iſt, ſo iſt $m p^{m-1} \partial p = \partial P$, und daher $m P = p \frac{\partial P}{\partial p}$. Nimmt man für P eine Reihe mit unbekannten Coefficienten an, wie in (20.), ſo erhält man hieraus die Differentiale ∂p und ∂P durch ∂z, und dadurch den end-

ichen Quotienten $\frac{\partial P}{\partial p}$, alſo eine Gleichung zwiſchen den Coefficienten beider Reihen, wie in (22.), wodurch die in der Reihe P beſtimmt werden.

32. Vorzüglich hat ſich Hindenburg um das polynomiſche Theorem verdient gemacht. Er hat gezeigt, wie in den beiden erſten Formen jedes Glied unabhängig von den vorhergehenden gefunden werden kann, und dieſes durch Hülfe der Lehre von den Combinationen, von der Zerlegung der Zahlen und von den Verſetzungen. Auch iſt ſeine neue Bezeichnungsart ſehr dienlich, das Geſetz der Formation kurz und deutlich darzuſtellen. Man ſehe ſeine Schrift: Infinitinomii dignitatum exponentis indeterminati historia, leges ac formulae, Gottingae, 1779. 4.

33. Der polynomiſche Lehrſatz, das wichtigſte Theorem der ganzen Analyſis nebſt einigen verwandten und andern Sätzen, neu bearbeitet und dargeſtellt, von Tetens, Klügel, Kramp, Pfaff und Hindenburg, Leipzig, 1796. 8. In dieſer Sammlung enthält die erſte Abhandlung von Tetens eine Entwickelung des Polynomialtheoremes ohne unmittelbaren Gebrauch der Combinationsmethode. Die Art, wie ich in der zweyten Abhandlung die erſte Form des Lehrſatzes behandelt, und den Beweis der Allgemeinheit geführt habe, iſt von der in dieſem Artikel angewandten, verſchieden. Zu dieſer Sammlung iſt im J. 1800 noch eine zweyte gekommen, und beide haben nun den Titel: Sammlung combinatoriſch-analytiſcher Abhandlungen herausgegeben von C. F. Hindenburg. I. II. Leipzig, 1796. 1800.

Porisma iſt ein Satz, in welchem ausgeſagt wird, daß einem oder mehrern gegebenen (unveränderlichen) Dingen, ſo wie auch unzählig vielen Dingen, die zwar nicht gegeben werden, aber zu den gegebenen Dingen eine beſtimmte Relation haben, eine gewiſſe gemeinſchaftliche Beſchaffenheit zukomme.

Oder: ein Porisma iſt eine Aufgabe, worin gefordert wird, etwas beſtimmtes, das mit einem unbeſtimmten nach einem gewiſſen Geſetze verknüpft ſey, zu finden.

1. Dieſe Benennung einer Gattung mathematiſcher Sätze iſt aus der Geometrie der Alten. Euklides hat drey Bücher, Porismata betitelt, geſchrieben, die verloren ſind. Pappus bezeugt, daß ſie eine höchſt kunſtreiche Sammlung zur Analyſis der ſchwerſten Aufgaben geweſen ſind. Die Neuern, ſagt er, hätten nichts hinzuzufügen gewußt; ſie hätten ſelbſt die Natur dieſer Sätze nicht einmahl recht eingeſehen, und eine zu enge Erklärung der Porismen gegeben. Pappus führt viele Sätze aus dem Euklidiſchen Werke an, aber unglücklicher Weiſe ſind auch hier allenthalben Lücken, den Mangel der nöthigen Figuren nicht gerechnet. Daher iſt es ſehr ſchwer geworden, dieſe Bücher ſo gut als möglich wieder herzuſtellen. Wir beſitzen nur noch die Lemmata des Pappus darüber, L. VII. prop. 127—164.

2. Albert Girard erwähnt in ſeiner Trigonometrie, (1629), daß er die Porismen wieder gefunden habe, auch in ſeiner Ausgabe von Stevins Werken. Man ſieht aber aus dem, was er an jener Stelle beyfügt, daß er einige Sätze über die Durchſchnitte gerader Linien für Porismen überhaupt gehalten, und alſo ſich einen zu engen Begriff davon gemacht habe. — Nach ihm hat Fermat einen Verſuch gemacht, die Porismen wieder aufzuſtellen, allein er nahm mit den jüngern griechiſchen Geometern eine zu eingeſchränkte Erklärung an, da er ſie als umgekehrte Localſätze anſahe.

Auch Bullialdus (Bouillaud), der in ſeinen Exercitationibus geometricis, 1667, die Porismen zu erklären verſuchte, iſt darin nicht glücklich geweſen. Halley, der den griechiſchen Text der Vorrede zum 7ten Buche des Pappus herausgegeben hat, bekennt, daß er von der Nachricht, die darin ertheilt wird, nichts verſtehe.

3. Endlich ſcheint Robert Simſon, der ſo erfahrne Kenner der alten Geometrie, die Porismen des Euklides ſo genau, als es möglich iſt, wieder geliefert zu haben, nachdem er ſein Vorhaben wegen der großen Schwierigkeit ſchon einmahl ganz aufgegeben hatte. Sein erſter Verſuch iſt in den Engl. Tranſactionen vom J. 1723, No. 177. enthalten. Die völlige Ausführung iſt in ſeinen Operibus posthumis, Glasguae 1776 befindlich, pag. 317—594. Von ihm iſt auch die obige Erklärung entlehnt. Im Original lautet ſie ſo: Porisma est Propositio in qua proponitur demonstrare rem aliquam, vel plures datas esse, cui, vel quibus, ut et cuilibet ex rebus innumeris, non quidem datis, sed quae ad ea quae data sunt eandem habent relationem, convenire ostendendum est affectionem quandam communem in propositione descriptam. Die Conſtruction ſcheint faſt die Mühe zu zeigen, welche die Erklärung gekoſtet hat. Das Wort data in der Erklärung iſt zweydeutig. Es bedeutet ſowol, was eine bekannte gegebene Größe hat, als auch, was einen beſtimmten unveränderlichen Werth (oder ſolche Lage hat) hat, aber erſt zu finden iſt.

4. Die Alten haben den Unterſchied zwiſchen Theorem, Problem und Porisma ſehr kurz gefaßt. Ein Theorem nannten ſie, wie Pappus bemerkt, einen aufgeſtellten Satz, der bewieſen werden ſollte; ein Problem etwas aufgegebenes, das durch eine Conſtruction gefunden werden ſollte (εἰς κατασκευὴν του προτεινομενου); ein Porisma einen Satz, worin etwas gefunden werden ſoll (το προτεινομενον εἰς πορισμον αὐτου). Die jüngern Geometer, welche Pappus tadelt, nannten ein Porisma einen Satz, dem zu einem topiſchen oder localen Satze (auf einen geometriſchen Ort ſich beziehenden) die Hypotheſis fehlt, το λειπον ὑποθεσει τοπικου θεωρηματος, d. i. ſie ſahen es als ein umgekehrtes Localtheorem an. Die geometriſchen Örter ſind, wie Pappus hierbey bemerkt, Arten (εἰδος) der Poriſ-

men als einer Gattung ($\gamma\varepsilon\nu o\varsigma$). Sie ſind von den Porismen abgeſondert worden, weil dieſe Art viel zahlreicher als die übrigen iſt.

Die Erläuterungen, welcher die anfangs gegebene Erklärung ſehr bedarf, nehme ich von Simſon ſelbſt, aus der Einleitung zu ſeiner Abhandlung.

5. Eine gerade Linie A wird der Lage nach gegeben, und ein Kreis C der Lage und Größe nach, ſo wird dadurch ein Punct P beſtimmt, welcher jede dadurch zwiſchen die gerade A und den Kreis gelegte gerade X ſo theilt, daß das Rechteck von den Segmenten zwiſchen dem Puncte P und ihren Durchſchnittspuncten mit A und dem Kreiſe einen unveränderlichen Inhalt hat.

Der Punct P liegt auf dem Umfange des Kreiſes da, wo derſelbe von der ſenkrechten aus dem Mittelpuncte auf die gerade A geſchnitten wird. Die Segmente der geraden X ſind die Dinge, welche zu dem geſuchten Puncte dieſelbe Relation haben. Die gemeinſchaftliche Beſchaffenheit iſt die Unveränderlichkeit der Rechtecke von den Segmenten. Etwas beſtimmtes iſt hier mit einem gewiſſen veränderlichen (der Lage der X und der Größe ihrer Segmente) nach einem gegebenen Geſetze verbunden.

6. Ein Punct wird gegeben nebſt einem Kreiſe der Lage und Größe nach; es iſt ein beſtimmter Punct vorhanden, ſo daß die geraden, welche von einem Puncte des Kreisumfanges nach jenem gegebenen und dem zweyten noch zu findenden Puncte gezogen werden, ein unveränderliches Verhältniß haben.

Dieſes iſt der Satz 51. in dem Artikel Kreis. Es iſt (Fig. 22. Tab. XVI.) AMB der gegebene Kreis, deſſen Mittelpunct C und einer der Puncte D, E der gegebene, der andere der geſuchte, welchen man durch die Proportion $CD : CA = CA : CE$ findet. Die veränderlichen Dinge ſind hier die geraden DM, EM, die gemeinſchaftliche Beſchaffenheit iſt das unveränderliche Verhältniß $DM : EM$.

7. Wenn man in dem Dreyecke DME, deſſen Winkelpunct M auf einem gegebenen Kreisumfange liegen ſoll, die Seite DE nebſt dem Verhältniſſe der beiden andern Seiten als gegeben betrachtet, ſo iſt die Aufgabe überhaupt eine beſtimmte, welche nur durch einen einzigen Punct M des Kreisumfanges aufgelöſet wird. Nur in dem Falle, wenn CD : CA = CA : CE, und das Verhältniß DM : EM dem DA : EA oder CA : CE gleich iſt, wird die Aufgabe eine unbeſtimmte, und geht in ein Porisma über.

Auf gleiche Art iſt es für das erſte Beyſpiel eine beſtimmte Aufgabe: Gegeben eine gerade Linie und ein Kreis, einen Punct zu finden, der eine dadurch zwiſchen beide gelegte gerade ſo theile, daß das Rechteck der beiden Segmente einen gegebenen Inhalt habe.

8. Wenn in (5.) der Punct P und das Rechteck der Segmente gegeben werden, nebſt einer der beiden Linien, ſo iſt die andere der geometriſche Ort, durch welchen die Gleichheit der Rechtecke von den Segmenten erhalten wird.

So auch, wenn in (6.) beide Puncte E, D, und das Verhältniß DM:EM gegeben werden, iſt der geometriſche Ort für die Winkelpuncte M ein Kreis, der nach (55. a. a. O.) beſtimmt wird.

9. Aus dieſen Beyſpielen mag man auch abnehmen, was die in (4.) angeführte Erklärung der neuern griechiſchen Geometer hat ſagen ſollen. In dem Localtheorem zu dem erſten Beyſpiele wird das Rechteck der beiden Segmente als gegeben angenommen, in dem Porisma blos als conſtant. In dem Localtheorem zu dem zweyten Beyſpiele wird das Verhältniß der beiden Seiten des Dreyecks DME gegeben, in dem Porisma nur als conſtant betrachtet.

Simſon führt zur Erläuterung noch einige Sätze an, welche eine Vergleichung der Segmente zwiſchen unveränderlichen und veränderlichen Puncten auf einer geraden Linie enthalten. Dieſe werden die Sache noch gut aufklären.

10. Auf einer geraden Linie

A C E D B

ſind zwey Puncte A, B gegeben; auf derſelben werden noch ein Paar Puncte C, D willkürlich genommen, ſo doch, daß das Verhältniß $AC : BD$ ein gegebenes, $m : n$ ſey: es giebt einen unveränderlichen Punct E, für welchen das Verhältniß $CE : ED = m : n$ iſt.

Der Punct E iſt leicht gefunden. Denn da $AC : BD = CE : ED$ iſt, ſo iſt $AC + CE : BD + ED = AC : BD$, das iſt $AE : EB = m : n$, folglich iſt E der Punct, welcher die gegebene AB in einem gegebenen Verhältniſſe theilt.

Die beiden Verhältniſſe $AC : BD$ und $CE : ED$ müſſen ſich gleich ſeyn; ſonſt werden C und D beſtimmte Puncte. Denn es bleibe $AC : BD = m : n$, aber es ſey $CE : ED = p : q$. Man ſetze $AE = a$; $EB = b$; $AC = x$, ſo iſt $BD = \frac{nx}{m}$, und es iſt

$a - x : b - \frac{nx}{m} = p : q$. Dieſe Proportion giebt eine beſtimmte Gleichung für x. Iſt aber $p : q = m : n$, ſo wird $na - nx = mb - nx$, ſo daß für x jeder Werth genommen werden kann, und $na = mb$ bleibt, oder $a : b = m : n$ iſt.

11. Auf einer gegebenen geraden Linie

A D B C

AB werde über B hinaus irgend ein Punct C genommen; es giebt einen unveränderlichen Punct D, ſo daß das Rechteck $AC \times CB$ mit einem gewiſſen beſtimmten Flächenraume ſo groß iſt als das Quadrat des Abſtandes, CD von dem Puncte D.

Man ſetze $AB = a$; $BD = b$, $BC = x$; den Flächenraum $= S$, ſo iſt $(a + x)\,x + S = (b + x)^2$, das iſt $ax + S = b^2 + 2bx$. Damit x jeden Werth haben könne, muß ſeyn $a = 2b$, d. i. $b = \frac{1}{2} a$, und $S = b^2 = \frac{1}{4} aa$.

Der Satz iſt der umgekehrte von Euclidis Elem. II. 6.

12. Auf einer geraden Linie

A D B E C

nd drey Puncte A, B, C gegeben. Wenn zwiſchen
und B ein Punct D willkürlich genommen wird, ſo
ebt es auf AC einen unveränderlichen Punct E, für
elchen das Rechteck von ED und einer beſtimmten,
er noch nicht bekannten Länge dem Rechteck $AD \times DB$
bſt dem Quadrate von DC gleich iſt.

Es ſey $AB = a$; $AC = b$; $AE = c$; die gege-
ne Länge $= f$; $AD = x$, ſo iſt $(c - x) f = (a - x) x$
$\cdot (b - x)^2$. Daraus $cf - fx = ax + bb - 2bx$.
amit x jeden Werth erhalten könne, muß $f = 2b - a$
yn. Dann iſt $cf = bb$, folglich $c = \frac{bb}{2b - a}$.

13. Auf einer geraden Linie

E D A C B

erden drey Puncte A, B, C gegeben; es iſt auf der
rlängerten AB über A hinaus ein unveränderlicher Punct
in einer ſolchen Lage, daß, wie man auch einen Punct
nach derſelben Gegend von A aus nehmen mag, das
echteck $BC \times CE = AD \times AE + BE \times f$ iſt,
f eine beſtimmte, aber noch unbekannte Länge iſt.

Es ſey $AB = a$; $BC = b$; $AD = c$; $AE = x$,
iſt $b(a - b + x) = cx + (a + x) f$, das iſt
$- bb + bx = cx + fx + af$. Hier muß ſeyn
$- bb = af$, und $c = b - f$, das iſt $c = \frac{bb}{a}$.

14. Aus den letztern drey Aufgaben oder Sätzen
ht man, daß dieſe Art von Porismen eben ſolche Be-
mmungen enthalten, als die Methode der Neuern durch
beſtimmte Coefficienten, die durch die Gleichungen für
e Coefficienten der Potenzen einer veränderlichen Größe
ſtimmt werden.

Simſon behandelt dieſe Aufgaben anders als hier
ſchehen iſt. Er führt neben der veränderlichen Größe

noch eine ein, welche eben die Relation gegen die unveränderlichen hat, als jene, und ſchafft durch Abziehen der beiden ſo erhaltenen Gleichungen von einander beide Größen weg. Das hier gebrauchte Verfahren iſt viel einleuchtender.

15. Aus dem Werke ſelbſt läßt ſich in der Kürze kein Auszug geben. Es kommen darin merkwürdige Sätze über die Lage der Durchſchnittspuncte gerader Linien vor, die durch gegebene Puncte gehen, als: wenn vier gerade Linien vorhanden ſind, von welchen drey Durchſchnittspuncte auf einer dieſer Linien gegeben werden, und von den übrigen drey Durchſchnittspuncten zwey jeder auf einer gegebenen geraden ihren Ort haben, ſo hat auch der dritte ſeinen Ort auf einer gegebenen geraden. Der Satz läßt ſich, mit gehöriger Beſtimmung der Bedingungen, auch auf irgend eine Anzahl von Linien anwenden. Dieſer Satz gehört zu den Localtheoremen.

16. Auch iſt folgender Satz über die Durchſchnitte mehrerer Linien merkwürdig. Bey Simſon, Prop. 34.

Auf einer geraden Linie MN (Fig. 151.) ſind drey Puncte A, B, C gegeben, und durch A ſind die beiden AD, AE gezogen; auch iſt noch FG eine der Lage nach gegebene gerade. Von den Puncten B, C werden nach irgend einem Puncte P der FG die BP, CP gezogen, welche die gegebenen AD, AE in Q, R ſchneiden: die gerade, welche dieſe Puncte verbindet, geht durch einen unveränderlichen Punct, das iſt, wie man auch P auf FG nehmen mag, die geraden durch die Durchſchnittspuncte, dergleichen Q, R ſind, ſchneiden ſich alle in einem und demſelben Puncte.

Die gegebenen Dinge ſind hier die geraden MN, AD, AE, FG, und die Puncte A, B, C auf MN; die veränderlichen ſind die Linien BP, CP, QR, das unveränderliche gemeinſchaftliche iſt der Durchſchnittspunct aller QR. Dieſe muß nun noch gefunden werden.

17. Über den Kreis und die daran gezogenen geraden kommen in Simſons Werke auch künſtliche Sätze vor. Ein ſolcher iſt folgender, bey Simſon Prop. 51.

Über dem Durchmeſſer AB (Fig. 152.) iſt ein
Kreis beſchrieben; von irgend einem Puncte des Umfan=
ges D werde auf AB die ſenkrechte DE gezogen, wel=
che dem Kreiſe in E begegne; dann ziehe man irgend
eine EF, welche den Durchmeſſer in H, den Kreis in F
treffe; die DF verlängert ſchneide den verlängerten Durch=
meſſer AB in G: es iſt AG : GB = AH : BH.

Iſt nun der Punct G gegeben, ſo iſt H ein un=
veränderlicher Punct, wie auch die Puncte D, F liegen
mögen. Die Linie FE muß aber nach dem Puncte E
der auf AB ſenkrechten DE zugehen.

18. L'Huilier führt in ſeiner Polygonométrie,
S. 98. gelegentlich folgendes von ihm gefundene Poriſma
an. Eine geradlinichte Figur ſey der Größe und Form
nach gegeben, nebſt einer Anzahl gerader Linien, ſo vie=
le als jene Seiten hat, aber nicht alle mit den Sei=
ten gleich verhaltend: es giebt eine der Lage nach und
eine der Größe nach beſtimmte gerade, und einen beſtimm=
ten Flächenraum, ſo daß, wenn von irgend einem Puncte
Perpendikel auf die Seiten der Figur gefällt werden, der
Unterſchied der Summe (im allgemeinen Verſtande) der
Rechtecke von dieſen Perpendikeln mit den gegebenen
geraden und des noch zu findenden Flächenraums gleich
iſt dem Rechteck des Perpendikels auf die der Lage nach
zu beſtimmende gerade mit der zu beſtimmenden Länge
einer geraden Linie.

19. Poriſma nennt Euklides in ſeinen Elemen=
ten, was wir Corollarium, Conſectarium, Zuſatz nen=
nen, einen Satz, der aus einem bewieſenen Satze oder
der Auflöſung einer Aufgabe unmittelbar folgt. Das
griechiſche Wort πορος bedeutet etwas, das einen Über=
gang oder Durchgang gewährt, daher Poren in den
organiſirten Körpern ihren Namen haben. Daraus er=
giebt ſich der Grund der Benennung jener leichten Fol=
gerungsſätze. Wie aber Euklides die leichteſte Art von
Sätzen, und eine für damahlige Zeit ſehr ſchwere und
künſtliche mit demſelben Kunſtworte habe andeuten kön=
nen, iſt nicht ſo leicht erklärbar. Der Grund muß ver=

ſchieden ſeyn. Mir ſcheint er dadurch haben andeuten wollen, daß die Porismen einen Übergang von gegebenen Dingen zu einem beſtimmten, wenn gleich noch unbekannten, durch veränderliche Dinge angeben. Sie ſind daher Theoreme und Probleme zugleich. Es wird darin eine gewiſſe Relation der verbundenen Größen aufgeſtellt, und zugleich muß das beſtimmte, aber unbekannte gefunden werden. Darauf mag ſich beziehen, was Pappus ſagt, daß die Porismen weder als Theoreme noch als Probleme zu betrachten ſeyn, ſondern eine gewiſſe mittlere Art ausmachen, ſo daß man ſie ſowol unter dieſe als jene rechnen möge.

20. In dem 3ten Bande der Edinburger Transactionen hat noch vor kurzer Zeit Profeſſor Playfair eine Abhandlung über die Porismen geliefert, worin er ihnen eine, wie man es nennen mag, philoſophiſche Anſicht anzugewinnen ſucht. Hutton hat in ſeinem mathematiſch-phyſikaliſchen Wörterbuche einen ſehr ausführlichen Auszug auf 13 großen Spalten daraus mitgetheilt.

21. Der Verfaſſer bemerkt, daß eine beſtimmte geometriſche Aufgabe unbeſtimmt wird, wenn die Linien, deren Durchſchnitt das geſuchte angeben ſoll, bey einer beſondern Relation der gegebenen Größen, ganz in eins fallen. Überhaupt ereigne ſich dieſes, wenn eine der Bedingungen der Aufgabe eine andere einſchließt, ſo daß nicht genugſam unabhängige Bedingungen übrig bleiben, um die Auflöſungen der Aufgabe auf eine einzige oder eine beſtimmte Anzahl einzuſchränken. Nun habe man bemerkt, daß dieſe Fälle ſehr merkwürdige Sätze darbieten, die von einer mittlern Natur zwiſchen Lehrſätzen und Aufgaben ſind, und ſich auf eine eigenthümliche Art nett und kurz aufſtellen laſſen. Dieſen Sätzen, auf eine ſochle Art aufgeſtellt, hätten die alten Geometer den Namen Porismen gegeben.

22. Ein Porisma iſt nun, nach dieſer Anſicht, ein Satz, worin behauptet wird, daß es möglich ſey ſolche Bedingungen zu finden, wodurch eine gewiſſe Auf-

abe unbeſtimmt wird, das iſt, unendlich viele Auflöſungen
ulläßt.

23. Als Beyſpiel führt der Verf. die Aufgabe an,
ı einer Ebene, worin mehrere Puncte gegeben ſind, durch
inen gegebenen Punct eine gerade ſo zu legen, daß die
Summe der von jenen Puncten darauf gezogenen Per-
endikel auf der einen Seite ſo groß ſey als auf der
ndern. Der zu ſuchende Punct für die gerade iſt, was
ıan in der Mechanik den Schwerpunct nennt. Die
lufgabe wird eine unbeſtimmte, wenn der gegebene Punct
ı den Schwerpunct ſelbſt fällt.

Das oben (6, 7.) gegebene Beyſpiel führt der Ver-
aſſer auch zur Erläuterung ſeiner Erklärung an. Ein
ıerkwürdiges iſt folgendes.

24. Zur Beſtimmung der Bahn eines Kometen
at man die Aufgabe angewandt, vier der Lage nach
egebene gerade Linien durch eine gerade ſo zu ſchneiden,
aß die Segmente auf dieſer zwiſchen jenen ein gegebe-
es Verhältniß haben. Newton hat in den Princ. L. I.
Lemma 27. Cor. auch Arithm. univ. Prop. 56. ſie
ufgelöſet. Dieſe Aufgabe wird in einem gewiſſen Falle
nbeſtimmt, wie Boscovich 1749 in einer Abhandlung
ezeigt hat, welche man auch in ſeinen Werken und in
Caſtillions Ausgabe von Newtons Arithm. univ. Addit.
). 124. findet. Dieſer Fall hat wirklich einen Aſtrono-
nen bey der Berechnung des Kometen von 1739 in
roße Verlegenheit geſetzt.

25. Der Geſichtspunct, aus welchen Playfair die
Poriſmen betrachtet hat, iſt wirklich derſelbe, aus wel-
hem ich oben bey den Aufgaben (10—14) ſie ſchon an-
eſehen habe, ehe ich noch ſeine Gedanken bey Hutton
and. Er fragt noch, warum Sätze, welche in der Geo-
netrie der Alten einen ſo anſehnlichen Rang hatten, von
en Neuern faſt ganz unbeachtet geblieben ſind. Allein
in der That ſind alle Fälle, worin die Coefficienten jeder
für ſich = 0 geſetzt werden, um daraus Gleichungen
zu bilden, von derſelben Gattung, wie die Poriſmen
der Alten. Dazu kommt, daß es einzelne geometriſche

Sätze ſind, für ſich zwar recht fein und ſinnreich, allein dem Geiſte der neuern Mathematik, der immer mehr nach Allgemeinheit ſtrebt, nicht genug entſprechend. Die neue Mathematik iſt ſo überhäuft reich, daß ſie den Verluſt einiger niedlichen Kunſtſachen aus der Verlaſſenſchaft der Alten nicht bemerkt.

26. Was Montucla in ſeiner Geſchichte der Mathem. N. Ausg. Th. I S. 277 ff. über die Porismen beybringt, iſt belehrend und zweckmäßig.

Ein Aufſatz von Käſtner über die Porismen iſt in deſſen geometriſchen Abhandlungen, I. Sammlung, S. 53—74 befindlich.

Positio falsi, ſ. Regel Falſi.

Poſitiv, ſ. entgegengeſetzte Größen.

Poſtulat, Forderung, Heiſcheſatz, iſt ein Satz, worin verlangt wird, daß etwas ausgeführt werden ſoll, ohne daß gezeigt wird, wie es geſchehen mag, weil dieſes ſich aus dem Begriffe der Sache unmittelbar ergiebt. In der Geometrie ſind drey Poſtulate: 1. Von jedem Puncte nach jedem Puncte eine gerade Linie zu ziehen. 2. Eine begränzte gerade Linie ſtetig gerade fort zu verlängern. 3. Aus jedem Puncte in jedem Abſtande einen Kreis zu beſchreiben. Das heißt in der That nichts anders, als man muß zur Geometrie die Begriffe einer geraden Linie und eines Kreiſes mitbringen. Man kann es niemanden lehren, wie er es anzufangen habe, ſich eine gerade Linie und einen Kreis vorzuſtellen. Denn von einer ſinnlichen Zeichnung iſt hier gar nicht die Rede.

In dem griechiſchen Texte der Euklidiſchen Elemente ſind die drey vorher angeführten Sätze überſchrieben: *αιτηματα;* zwölf andere Sätze, *κοιναι ἐννοιαι*, gemeinſchaftliche Vorſtellungen, was wir Axiome, Grundſätze nennen. Sie gehören theils der Größenlehre überhaupt, theils der Geometrie insbeſondere an. Sie unterſcheiden ſich von den Poſtulaten wie ein Theorem von

inem Problem. Die ſpätern griechiſchen Mathematiker oaren über den Unterſchied zwiſchen Axiom und Poſtulat nicht einig. Geminus und mehrere unterſchieden eides, ſo wie jetzt eben angeführt iſt. Andere beſtimmen die Benennung, Axiome, für diejenigen Sätze, welhe in der allgemeinen Größenlehre zum Grunde liegen; Doſtulate für die geometriſchen insbeſondere. Noch anere nannten jeden unmittelbar evidenten Satz in jeder ;orm ein Poſtulat, wieder andere ein Axiom. Jene onnten ſich auf Archimedes berufen, der im Anfange ines Buchs von dem Gleichgewichte ſchwerer Ebenen igt: wir fordern (ἀιτουμεϑα), daß gleiche Gewichte, 1 gleichen Entfernungen aufgehängt, ſich das Gleichgeicht halten, u. ſ. w. Doch dieſe Streitigkeit ſchickte ch zu dem Zeitraume, als die Entdeckungen in der Geoietrie aufgehört hatten. Proklus, der im Anfange des ritten Buches ſeines Commentars alles dieſes weitläug erzählt, ſcheint ſelbſt nicht recht mit ſich eins geworen zu ſeyn. Zuerſt billigt er den Unterſchied nach Art ines Theorems und Problems, aber bey der Aufzählung er Poſtulate fügt er den drey anfangs genannten noch ieſes: alle rechte Winkel ſind einander gleich, hinzu; ann zwar noch den Satz wegen der Bedingung, unter elcher ſich zwey gerade nothwendig ſchneiden, ſtreicht hn aber wieder aus, weil er bewieſen werden müſſe.

Potenz (potentia, potestas, dignitas, Frz. uissance, Engl. power) iſt ein Product aus zwey der mehrern gleichen Factoren, z. B. 25; 125; 625, . ſ. f. Die Anzahl der Factoren beſtimmt den Grad er Potenz, und heißt ihr Exponens.

1. Man benennt die Potenzen überhaupt nach ihren :xponenten, und rechnet daher die Zahl, aus deren wieerholter Multiplication die Potenzen entſtehen, mit zu en Potenzen, unter dem Namen, erſte Potenz. Die zweyte heißt häufig das Quadrat, die dritte der Cubus, die vierte das Biquadrat. Man bezeichnet ine Potenz durch die Größe, welche zu den Factoren

genommen wird, die Grundzahl, wie ſie heißen ſollte, nicht Wurzel, mit dem Exponenten an der Spitze, a^1, a^2, a^3, a^4, . . . a^m. Die Bezeichnung a^1 wird ſtatt a nur gebraucht, wenn eine Größe, die überhaupt eine Potenz von a iſt, in einem beſondern Falle dieſe a ſelbſt iſt. Das Quadrat wird oft durch aa bezeichnet, bisweilen der Cubus durch aaa, welches aber bey höhern Potenzen nicht üblich iſt, man müßte denn dadurch die Formation der Größen durch Multiplication und Combination deutlicher machen wollen.

2. Wenn eine Zahl in zwey oder mehrere Factoren zerfällt wird, ſo heißt ein ſolcher Factor die Wurzel jener Zahl Ihr Grad wird gleichfalls durch die Anzahl der Factoren, welche man der Grundzahl giebt, beſtimmt. Dieſe iſt der Exponent der Wurzel. Für die niedrigern Wurzeln ſind beſondere Benennungen gewöhnlich, als Quadratwurzel, Cubikwurzel, Biquadratwurzel; die höhern kann man nicht anders als durch den Grad oder den Exponenten angeben: fünfte, ſechſte, mte Wurzel, ſo wie man auch ſagen mag, zweyte, dritte, vierte Wurzel, anſtatt jener Benennungen. Eine Grundzahl iſt in Abſicht auf ihre Wurzeln die erſte derſelben, eben ſo als wie ſie in Abſicht auf ihre Potenzen die erſte derſelben iſt. Man bezeichnet die Wurzeln auf folgende Art: $\sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \sqrt[4]{a} .. \sqrt[m]{a}$; oder jetzt gewöhnlicher durch $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$ . . . $a^{\frac{1}{m}}$.

3. Eine Potenz mag auch als Grundzahl genommen in irgend eine Anzahl gleicher Factoren zerfällt werden, z. B. ein Cubus in zwey gleiche Factoren, das Quadrat in drey. Dieſes wird folgendergeſtalt bezeichnet, $\sqrt[n]{a^m}$ oder $a^{\frac{m}{n}}$, d. i. die nte Wurzel aus der mten Potenz, z. B. die Quadratwurzel aus einem Cubus durch $\sqrt{a^3}$ oder durch $a^{\frac{3}{2}}$; die Cubikwurzel aus einem Quadrat durch $\sqrt[3]{a^2}$ oder $a^{\frac{2}{3}}$.

4. Eine Wurzel mag als Grundzahl auf irgend eine Potenz erhoben werden, z. B. die Quadratwurzel auf ne dritte Potenz, die Cubikwurzel auf die zweyte. Dieſes wird auf dieſelbe Art wie in (3.) bezeichnet. Es ſt $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ oder $a^{\frac{m}{n}}$ die mte Potenz der nten Wurzel aus ı. Es iſt einerley, ob die Erhebung auf eine Potenz uerſt, und dann die Zerlegung, oder dieſe zuerſt und ɔann die Erhebung geſchieht. Dieſes wird unten (20.) ıoch näher gezeigt.

5. Die Alten, welche die arithmetiſchen Formen mmer mit den geometriſchen verglichen, nannten daher ɔie zweyte Potenz eine viereckte Zahl oder ein Quaɔrat, die dritte einen Cubus; die vierte nennt Dioɔhantus ein Quadrato-Quadrat, die fünfte einen Quadrato-Cubus, die ſechſte einen Cubo-Cubus. Das Wort Potenz, δυναμις, gebraucht er ganz allein ɔon dem Quadrat. So heißen auch bey Euklides Linien, ɔeren Quadrate ein gemeinſchaftliches Maß haben, ſchlechthin in der Potenz vergleichbare, δυναμει συμμετραι. Jene Benennungen ſind nach den Summen der Exponenten gebildet. Vieta und Oughtred folgen darin dem Diophantus.

Die Bezeichnungen, welche Diophantus für die Einheit, die Grundzahl und die Potenzen gebraucht, ſind folgende, welche durch die darunter geſetzten, bey uns üblichen, erklärt werden.

μ° ;	ς ;	δ^{υ} ;	κ^{υ} ;	$\delta\delta^{\upsilon}$;	$\delta\kappa^{\upsilon}$;	$\kappa\kappa^{\upsilon}$,
1 ;	a ;	a^2 ;	a^3 ;	a^4 ;	a^5 ;	a^6 ,

Das erſte Symbol iſt von dem Worte μονας, die Einheit, hergenommen; das zweyte iſt das Zahlzeichen der Zahl 6, welches im Griechiſchen nicht aus den Alphabet genommen wird; die übrigen ſind aus dem Anfangsſylben der Wörter δυναμις und κυβος gebildet.

6. Die Araber gebrauchten Benennungen, die mit folgenden gleichbedeutend ſind: Quadrat, Cubus, Quadrato-Quadrat oder Biquadrat, Surſolidum, Quadrat

des Cubus, zweytes Surſolidum, Quadrato-Quadrato-Quadrat, Cubo-Cubus, Quadrat des Surſolidum, drittes Surſolidum. Dieſe Benennungen ſind meiſtens zufolge der Producte der Exponenten aus den niedrigern Potenzen gebildet.

7. Der Frater Lucas de Burgo Santo Sepolcro oder Paciolus gebrauchte für Grundzahl, Quadrat, Cubus, u. ſ. w. die Benennungen; Cosa, Censo, Cubo, Censo de Censo, primo Relato, Censo de cubo, und die Bezeichnungen: co; ce; cu; ce.ce; p°.r°; ce.cu, u. ſ. f.

8. Chriſtoff Rudolph in ſeiner Coſs, durch Michael Stifel gebeſſert und ſehr vermehrt, Amſterd. 1615. hat folgende Benennungen der Coſſiſchen progres, wie er eine geometriſche Reihe nennt, Dragma, Radix, Zenſus, Cubus, Zenſdezens, Surſolidum, Zenſicubus, Bſurſolidum, Zenſzenſdezenſs, Cubus de cubo.

Von dem erſten Gliede, Dragma oder Numerus ſagt er, es werde hier genommen gleich als Eins iſt keine Zahl, ſondern giebt andern Zahlen ihr Weſen. Seine Benennungen ſind wie die arabiſchen gebildet. Er bemerkt noch, daß man die Coſſiſche Progres auch alſo verzeichnen möge:

$$\overset{0}{1} \;.\; \overset{1}{\mathfrak{A}} \;.\; \overset{2}{\mathfrak{AA}} \;.\; \overset{3}{\mathfrak{AAA}} \;.\; \overset{4}{\mathfrak{AAAA}}.$$

Seine coſſiſchen Zeichen kommen noch in Rechenbüchern des vorigen Jahrhunderts vor.

9. Robert Recorde, ein Engländer, der in den J. 1552 und 1557 eine Arithmetik und Algebra unter dem Titel: The whetstone of Witte, herausgab, bedient ſich derſelben Bezeichnungsart für die Potenzen wie Rudolph und Stifel, auch ihres Verfahrens mit Aggregaten von Potenzen zu rechnen.

10. Bombelli, deſſen Algebra 1579 gedruckt iſt, bezeichnete die Coſa, oder die unbekannte Größe durch das Zeichen $\smile$, und die Potenzen durch die darüber geſetzten Exponenten, als $\overset{1}{\smile}$, $\overset{2}{\smile}$, $\overset{3}{\smile}$, u. ſ. f.

11. Stevin, der ſeine Arithmetik 1585, und bald arauf ſeine Algebra herausgab, gebrauchte einen kleinen reis, wohinein er den Exponenten der Potenz ſetzte. ;r erweiterte ſeine Bezeichnung ſogar auf gebrochne Ex- onenten. — Vieta gebrauchte wieder blos Wortzei- hen nach dem Symbol für die Grundzahl. — Har- iot bezeichnete die Potenzen durch die Wiederholung er Grundzahl, wie a, aa, aaa, welches, wie vorher emerkt iſt, Rudolph viel früher gethan hatte. — Des- artes ſetzte bey höhern Potenzen den Exponenten an ie Spitze des Symbols der Grundzahl, wie es ſeitdem üblich iſt. Girard hatte ſchon im J. 1629 die Ex- ponenten zur Bezeichnung der Wurzeln gebraucht, als $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$. In Oughtreds Clavis mathematica, edit. quarta, 1667, ſind noch unbequeme Bezeichnungen, als Aqqc und Aqcc für A^7; A^8.

Man ſieht, daß die Bezeichnungen in dieſem gar nicht ſchweren Falle viele Mühe und Verſuche gekoſtet haben; wie viel weniger darf man ſich in philoſophiſchen Dingen von dem Erfolge einer Bezeichnungskunſt verſprechen!

12. Gegenwärtig ſind von den alten Benennungen nur üblich: Quadrat, Cubus (Würfel), Biquadrat; Quadratwurzel, Cubikwurzel, Biquadratwurzel.

13. Tafeln der Quadrate und Würfel der ganzen Zahlen findet man faſt in allen Sammlungen mathematiſcher Tafeln. Meiſtens gehen die Wurzeln nur bis 1000. In der Sammlung von Tafeln, welche der von Wolfs mathematiſchen Lexikon durch die Verlagshandlung veranſtalteten neuen Auflage beygefügt iſt, gehen die Wurzeln bis zu 10000. Sie ſcheinen ziemlich richtig zu ſeyn. In Buchners Tabula radicum quadratorum et cuborum iſt die höchſte Wurzel 12000. Nürnberg, 1701. Dieſe Tafeln ſind ſehr fehlerhaft abgedruckt. Johann Ludolfs Tetragonometria tabularia, Ienae 1712 enthält die Quadrate aller Wurzeln bis zu der 100000.

Quadrat- und Cubikwurzeln aus den erſten 1000 Zahlen bis auf Zehnmilliontheile ſind in Schulzens und Vega's Tafeln enthalten.

14. Die Tafeln der Potenzen dienen auch zur Ausziehung der Wurzeln, weil man dadurch die erſten drey oder vier Ziffern der Wurzel ſogleich erhält. Man kann ſie durch die Neunerprobe leicht prüfen, da man nicht zwey entgegengeſetzte Fehler vermuthen darf. Die Reſte bey der Diviſion der Ziffernſumme durch 9 ſind

für die Wurzel	0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8
für das Quadrat	0,	1.	4.	0.	7.	7.	0.	4.	1
für den Würfel	0,	1.	8.	0.	1.	8.	0.	1.	8

Die Quadrate ganzer Zahlen geben bey der Diviſion durch 9 keine andere Reſte als 0, 1, 4, 7, die Würfel keine andere als 0, 1, 8.

II. Rechnung mit eintheiligen Potenzen.

15. Die Multiplication der Potenzen von einerley Wurzel oder Grundzahl geſchieht durch die Addition der Exponenten; die Diviſion durch die Subtraction der Exponenten der Diviſoren von denen der Dividenden; die Erhebung auf eine Potenz durch Multiplication des Exponenten, die Ausziehung der Wurzel durch Diviſion deſſelben. Die Exponenten der Grundzahl verhalten ſich bey dieſen Operationen wie Logarithmen. Der Gebrauch der Logarithmen wird durch die hier vorzutragenden Rechnungen einleuchtender werden.

16. Es ſeyn m und n ganze Zahlen, ſo iſt

I. $a^m . a^n = a^{m+n}$. II. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, wenn $m > n$ iſt.

III. $\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}}$, wenn $m < n$. IV. $a^0 = 1$. Die Beweiſe dieſer Formeln ergeben ſich unmittelbar daher, daß ganze Exponenten die Anzahl der gleichen Factoren in einer Potenz ſind. Die Formel IV. entſteht bey der

Diviſion irgend einer Potenz durch eine ihr gleiche. Man gebraucht die Bezeichnung a^0, um dadurch die Einheit als Glied in einer geometriſchen Progreſſion anzugeben, oder anzuzeigen, daß Eins der particuläre Werth eines Quotienten, a^m dividirt durch a^n iſt.

Exempel. $a^3 \cdot a^4 = a^7$; $\frac{a^5}{a^3} = a^2$; $\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}$; $\frac{a^5}{a^5} = a^0 = 1$.

17. Den Quotienten $\frac{1}{a^n}$ bezeichnet man auch durch a^{-n}, weil bey dieſer Form die Diviſion durch eine Potenz als eine Multiplication anzuſehen iſt. Es iſt einerley, ob man $\frac{a^m}{a^n}$ oder $a^m \cdot a^{-n}$ ſchreibt. Den negativen Exponenten addiren, iſt eben ſo viel als den abſoluten ſubtrahiren. Exemp. $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$, und $\frac{a^5}{a^2} = a^5 \cdot a^{-2} = a^3$.

18. Es iſt unter der obigen Vorausſetzung, daß m und n ganze Zahlen bedeuten, I. $(a^m)^n = a^{mn}$. II. $(a^m \cdot b^n)^r = a^{mr} \cdot b^{nr}$.
Z. B. $(a^2)^5 = a^{10}$; $(a^2 \cdot b^3)^4 = a^8 \cdot b^{12}$.

19. Es iſt I. $\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$. II. $\sqrt[r]{(a^m \cdot b^n)} = a^{\frac{m}{r}} \cdot b^{\frac{n}{r}}$. III. $\sqrt[r]{(a^m \cdot b^n \cdot c^p)} = a^{\frac{m}{r}} \cdot b^{\frac{n}{r}} \cdot c^{\frac{p}{r}}$, u. ſ. f.

Nämlich ſo wie bey der Erhebung einer Potenz auf eine Potenz der Exponent jener durch den Exponenten der Potenz, worauf ſie erhoben werden ſoll, multiplicirt wird, ſo wird bey der Ausziehung einer Wurzel

aus einer Potenz der Exponent dieſer Potenz durch den der Wurzel dividirt. Daher ſind $\sqrt[n]{a^m}$ oder $\left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$ und $a^{\frac{m}{n}}$ ganz gleichbedeutende Bezeichnungen. Iſt die Wurzel aus einem Producte von Potenzen zu ziehen, ſo muß jeder Factor in ſo viele Factoren zerfällt werden, als es der Grad oder Exponent der Wurzel anzeigt.

Exempel. $\sqrt[5]{a^{10}} = a^{\frac{10}{5}} = a^2$; $\sqrt[3]{a^7} = a^{\frac{7}{3}}$; $\sqrt[2]{a^4 b^6} = a^2 . b^3$; $\sqrt[3]{a^6 b^4 c^2} = a^2 . b^{\frac{4}{3}} . c^{\frac{2}{3}}$.

20. Es iſt $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$. Denn man ſetze $a^{\frac{1}{n}} = w$, ſo iſt $a = w^n$; $a^m = w^{mn}$; $a^{\frac{m}{n}} = w^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

Z. B. $\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^{10} = a^{\frac{10}{5}} = a^2$. Oder $\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 = a^{\frac{2}{3}}$. Es iſt einerley, ob die Erhebung auf eine Potenz zuerſt, und dann die Ausziehung der Wurzel, oder ob dieſe zuerſt und jene hernach vorgenommen wird.

21. Es iſt I. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r = a^{\frac{mr}{n}}$. II. $\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{nr}}$. III. $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mr}{nr}}$.

Denn man ſetze $a^{\frac{m}{n}} = w$, ſo iſt $a^m = w^n$; $a^{mr} = w^{nr}$, und $a^{\frac{mr}{n}} = w^r$. II. Es ſey $\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}} = w$, ſo iſt $a^{\frac{m}{n}} = w^r$; $a^m = w^{nr}$, und $a^{\frac{m}{nr}} = w$. III. Iſt die Erhebung der Größe $a^{\frac{m}{n}}$ auf die rte Potenz, und die Ausziehung der rten Wurzel, welches ſich gegen einander hebt.

Exempel. $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^5 = a^{\frac{15}{4}}$; $\sqrt[5]{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{3}{20}}$; $a^{\frac{15}{20}} = a^{\frac{3}{4}}$.

22. Es iſt $\left(a^m\right)^{\frac{r}{n}} = a^{\frac{mr}{n}}$. II. $\sqrt[\frac{r}{n}]{a^m} = a^{\frac{mn}{r}}$.

Denn es ſey $\left(a^m\right)^{\frac{r}{n}} = w$, ſo iſt $\left(a^m\right)^r = w^n$; oder $a^{mr} = w^n$; $a^{\frac{mr}{n}} = w$. II. $\sqrt[\frac{r}{n}]{a^m} = w$; $a^m = w^{\frac{r}{n}}$; $a^{mn} = w^r$; $a^{\frac{mn}{r}} = w$.

23. Es iſt $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{r}} = a^{\frac{mr+np}{nr}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{r}}$. Denn es iſt $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mr}{nr}}$; $a^{\frac{p}{r}} = a^{\frac{np}{nr}}$. Nun iſt $a^{\frac{mr}{nr}} \times a^{\frac{np}{nr}} = \sqrt[nr]{(a^{mr} . a^{np})}$ nach (19.), das iſt $= \sqrt[nr]{a^{mr+np}} = a^{\frac{mr+np}{nr}}$ $= a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{r}}$.

24. Auch iſt $a^{\frac{m}{n}}$ dividirt durch $a^{\frac{p}{r}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{r}}$. Der Beweis wie in (23.) nur daß ſtatt Product ein Quotient geſetzt wird. Die Quotienten können auch als Producte behandelt werden, wenn ſtatt eines Diviſors d der Factor $\frac{1}{d}$ mit dem Dividendus multiplicirt wird. In den obigen Sätzen iſt es unbeſtimmt gelaſſen, ob die Grundzahlen der Potenzen größer oder kleiner als die Einheit ſeyn.

25. Die Sätze in (16.) gelten nun auch, wenn m und n gebrochne Zahlen, ſelbſt irrationale ſind. Dieſes

iſt beſonders zur gründlichen und deutlichen Einſicht des Verfahrens bey logarithmiſchen Rechnungen zu bemerken. Bey dieſen werden alle Zahlen als Potenzen der Baſis des logarithmiſchen Syſtems angeſehen, in dem Briggiſchen der Baſis 10. Die Exponenten ſind ihre Logarithmen. S. Logarithmen.

26. Wenn die bisher durch ein einfaches Zeichen a bezeichnete Grundzahl die Form eines Bruches, $\frac{a}{b}$, hat, ſo werden alle Rechnungs-Operationen ſowol mit dem Zähler als Nenner vorgenommen. So iſt $\left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^m}{b^m} \cdot \frac{a^n}{b^n} = \frac{a^{m+n}}{b^{m+n}}$, und $\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^{m-n}}{b^{m-n}}$. So auch die übrigen.

III. Differenzen und Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen.

27. Wenn die Wurzeln in einfacher arithmetiſcher Fortſchreitung genommen werden, ſo ſind die Potenzen Glieder einer arithmetiſchen Reihe einer höhern Ordnung; die Quadrate einer ſolchen Reihe von der zweyten Ordnung, die Würfel einer Reihe von der dritten, die Biquadrate einer Reihe von der vierten, u. ſ. f. Die Wurzeln ſeyn, a; a + d; a + 2d; a + 3d, etc. ſo iſt der beſtändige zweyte Unterſchied der Quadrate $= 1 . 2 d^2$; der beſtändige dritte Unterſchied der Würfel $= 1 . 2 . 3 d^3$; ...., der beſtändige nte Unterſchied der nten Potenzen $= 1 . 2 . 3 . 4 \ldots n . d^n$. S. arithmet. Reihen höherer Ordnungen, 23.

28. Für die niedrigern Potenzen kann dieſer Satz unmittelbar aus ihrer Form leicht erwieſen werden. S. Buchſtabenrechnung, 20. Dieſes giebt ein Mittel an die Hand die Tafeln der Quadrate und Würfel, auch höherer Potenzen, blos durch Addition der Unterſchiede

Z. B.

Wurzeln	10;	11;	12;	13;	14.
Würfel	1000;	1331;	1728;	2197;	2744.
. Unterſch.		331;	397;	469;	547.
I. Unterſch.			66;	72;	78.
II. Unterſch.				6;	6.

Das Geſetz für die letzten Differenzen der Potenzen der natürlichen Zahlen und die Berechnung der Potenzenreihen durch Addiren kehrt Faulhaber in einer deutſchen Schrift: Academia Algebrae betitelt, Augsburg, 1631. Er kam durch Induction darauf. Mit den Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen, ſelbſt mit den Summen dieſer Summen, hat dieſer myſtiſche Rechner ſich beſchäftigt.

29. Die Summe der Potenzen, deren Wurzeln in arithmetiſcher Progreſſion ſind, wird mittelſt der Anfangsglieder der Reihe ſelbſt und der Differenzreihen aus der Anzahl der Glieder gefunden, ſ. arithm Reihen höh. Ordn. 12 — 15. Eine andere Methode iſt in dem Artikel, Differenzenrechnung, 72, 73 gelehrt. Beide Methoden, beſonders die erſtere, ſind für höhere Potenzen zu beſchwerlich. Hier folgt eine leichtere, die uns zugleich noch zu wichtigen analytiſchen Formeln führen wird.

30. Die Binomial-Coefficienten in der $(n+1)$ten Potenz werden durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. bezeichnet, die Summe der $n$ten Potenzen der natürlichen Zahlen, 1, 2, 3 ... x durch Sx^n; der $(n-1)$ten Potenzen durch $S.x^{n-1}$; u. ſ. f.. Es iſt

$$(x+1)^{n+1} - (x+1) = \mathfrak{A}S.x^n + \mathfrak{B}S\,x^{n-1} + \mathfrak{C}S.x^{n-2} + \mathfrak{D}S.x^{n-3} \dots + \mathfrak{B}S.x^2 + \mathfrak{A}S.x.$$

Denn da

$$(x+1)^{n+1} = x^{n+1} + \mathfrak{A}x^n + \mathfrak{B}x^{n-1} + \mathfrak{C}x^{n-2} + \mathfrak{D}x^{n-3} \dots + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{A}x + 1$$

iſt, ſo iſt, wenn für x nach der Reihe alle ganze Zahlen von 1 bis zu der unbeſtimmten x geſetzt werden, die Summe aller $(n+1)$ten Potenzen von $(1+1)^{n+1}$

bis $(x+1)^{n+1}$ oder

$S.(x+1)^{n+1} - 1 = S.x^{n+1} + \mathfrak{A}\,S.x^n + \mathfrak{B}\,S.x^{n-1} + \mathfrak{C}\,S.x^{n-2} + \mathfrak{D}\,S.x^{n-3} \ldots + \mathfrak{B}\,S.x^2 + \mathfrak{A}\,S.x + x.$ Es iſt aber $S.(x+1)^{n+1} - S.x^{n+1} = (x+1)^{n+1}$, alſo $(x+1)^{n+1} = \mathfrak{A}\,S.x^n + \mathfrak{B}\,S.x^{n-1} \ldots + \mathfrak{A}\,Sx + x + 1$. Daraus folgt die Formel des Satzes unmittelbar.

31. Aus den Summen der niedrigern Potenzen wird die Summe der nächſt höhern, und ſo jede Summe ſucceſſiv gefunden.

32. Exempel. Für $n=2$ iſt $(x+1)^3 - (x+1) = 3\,S.x^2 + 3\,S.x$. Nun iſt $S.x = 1 + 2 \ldots + x = \frac{1}{2}x(x+1) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$; alſo $S.x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(x+1)(2x+1)$.

33. Exempel. Für $n=3$ iſt $(x+1)^4 - (x+1) = 4\,S.x^3 + 6\,S.x^2 + 4\,S.x$, daher $4\,S.x^3 = x^4 + 2x^3 + x^2$, und

$S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}(x+1)^2 x^2.$

34. Es iſt $x^{n+1} \pm x = \mathfrak{A}\,S.x^n - \mathfrak{B}\,S.x^{n-1} + \mathfrak{C}\,S.x^{n-2} - \mathfrak{D}\,Sx^{n-3} \ldots \mp \mathfrak{B}\,S.x^2 \pm \mathfrak{A}\,S.x$, wo das obere Vorzeichen für ein ungerades n, das untere für ein gerades n zu nehmen iſt.

Denn da $(x-1)^{n+1} = x^{n+1} - \mathfrak{A}\,x^n + \mathfrak{B}\,x^{n-1} - \mathfrak{C}\,x^{n-2} + \mathfrak{D}\,x^{n-3} \ldots \pm \mathfrak{B}\,x^2 \mp \mathfrak{A}\,x \pm 1$ iſt, ſo ſetze man für x alle ganze Zahlen von 1 bis zu einer unbeſtimmten x, und es iſt

$S.(x-1)^{n+1} = S.x^{n+1} - \mathfrak{A}\,S.x^n + \mathfrak{B}\,S.x^{n-1} - \mathfrak{C}\,S.x^{n-2} \ldots \pm \mathfrak{B}\,S.x^2 \mp \mathfrak{A}\,S.x \pm x$. Da $S.x^{n+1} - S.(x-1)^{n+1} = x^{n+1}$ iſt, ſo folgt daraus unmittelbar der angegebene Satz.

35. Für ein ungerades n iſt $(x+1)^{n+1} + x^{n+1} - 1 = 2\,\mathfrak{A}\,S.x^n + 2\,\mathfrak{C}\,S.x^{n-2} + 2\,\mathfrak{E}\,S.x^{n-4} \ldots + 2\,\mathfrak{C}\,S.x^3 + 2\,\mathfrak{A}\,S.x$.

Dieſe Formel entſteht, wenn die Formel in (30.) zu der in (34.) addirt wird, da die obern Vorzeichen für ein ungerades n gelten.

36. Für ein gerades n iſt $(x+1)^{n+1} + x^{n+1} - 2x - 1 = 2\mathfrak{A} S.x^n + 2\mathfrak{C} S.x^{n-2} + 2\mathfrak{E} S.x^{n-4} \ldots\ldots + 2\mathfrak{D} S.x^4 + 2\mathfrak{B} S.x^2$.

Dieſe Formel entſteht ebenfalls durch die Addition der beiden Formeln in (30.) und (34.), da für ein gerades n die untern Vorzeichen in (34.) zu nehmen ſind.

37. Exempel. Für $n = 1$ iſt $x^2 + (x+1)^2 - 1 = 2.2\, S.x$, alſo $S.x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$.

Für $n = 3$ iſt $x^4 + (x+1)^4 - 1 = 2.4\, S.x^3 + 2.4\, S.x$, alſo

$S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$.

38. Exempel. Für $n = 2$, iſt $(x+1)^3 + x^3 - 2x - 1 = 2.3\, S.x^2$, alſo

$S.x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$.

Für $n = 4$ iſt $(x+1)^5 + x^5 - 2x - 1 = 2.5\, S.x^4 + 2.10\, S.x^2$, alſo

$S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$.

39. Nach dieſen Formeln laſſen ſich die Summen der Potenzen leicht noch weiter berechnen. Es iſt

$S.x^1 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$

$S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{12}x^2$

$S.x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$

$S.x^7 = \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{2}x^7 + \frac{7}{12}x^6 - \frac{7}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^2$

$S.x^9 = \frac{1}{10}x^{10} + \frac{1}{2}x^9 + \frac{9}{12}x^8 - \frac{7}{10}x^6 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{20}x^2$

$S.x^{11} = \frac{1}{12}x^{12} + \frac{1}{2}x^{11} + \frac{11}{12}x^{10} - \frac{11}{8}x^8 + \frac{11}{6}x^6 - \frac{11}{8}x + \frac{5}{12}x^2$ u. ſ. w.

$S.x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$

$S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{6}x^3 - \frac{1}{30}x$

$S.x^6 = \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{6}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{42}x$

$S.x^8 = \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{2}x^8 + \frac{4}{6}x^7 - \frac{7}{15}x^5 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{30}x$

$S.x^{10} = \frac{1}{11}x^{11} + \frac{1}{2}x^{10} + \frac{5}{6}x^9 - 1.x^7 + 1.x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{66}x$

$S.x^{12} = \frac{1}{13}x^{13} + \frac{1}{2}x^{12} + \frac{6}{6}x^{11} - \frac{11}{6}x^9 + \frac{22}{7}x^7 - \frac{33}{10}x^5 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{691}{2730}x$ u. ſ. w.

40. Es iſt nun nöthig, das Geſetz dieſer Reihen zu entwickeln. Ihre Geſtalt oder die Fortſchreitung der Exponenten zeigt ſich deutlich. Nur muß der Grund derſelben entdeckt werden.

Wenn der erſte Theil der Gleichung in (35, 36.) entwickelt wird, ſo iſt für ein ungerades n die Gleichung,

$$2x^{n+1} + \mathfrak{A}x^n + \mathfrak{B}x^{n-1} + \mathfrak{C}x^{n-2} + \mathfrak{D}x^{n-3} + \mathfrak{E}x^{n-4} + \mathfrak{F}x^{n-5} \ldots + \mathfrak{B}x^2 + \mathfrak{A}x = 2\mathfrak{A}S.x^n + 2\mathfrak{C}S.x^{n-2} + 2\mathfrak{E}S.x^{n-4} + 2\mathfrak{G}S.x^{n-6} \ldots + 2\mathfrak{C}S.x^3 + 2\mathfrak{A}Sx,$$

und für ein gerades n,

$$2x^{n+1} + \mathfrak{A}x^n + \mathfrak{B}x^{n-1} \ldots + \mathfrak{B}x^2 + (\mathfrak{A} - 2)x = 2\mathfrak{A}S.x^n + 2\mathfrak{C}S.x^{n-2} + 2\mathfrak{E}S.x^{n-4} + 2\mathfrak{G}S.x^{n-6} \ldots + 2\mathfrak{D}S.x^4 + 2\mathfrak{B}S.x^2.$$

Der Theil linker Hand iſt identiſch mit dem Theile rechter Hand. Daher müſſen alle Potenzen von x ſich in dem zweyten Theile finden, das iſt, $S.x^n$ enthält die Potenzen x^{n+1} und x^n nebſt den folgenden, es ſey allen oder einem Theile derſelben; eben ſo $S.x^{n-2}$ die Potenzen x^{n-1} und x^{n-2}, u. w.; ferner $S.x^{n-4}$ die Potenzen x^{n-3} und x^{n-4}, u. ſ. f. Allein keine andere Potenzen können ſich gegen einander heben als die, welche mit denſelben Binomial-Coefficienten begleitet ſind. Dieſes führt nun auf die Geſtalt der Reihe für $S.x^n$, nämlich

$$S.x^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n - \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \varepsilon x^{n-5} + \text{etc.}$$

Die Potenzen x^{n-2}, x^{n-4}, x^{n-6}, etc. können hier nicht vorkommen. Denn dieſe, welche außer ihren eigenen Coefficienten noch den Factor $2\mathfrak{A}$ in den Gleichungen erhielten, würden in dem erſten Theile keine Glieder antreffen, gegen welche ſie ſich heben könnten, da die Glieder $\mathfrak{C}x^{n-2}$, $\mathfrak{E}x^{n-4}$, $\mathfrak{G}x^{n-6}$, etc. ſich gegen das zweyte Glied aus $2\mathfrak{C}S.x^{n-2}$; $2\mathfrak{E}S.x^{n-4}$, $2\mathfrak{G}S.x^{n-6}$, etc. heben.

41. Es ſey nun

$$S.x^n = \alpha x^{n+1} + \beta x^n + \gamma x^{n-1} - \delta x^{n-3} + \varepsilon x^{n-5} - \text{etc.}$$
$$S.x^{n-2} = \alpha' x^{n-1} + \beta' x^{n-2} + \gamma' x^{n-3} - \delta' x^{n-5} + \text{etc.}$$
$$S.x^{n-4} = \alpha'' x^{n-3} + \beta'' x^{n-4} + \gamma'' x^{n-5} - \text{etc.}$$
$$S.x^{n-6} = \alpha''' x^{-5} + \text{etc.}$$

u. ſ. f.

Die Coefficienten α', β', γ', δ', etc. ſind eben ſolche Functionen von $n-2$ als α, β, γ, δ, von n; ſo auch α'', β'', γ'', δ'' von $n-4$; und ſo mit allen folgenden.

42. Dieſe Werthe der Summen ſetze man in die Gleichungen (40.), ſo giebt die Vergleichung der Coefficienten der gleichnamigen Potenzen von x die Werthe der α, β, γ, δ, etc. Zuerſt iſt $2 = 2\mathfrak{A}\,\alpha$, alſo $\alpha = \frac{1}{\mathfrak{A}}$ $= \frac{1}{n+1}$, daher $\alpha' = \frac{1}{n-1}$; $\alpha'' = \frac{1}{n-3}$, u. ſ. f. Ferner iſt $\mathfrak{A} = 2\mathfrak{A}\beta$, daher $\beta = \frac{1}{2}$, alſo auch $\beta' = \frac{1}{2}$; $\beta'' = \frac{1}{2}$, u. ſ. f. Es iſt nämlich $\mathfrak{C} = 2\mathfrak{C}\beta'$; $\mathfrak{E} = 2\mathfrak{E}\beta''$, u. ſ. f. Die übrigen Beſtimmungsgleichungen ſind:

$\mathfrak{B} = +2\mathfrak{A}\gamma + 2\mathfrak{C}\alpha'$.
$\mathfrak{D} = -2\mathfrak{A}\delta + 2\mathfrak{C}\gamma' + 2\mathfrak{E}\alpha''$.
$\mathfrak{F} = +2\mathfrak{A}\varepsilon - 2\mathfrak{C}\delta' + 2\mathfrak{E}\gamma'' + 2\mathfrak{G}\alpha'''$.
$\mathfrak{H} = -2\mathfrak{A}\zeta + 2\mathfrak{C}\varepsilon' - 2\mathfrak{E}\delta'' + 2\mathfrak{G}\gamma''' + 2\mathfrak{J}\alpha^{\text{iv}}$
u. ſ. f.

Hieraus folgt:

I. $\alpha = \frac{1}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{n}$.

II. $\beta = \frac{1}{2}$

III. $2\mathfrak{A}\gamma = \mathfrak{B} - 2\mathfrak{C}\alpha' = \mathfrak{B}(1 - \frac{2}{3})$.

$\gamma = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{6}$.

IV. $2\mathfrak{A}\delta = -\mathfrak{D} + 2\mathfrak{C}\gamma' + 2\mathfrak{E}\alpha'' = \mathfrak{D}(-1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5})$.

$\delta = \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{1}{30} = \frac{n.\,n-1.\,n-2.}{2.\quad 3.\quad 4} \cdot \frac{1}{30}$.

V. $2\mathfrak{A}\varepsilon = \mathfrak{F} + 2\mathfrak{C}\delta' - 2\mathfrak{E}\gamma'' - 2\mathfrak{G}\alpha'''$
$= \mathfrak{F}(1 + \frac{1}{3} - 1 - \frac{2}{7})$.

$\varepsilon = \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}} \cdot \frac{1}{42} = \frac{n.\,n-1 \ldots n-4.}{2.\quad 3 \ldots 6} \cdot \frac{1}{42}$

VI. $2\mathfrak{A}\zeta = -\mathfrak{H} + 2\mathfrak{C}\varepsilon' - 2\mathfrak{E}\delta'' + 2\mathfrak{G}\gamma'''$
$+ 2\mathfrak{J}\alpha^{\text{iv}} = \mathfrak{H}(-1 + \frac{4}{3} - \frac{14}{15} + \frac{4}{5} + \frac{2}{9}) = \mathfrak{H} \cdot \frac{1}{15}$.

$$\zeta = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}} \cdot \tfrac{1}{30} = \frac{n.n-1 \ldots n-6.}{2.\ 3.\ .\ .\ 8} \cdot \tfrac{1}{30}.$$

43. Die weitere Berechnung wird beſchwerlicher, und iſt nicht nöthig, da das Geſetz der Coefficienten in $S.x^n$, was den einen Factor betrifft, ſchon offenbar iſt. Der numeriſche Factor iſt, wie man ſieht, der abſolute Coefficient des letzten Gliedes in der $S.x^n$ für gerade n. Es iſt nämlich für $n = 2$, das letzte Glied in $S.x^2 = \gamma x = \frac{1}{6}x$. In $S.x^4$ iſt das letzte Glied $= -\delta x = -\frac{1}{30}x$. In $S.x^6$ iſt es $= \varepsilon x = \frac{1}{42}x$, u. ſ. f.

44. Man bezeichne die Coefficienten des letzten Gliedes in der Summe der geraden Potenzen nach der Reihe durch A, B, C, D, E, F, etc. ohne Rückſicht auf das Vorzeichen, ſo iſt

$$S.x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \tfrac{1}{2}x^n + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}A\,x^{n-1} - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}B\,x^{n-3} + \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}}C\,x^{n-5} - \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}}D\,x^{n-7} + \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{A}}E\,x^{n-9} - \text{etc.}$$

Der zu x^{n-m} gehörige Binomial-Coefficient iſt der $(m+1)$te in der Potenz $(1+x)^{n+1}$, und die damit verbundene Zahl die $\frac{1}{2}(m+2)$te aus der Reihe A, B, C, D, etc. Für ein gerades n iſt das letzte Glied $= \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}N$, wo N die $\frac{1}{2}n$te in jener Reihe, oder der Coefficient des letzten Gliedes in $S.x^n$ iſt. Für ein ungerades n iſt das letzte Glied $= \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}N$, wo N die $\frac{1}{2}(n-1)$te Zahl iſt.

45. Die Zahlen A, B, C, D etc. heißen die *Bernoulliſchen Zahlen*, von ihrem Erfinder, Jakob Bernoulli, der die Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen mittelſt der Endcoefficienten in den Summen der geraden Potenzen und der Binomial-Coefficienten darſtellt in der Schrift: Ars conjectandi, p. 97. Er zeigt,

wie ſie folgweiſe gefunden werden können, leichter als aus den Gleichungen in 42.

46. Es wird nämlich $S.x^n = 1$ für $x = 1$, alſo iſt die Summe der Coefficienten $= 1$, d. i. $1 = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}$

$$+ \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}A - \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{A}}B + \frac{\mathfrak{F}}{\mathfrak{A}}C - \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{A}}D + \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{A}}E - \text{etc.}$$

Hat man nun die Zahlen A, B, C, etc. bis auf die $(n-1)$te gefunden, ſo findet man aus dieſer Gleichung die nte.

Z. B. Es ſey gefunden $A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{30}$, $C = \frac{1}{42}$, $D = \frac{1}{30}$, und es ſoll E für $n = 10$ gefunden werden, ſo ſetze man in dieſer Gleichung $n = 10$, alſo $\mathfrak{A} = 11$; $\mathfrak{B} = 55$; $\mathfrak{D} = 330$; $\mathfrak{F} = 462$; $\mathfrak{H} = 165$; $\mathfrak{K} = 11$, und $1 = \frac{1}{11} + \frac{1}{2} + 5.\frac{1}{6} - 30.\frac{1}{30} + 42.\frac{1}{42} - 15.\frac{1}{30} + 1.E.$ ſo iſt $E = \frac{5}{66}$.

Hieraus wird die folgende Zahl F gefunden, wenn $n = 12$ geſetzt wird. Es iſt $1 = \frac{1}{13} + \frac{1}{2} + 6A - 55B + 132C - 99D + 22E - F$. Daraus $F = \frac{691}{2730}$.

47. Man bezeichne die nte Bernoulliſche Zahl durch N, die nächſt vorhergehende durch $\overset{-1}{N}$, die dieſer zunächſt vorhergehende durch $\overset{-2}{N}$, u. ſ. f. Ferner ſetze man in der Gleichung (46.) ſtatt n das doppelte 2n, und laſſe $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. die Binomial-Coefficienten in der $(2n+1)$ten Potenz ſeyn. So iſt, nach der Multiplication durch $\mathfrak{A} = 2n+1$,

$$\mathfrak{A} = 1 + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}A - \mathfrak{D}B + \mathfrak{F}C \ldots\ldots\ldots \pm \mathfrak{C}\overset{-2}{N}$$
$$\mp \mathfrak{C}\overset{-1}{N} \pm \mathfrak{A}N.$$

Oder:

$$\mathfrak{A}N - \mathfrak{C}\overset{-1}{N} + \mathfrak{E}\overset{-2}{N} - \mathfrak{G}\overset{-3}{N} + \ldots\ldots \pm \mathfrak{F}C \mp \mathfrak{D}B$$
$$\pm \mathfrak{B}A = \pm \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} - 2).$$

Es werden nämlich die erſte, zweyte, dritte, mte Bernoulliſche Zahl mit dem zweyten, vierten, ſechſten, 2mten Binomial-Coefficienten verbunden. Nun iſt $\mathfrak{A}$

der erſte und auch der 2 n te Binomial-Coefficient, daher wird die Zahl N mit A verbunden, und A N iſt zugleich das letzte Glied in der Formel 46. Das Vorzeichen iſt + oder —, nachdem die Stellenzahl von N ungerade oder gerade iſt.

Dieſe Formel für die Bernoulliſchen Zahlen theilt Sebaſtian Canterzani in den Memorie della Società Italiana, T. XI. 1804, p. 173 mit, als eine neue und bequemere in Vergleichung mit den Euleriſchen, Calc. diff. §. 122, 123. Ich habe ſie ſchon in dem erſten Theile dieſes Wörterbuchs, in dem Artikel, Bernoulliſche Zahlen, angewandt. Canterzani iſt indirecte auf die Formel gekommen, zufälliger Weiſe bey der Entwickelung einer gewiſſen Reihe. Die Rechnung iſt bey ihm weitläufig.

48. Die Bernoulliſchen Zahlen laſſen ſich noch durch andere Formeln, als die jetzt gefundene iſt, darſtellen. Dadurch entdecken ſich auch Relationen zu andern Größen. Sie kommen in verſchiedenen analytiſchen Zuſammenſetzungen als Ingredientien der Coefficienten vor. S. Artikel, Bernoulliſche Zahlen, und Cyklometrie.

IV. Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen mit abwechſelnden Vorzeichen.

49. Eine Reihe $A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + Ez^4 -$ etc. kann man anſehen als entſtanden durch die Diviſion einer Function von z durch eine andere Function dieſer veränderlichen Größe. Die Summe der ganzen, ins Unendliche fortlaufenden Reihe iſt für jeden Werth von z der Werth des Quotienten, welchen der Dividendus durch den Diviſor dividirt giebt. Man muß aber hier Summe oder Aggregat nicht ſchlechthin im arithmetiſchen Verſtande nehmen, da die Reihe ſehr divergent ſeyn kann. Sie ſtellt nur allgemein die Form des entwickelten Quotienten dar. Es müſſen nun zwey Functionen von z geſucht werden, von der Beſchaffenheit, daß die Coefficienten A, B,

C, D, etc. Potenzen der ganzen Zahlen nach der Reihe werden. Setzt man dann $z = 1$, ſo giebt der Quotient von den beiden Functionen die Summe der Potenzen mit abwechſelnden Vorzeichen.

50. Es iſt $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 +$ etc.
Setzt man $z = 1$, ſo iſt $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc.

51. Es ſey $\frac{a - bz}{(1+z)^2} = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + Ez^4 -$ etc.
Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $(1+z)^2 = 1 + 2z + z^2$, und ſetzt die Coefficienten der gleichnamigen Potenzen auf beiden Seiten einander gleich, ſo iſt $A = a$; $2A - B = b$; $C - 2B + A = 0$; $D - 2C + B = 0$, u. ſ. f. Die Coefficienten abſolut genommen ſind daher Glieder einer arithmetiſchen Reihe der erſten Ordnung (arithm. Reihen höherer Ordn. 3.) Man ſetze nun für dieſelben die ganzen Zahlen 1, 2, 3, etc. ſo iſt $a = 1$; $b = 0$, und $\frac{1}{(1+z)^2} = 1 - 2z + 3z^2 - 4z^3 + 5z^4 -$ etc. Setzt man $z = 1$ ſo iſt
$\frac{1}{4} = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 +$ etc.

52. Es ſey $\frac{a - bz + cz^2}{(1+z)^3} = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 +$ etc. ſo iſt $A = a$; $B - 3A = b$; $C - 3B + 3A = c$; $D - 3C + 3B - A = 0$, u. ſ. f. Die Coefficienten A, B, C, etc. abſolut genommen ſind daher Glieder einer arithmetiſchen Reihe der zweyten Ordnung. Setzt man für dieſelben die Quadrate der natürlichen Zahlen, die ebenfalls eine ſolche Reihe ausmachen, ſo iſt $a = 1$; $b = 1$; $c = 0$, und es iſt

$$\frac{1 - z}{(1+z)^3} = 1 - 4z + 9z^2 - 16z^3 + 25z^4 - \text{etc.}$$

Wird $z = 1$ genommen, ſo iſt
$0 = 1 - 4 + 9 - 16 + 25 - 36 +$ etc.

53. Es ſey $\frac{a - bz + cz^2 - dz^3}{(1+z)^4} = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 +$ etc. ſo ſind die Coefficienten in der Reihe Glieder einer arithmetiſchen Reihe der dritten Ordnung. Setzt man $a = 1$; $b = 4$; $c = 1$; $d = 0$, ſo iſt

$$\frac{1 - 4z + z^2}{(1+z)^4} = 1 - 8z + 27z^2 - 64z^3 + \text{etc.}$$

Wird $z = 1$ genommen, ſo iſt

$$-\tfrac{1}{8} = 1 - 8 + 27 - 64 + 125 - 216 + \text{etc.}$$

54. Auf eine ähnliche Art wird gefunden

$$\frac{1 - 11z + 11z^2 - z^3}{(1+z)^5} = 1 - 16z + 81z^2 - 256z^3 + 625z^4 - \text{etc.}$$

und für $z = 1$ iſt

$$0 = 1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + 7^4 - \text{etc.}$$

55. Gleichfalls iſt

$$\frac{1 - 26z + 66z^2 - 26z^3 + z^4}{(1+z)^6} = 1 - 2^5 z + 3^5 z^2 - 4^5 z^3 + 5^5 z^4 - 6^5 z^5 + \text{etc.}$$

Für $z = 1$ iſt

$$+\tfrac{1}{4} = 1 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \text{etc.}$$

56. Dieſe Methode gewährt nur einzelne Formeln, deren Relation gegen einander ſelbſt oder gegen andere Reihen hieraus nicht erſichtlich wird. Dieſes zu erhalten iſt eine tiefere Analyſis erforderlich, welche auf folgendem Wege angeſtellt werden kann.

57. Man ſetze ſtatt z in (50.) die Exponentialgröße e^u, wo e die Baſis der natürlichen Logarithmen ſey. Dann iſt u der Logarithme der Zahl e^u. (Logarithmus 2.).

Man ſetze $V = \frac{1}{1 + e^u}$, ſo iſt

$$V = 1 - e^u + e^{2u} - e^{3u} + e^{4u} - e^{5u} + \text{etc.}$$

Nun iſt (Logarithmus, 29.)

$$e^u = 1 + u + \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{6}u^3 + \tfrac{1}{24}u^4 + \tfrac{1}{120}u^5 + \text{etc.}$$

$e^{2u} = 1 + 2u + \frac{1}{2}.\,2^2u^2 + \frac{1}{6}.\,2^3u^3 + \frac{1}{24}.\,2^4u^4 + \frac{1}{120}\,2^5u^5 + \text{etc.}$

$e^{3u} = 1 + 3u + \frac{1}{2}.\,3^2\,u^2 + \frac{1}{6}.\,3^3u^3 + \frac{1}{24}.\,3^4\,u^4 + \frac{1}{123}.\,3^5u^5 + \text{etc.}$

u. ſ. f.

Folglich iſt, wenn alle Glieder nach den Potenzen von u geordnet werden,

$$\begin{aligned} V = {} & 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \text{etc.} \\ & - (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \text{etc.})u \\ & - \tfrac{1}{2}(1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + \text{etc.})u^2 \\ & - \tfrac{1}{6}(1^3 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + 5^3 - 6^3 + \text{etc.})u^3 \\ & - \tfrac{1}{24}(1^4 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + 5^4 - 6^4 + \text{etc.})u^4 \\ & - \tfrac{1}{120}(1^5 - 2^5 + 3^5 - 4^5 + 5^5 - 6^5 + \text{etc.})u^5 \\ & - \text{etc.} \end{aligned}$$

Aus den beiden Formen von V müſſen die Werthe der Coefficienten von den Potenzen der u hergeleitet werden. Das erſte Glied der Reihe, der Coefficient von u^0, iſt $= \frac{1}{2}$.

58. Da die Coefficienten von u^2 und $u^4 = 0$ ſind (51, 53.), ſo iſt zu vermuthen, daß die Summen der geraden Potenzen mit abwechſelnden Vorzeichen überhaupt Null ſeyn werden.

Man nehme u negativ, und ſetze $V' = \frac{1}{1 + e^{-u}} = \frac{e^u}{e^u + 1}$, ſo iſt $V' = V.\,e^u$, das iſt $V' = e^u - e^{2u} + e^{3u} - e^{4u} + e^{5u} - e^{6u} + \text{etc.}$

Folglich $V' = 1 - V$. Nun iſt, wenn man die abſoluten Coefficienten von u, u^2, etc. durch A, B, etc. bezeichnet,

$V = \frac{1}{2} - Au - Bu^2 - Cu^3 - Du^4 - Eu^5 - \text{etc.}$

und, wenn u negativ genommen wird,

$V' = \frac{1}{2} + Au - Bu^2 + Cu^3 - Du^4 + Eu^5 - \text{etc.}$

Da V' oder $1 - V = \frac{1}{2} + Au + Bu^2 + Cu^3 + Du^4 + Eu^5 + \text{etc.}$ iſt, ſo kann dieſe Reihe der für V' nicht gleich ſeyn, wenn nicht $B = 0$; $D = 0$; $F = 0$, über-

haupt die Coefficienten der geraden Potenzen von $u = o$ ſind.

59. Man ſetze $V = \frac{1}{2} - \alpha u + \beta u^3 - \gamma u^5 + \delta u^7 -$ etc. Dieſer Ausdruck für V und der Werth deſſelben, $\frac{1}{1 + e^u}$, ſind beide zu differentiiren, um durch die Vergleichung der Differentiale zu Relationen zwiſchen den Coefficienten α, β, γ, δ, etc. zu gelangen.

Es iſt $\partial . e^u = e^u \partial u$ (Differentialformeln, 14.), alſo $\partial . \frac{1}{1 + e^u} = -\frac{e^u \partial u}{(1 + e^u)^2} = -(1 - V) V \partial u$, weil $e^u = \frac{1 - V}{V}$. Alſo iſt $\frac{\partial V}{\partial u} = -(1 - V) V$. Die für V angenommene Reihe giebt $\frac{\partial V}{\partial u} = -\alpha + 3\beta u^2 - 5\gamma u^4 + 7\delta u^6 - 9\varepsilon u^8 +$ etc. Da

$$1 - V = \frac{1}{2} + \alpha u - \beta u^3 + \gamma u^5 - \text{etc.}$$
$$V = \frac{1}{2} - \alpha u + \beta u^3 - \gamma u^5 + \text{etc.}$$

iſt, ſo iſt

$$(1 - V) V = \frac{1}{4} - (\alpha u - \beta u^3 + \gamma u^5 - \text{etc.})^2.$$

Vergleicht man dieſen Ausdruck mit dem für $-\frac{\partial V}{\partial u}$, ſo ergeben ſich folgende Relationen:

$\alpha = \frac{1}{4}$.
$3\beta = \alpha^2$.
$5\gamma = 2\alpha\beta$.
$7\delta = 2\alpha\gamma + \beta^2$.
$9\varepsilon = 2\alpha\delta + 2\beta\gamma$.
$11\zeta = 2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma^2$.
$13\eta = 2\alpha\zeta + 2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta$.
$15\vartheta = 2\alpha\eta + 2\beta\zeta + 2\gamma\varepsilon + \delta^2$.
etc.

60. Die Aggregate der ungeraden Potenzen der natürlichen Zahlen mit abwechſelnden Vorzeichen ſeyn für die

erſten Potenzen $= a$; für die dritten $= b$, für die fünften $= c$, u. ſ. f. ſo iſt

$a = \alpha$; $b = -1.2.3\,\alpha$;
$c = +1.2.3.4.5\,\gamma$; $d = -1.2\ldots7\,\delta$;
$e = +1.2\ldots9\,\varepsilon$; $f = -1.2\ldots11\,\zeta$;
etc.

Dieſe Werthe ſubſtituire man für α, β, γ, etc. in den Formeln (59.), jedoch nur die abſoluten Werthe, ohne Rückſicht auf die Vorzeichen, ſo iſt

$a = \frac{1}{4}$.

$b = 2.\,a^2$.

$c = 4.\,2ab$.

$$d = 6.\,2ac + \frac{6.5.4.}{1.2.3.}.\,b^2,$$

$$e = 8.\,2ad + \frac{8.7.6.}{1.2.3.}.\,2bc,$$

$$f = 10.\,2ae + \frac{10.9.8}{1.2.3.}.\,2bd + \frac{10..6}{1..5}.\,c^2.$$

$$g = 12.\,2af + \frac{12.11.10}{1.\;2.\;3}.\,2be + \frac{12..8}{1..5}.\,2cd.$$

$$h = 14.\,2ag + \frac{14.13.12}{1.\;2.\;3}.\,2bf + \frac{14..10}{1..5}.\,2ce$$
$$+ \frac{14\ldots8}{1\ldots7}.\,d^2,$$

etc.

61. Es iſt ſehr merkwürdig, daß die Relationen in (59.) ganz dieſelben ſind mit den Relationen der Coefficienten in der Reihe tang $\varphi = a\varphi + b\varphi^3 + c\varphi^5 + d\varphi^7 +$ etc. (Cyklometrie, 14.). Die Tangenten der Winkel können als Logarithmen unmöglicher Größen betrachtet werden. Daher entſteht jene Übereinſtimmung. Dort iſt $a = 1$, hier iſt $\alpha = \frac{1}{4}$.

62. Man drücke die Zahlen β, γ, δ, etc. in (59.) durch α aus, ſo iſt

$3\beta = \alpha^2$; $3.5\gamma = 2\alpha^3$; $3^2.5.7\,\delta = 17\alpha^4$;
$3^2.5.7.9\,\varepsilon = 62\alpha^5$; $3^2.5^2.7.9.11\,\zeta = 1382\alpha^6$, etc.
Die Factoren von den Potenzen der α ſind ganz dieſelben mit den Zählern der Coefficienten von φ, a. a. O. und die Zahlen α, β, γ, δ, etc. ſelbſt ſind dieſe Coefficienten mit den Potenzen von α nach der Reihe multiplicirt. Dieſes rührt daher, daß die Formeln für a, b, c, d. etc. daſelbſt dieſelben mit denen für α, β, γ, δ, etc. ſind, nur daß $a = 1$ und $\alpha = \frac{1}{2}$ iſt. Die Werthe von b, c, d, etc. werden durch a eben ſo ausgedruckt, wie die von β, γ, δ, etc. durch α.

63. In dem Artikel, Bernoulliſche Zahlen (5), ſind die Zahlen α, β, γ, δ, etc. eingeführt, welche zu jenen eine ähnliche Relation haben, als hier α, β, γ, etc. zu den Summen der $\pm$ Potenzen. Die Formeln für jene (daſ. 8.) ſind auch denen für dieſe ähnlich. Druckt man jene durch das zugehörige α aus, ſo iſt
$5\beta = \alpha^2$; $5.7\gamma = 2\alpha^3$;
$5^2.7.9\,\delta = 27\alpha^4$; $5^3.7.9.11\,\varepsilon = 450\alpha^5$;
$5^3.7^2.9.11.13\,\zeta = 12438\alpha^6$, etc.

64. Man unterſcheide dieſe Zahlen durch die Strichelung von α, β, γ etc. die ſich auf die Aggregate der Potenzen beziehen, und ſuche ihre Verhältniſſe. Man wird leicht finden, daß
$\alpha : \alpha' = 3 : 1$; $\beta : \beta' = 15 : 1$; $\gamma : \gamma' = 63 : 1$;
$\delta : \delta' = 255 : 1$; $\varepsilon : \varepsilon' = 1023 : 1$;
$\zeta : \zeta' = 4095 : 1$, u. ſ. w.

Das iſt
$\alpha = (4 - 1)\alpha'$; $\beta = (4^2 - 1)\beta'$;
$\gamma = (4^3 - 1)\gamma'$; $\delta = (4^4 - 1)\delta'$
$\varepsilon = (4^5 - 1)\varepsilon'$; $\zeta = (4^6 - 1)\zeta'$;
etc.

65. Man nehme ſtatt α, β, γ, etc. die Aggregate der Potenzen, mit dem zugehörigen Diviſor, eben ſo ſtatt α', β', γ', etc. die Bernoulliſchen Zahlen, ſo ergeben

ſich für die Aggregate der ungeraden Potenzen der natürlichen Zahlen mit abwechſelnden Vorzeichen folgende Werthe:

$$a = \frac{(4-1)A}{2};\ b = -\frac{(4^2-)B}{4};$$

$$c = \frac{(4^3-1)C}{6};\ d = -\frac{(4^4-1)D}{8};$$

$$e = \frac{(4^5-1)E}{10};\ f = -\frac{(4^6-1)F}{12};$$

etc.

Dadurch iſt $a = +\frac{1}{4}$; $b = -\frac{1}{8}$; $c = \frac{1}{4}$; $d = -\frac{17}{16}$; $e = +\frac{31}{22}$; $f = -\frac{691}{8}$;
etc.

66. Dieſe Werthe folgen auch aus den Werthen der Coefficienten von φ in der Formel für tang φ in Cyklometrie, 17. Denn dieſe ſind, wie vorher (62.) bemerkt worden, $\frac{\alpha}{\alpha}$, $\frac{\beta}{\alpha^2}$, $\frac{\gamma}{\alpha^3}$, $\frac{\delta}{\alpha^4}$, etc. das iſt 1, $4^2\beta$, $4^3\gamma$, $4^4\delta$, etc. Vergleicht man dieſe mit den Werthen der Coefficienten in 17, a. a. O. wo 𝔄, 𝔅, ℭ, ꝛc. die Bernoulliſchen Zahlen ſind, welche hier A, B, C, etc. heißen, ſo iſt $\beta = \frac{(4^2-1)}{1\,..\,4}B$; $\gamma = \frac{4^3-1}{1\,..\,6}C$; $\delta = \frac{4^4-1}{1\,..\,8}$, u. ſ. f. woraus ſogleich die Werthe von b, c, d, etc. folgen. Der Coefficient von φ iſt $= 1$, weil 𝔄 oder $A = \frac{1}{6}$ iſt. Die Summe ± der erſten Potenzen iſt $\frac{1}{4}$, welches auch der Werth von $\frac{4-1}{2}A$ iſt.

67. Die Aggregate der ungeraden Potenzen der ungeraden Zahlen mit abwechſelnden Vorzeichen ſind immer $= 0$.

Es iſt $1 - \frac{e^u}{1+e^{2u}} = 1 - e^u\,(1 - e^{2u} + e^{4u} - \text{etc.}$
$= 1 - e^u + e^{3u} - e^{5u} + e^{7u} - \text{etc.}$ Setzt man $-u$

lung des Bruchs $\frac{1}{1 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{24}u^4 + \frac{1}{720}u^6 + \text{etc.}}$ aus den Coefficienten der daraus hervorgehenden Reihe gefunden. Man ſetze dieſe Reihe $= 1 - \alpha u^2 + \beta u^4 - \gamma u^6 + \delta u^8 - \text{etc.}$ und ſtatt der gebrochenen Coefficienten von u zur Bequemlichkeit die Bezeichnungen a, b, c, d, e, etc. ſo iſt

$\alpha = a.$

$\beta = a\alpha - b.$

$\gamma = a\beta - b\alpha + c.$

$\delta = a\gamma - b\beta + c\alpha - d.$

$\varepsilon = a\delta - b\gamma + c\beta - d\alpha + e,$

u. ſ. f.

Die numeriſche Entwickelung giebt

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\,;\ \beta = \frac{5}{1.2.3.4}\,;\ \gamma = \frac{61}{1.2\ldots 6}\,;\ \delta = \frac{1385}{1.2\ldots 8},$$

$$\varepsilon = \frac{50521}{1.2\ldots 10}\,;\ \text{etc.}$$

Da $V = 1 - \frac{1}{2}(1 - \alpha u^2 + \beta u^4 - \gamma u^6 + \text{etc.})$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha u^2 - \frac{1}{2}\beta u^4 + \frac{1}{2}\gamma u^6 - \text{etc.}$ iſt, ſo iſt

$S.(1 - 3^2 + \text{etc.}) = -\frac{1}{2}$; $S.(1 - 3^4 + \text{etc.}) = +\frac{5}{2}$;

$S.(1 - 3^6 + \text{etc.}) = -\frac{61}{2}$; $S.(1 - 3^8 + \text{etc.}) = +\frac{1385}{2}$;

$S.(1 - 3^{10} + \text{etc.}) = -\frac{50521}{2}$; u. ſ. f.

Die Coefficienten α, β, γ, δ, etc. ſind dieſelben mit denen in der Reihe für $\sec\varphi$, in Cyklometrie, 22. nur daß daſelbſt alle das Vorzeichen + haben. Die Werthe der Zähler hat Euler bis zum zehnten berechnet. Calc. diff. P. II. §. 224.

70. Den Satz, daß $S. \pm z^{2n} = 0$ iſt, hat Euler in den Institt. calc. diff. P II. §. 185. aus andern Gründen, als hier angewandt ſind, hergeleitet. Eben daſelbſt finden ſich auch die Formeln für $S. \pm z^{2n+1}$. Ein vorzüglicher Analyſt, Gregorio Fontana, findet die von Euler gebrauchte Beweisart nicht völlig überzeugend. Memorie della Società Italiana, T. II, p. 420. Er

wählt deswegen einen andern Weg durch fortgeſetzte Differentiation gewiſſer Reihen. Allein dieſes Verfahren iſt zu verwickelt, als daß es einen ſichern Schluß gewähren könnte. So urtheilt auch Pfaff in ſeiner Schrift: Verſuch einer neuen Summationsmethode. Berlin 1788. In dieſer Schrift ſind die Formeln für S. $\pm z^n$ und S. $\pm (2z+1)^n$ aus goniometriſchen Sätzen hergeleitet. Die zweyte Gattung hat Euler nicht. Die von mir angewandte Methode wird die einfachſte unter allen ſeyn.

V. Summen der reciproken Potenzen der natürlichen Zahlen.

71. Reciproke Potenzen ſind die Quotienten der Einheit durch die Potenz einer Zahl dividirt. Die Reihen derſelben, wenn die Potenzen der natürlichen Zahlen gerade Exponenten haben, werden vermittelſt des Umfanges eines Kreiſes ſummirt, auch die Reihen mit geraden Potenzen der ungeraden Zahlen. Der Zuſammenhang dieſer Summen mit der Rectification des Kreiſes iſt ſo merkwürdig, daß er verdient entwickelt zu werden.

72. Es iſt (Cyklometrie, 5 und 26.)

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\varphi^3 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdot 5}\varphi^5 - \frac{1}{1\cdot 2\cdot\cdot\cdot 7}\varphi^7 + \text{etc.}$$

und

$$\sin\varphi = \varphi\left(1-\frac{\varphi^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{9\pi^2}\right).\ \text{etc.}$$

Der Kürze wegen ſetze man für die Coefficienten von φ Buchſtaben, in der erſtern Formel 1, A, B, C, etc. in der zweyten α, β, γ, etc. ſo iſt

$$1 - A\varphi^2 + B\varphi^4 - C\varphi^6 + D\varphi^8 - \text{etc.} =$$
$$(1-\alpha\varphi^2)(1-\beta\varphi^2)(1-\gamma\varphi^2)(1-\delta\varphi^2).\ \text{etc.}$$

Nun iſt, wenn das Product entwickelt wird, (Buchſtabenrechnung, 19.) $A = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.}$ = der Summe der Unionen; $B = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta \ldots + \beta\gamma + \beta\delta \ldots + \gamma\delta \ldots + \text{etc.}$ = der Summe der Bi-

nionen; $C =$ der Summe der Ternionen; $D =$ der Summe der Quaternionen, u. ſ. f.

Ferner ſey P die Summe der α, β, γ, etc. als Wurzeln betrachtet; Q die Summe ihrer Quadrate; R die Summe ihrer Würfel; S die Summe der Biquadrate, u. ſ. f. ſo iſt (Combination, 43, und combinatoriſche Analyſis, 54.)

$P = A.$

$Q = AP - 2B.$

$R = AQ - BP + 3C.$

$S = AR - BQ + CP - 4D.$

u. ſ. f.

Daher iſt

$$P = \frac{1}{1.2.3}; \quad Q = \frac{4}{1.2..5}\cdot\frac{1}{3}; \quad R = \frac{16}{1.2..7}\cdot\frac{1}{3};$$

$$S = \frac{64}{1.2..9}\cdot\frac{3}{5}; \quad T = \frac{256}{1.2...11}\cdot\frac{5}{3}; \quad U = \frac{1024}{1.2...13}\cdot\frac{691}{105};$$

etc.

Das Geſetz des erſten Factors in dieſen Brüchen iſt offenbar, nicht für den zweyten Factor. Man gebe dieſen Summen aber folgende Geſtalt:

$$P = \frac{2}{1.2}\cdot\frac{1}{6}; \quad Q = \frac{8}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{30}; \quad R = \frac{32}{1.2..6}\cdot\frac{1}{42};$$

$$S = \frac{128}{1.2..8}\cdot\frac{1}{30}; \quad T = \frac{512}{1.2..11}\cdot\frac{5}{66}; \quad U = \frac{2048}{1.2..12}\cdot\frac{691}{2730};$$

etc.

wo die zweyten Factoren die Bernoulliſchen Zahlen ſind.

73. Demnach iſt, wenn die Bernoulliſchen Zahlen hier durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, ꝛc. und die Summen der reciproken geraden Potenzen ohne Ende genommen, durch

$S.\left(1, . . \frac{1}{i^{2n}}\right)$ bezeichnet werden,

$$S.\left(1 \ldots + \frac{1}{i^2}\right) = \frac{2\mathfrak{A}}{1.2}\pi^2.$$

$$S.\left(1 \ldots + \frac{1}{i^4}\right) = \frac{2^3\mathfrak{B}}{1..4}\pi^4$$

$$S.\left(1 \ldots + \frac{1}{i^6}\right) = \frac{2^5 \mathfrak{C}}{1 \ldots 6} \pi^6.$$

$$S.\left(1 \ldots + \frac{1}{i^8}\right) = \frac{2^7 \mathfrak{D}}{1 \ldots 8} \pi^8.$$

u. ſ. f.

74. Dieſe Werthe ſind zwar durch Induction gefunden; allein da die Reihen, woraus ſie entſpringen, eine regelmäßige Bildung haben, und ſie daraus auf eine regelmäßige Art hergeleitet werden, ſo muß für die Summen ein Geſetz vorhanden ſeyn. Da ein ſolches ganz unzweydeutig gefunden iſt, ſo iſt es das richtige.

75. Die Factoren der Potenzen von π ſind die halben Coefficienten des Winkels φ in der Reihe für cotang φ, Cyklometrie, 16. abſolut genommen. Wie dieſes mit den Summen der reciproken Potenzen zuſammenhange, iſt der Mühe werth zu unterſuchen.

76. Die Reihe für die Cotangente iſt der Quotient der Reihe für cos φ dividirt durch sin φ. Es iſt, nach der vorher angenommenen Bezeichnung, sin $\varphi = \varphi - A\varphi^3 + B\varphi^5 - C\varphi^7 + D\varphi^9 -$ etc. Ferner iſt (Cyklometrie, 6.)

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{1.2}\varphi^2 + \frac{1}{1.2.4}\varphi^4 - \frac{1}{1..6}\varphi^6 + \text{etc.}$$

oder

$$\cos\varphi = 1 - 3A\varphi^2 + 5B\varphi^4 - 7C\varphi^6 + 9D\varphi^8 - \text{etc.}$$

alſo iſt

$$\cot\varphi = \frac{1 - 3A\varphi^2 + 5B\varphi^4 - 7C\varphi^6 + \text{etc.}}{\varphi - A\varphi^3 + B\varphi^5 - C\varphi^7 + \text{etc.}}$$

$$= \frac{1}{\varphi} - a\varphi - b\varphi^3 - c\varphi^5 - d\varphi^7 - \text{etc.}$$

Man entwickele ferner den Quotienten $\frac{A - 2Bz + 3Cz^2 - 4Dz^3 + \text{etc.}}{1 - Az + Bz^2 - Cz^3 + Dz^4 - \text{etc.}}$, und ſetze denſelben $= P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + Tz^4 +$ etc. ſo ſind die Werthe von P, Q, R, S, etc. eben dieſelben, welche für

die Summen der Potenzen in (72.) gefunden ſind. Man multiplicire die gebrochne Function von z und die ihr gleiche Reihe durch 2z, und ziehe beides von 1 ab, ſo erhält man

$$\frac{1 - 3Az + 5Bz^2 - 7Cz^3 + 9Dz^4 - \text{etc.}}{1 - Az + Bz^2 - Cz^3 + Dz^4 - \text{etc.}}$$
$$= 1 - 2Pz - 2Qz^2 - 2Rz^3 - 2Sz^4 - \text{etc.}$$

Nun ſetze man φ^2 ſtatt z, und dividire beiderſeits durch φ, ſo iſt

$$\cot\varphi = \frac{1}{\varphi} - 2P\varphi - 2Q\varphi^3 - 2R\varphi^5 - 2S\varphi^7 - \text{etc.}$$

Oder $P = \frac{1}{2}a$; $Q = \frac{1}{2}b$; $R = \frac{1}{2}c$, u. ſ. f.
Dieſes beſtätigt das vorher gefundene Geſetz für die Summen der reciproken Potenzen.

77. Die Summen der geraden reciproken Potenzen der ungeraden Zahlen werden auf ähnliche Art gefunden. Es iſt (Cyklometrie, 6 und 26.)

$$\cos\varphi = 1 - \frac{1}{1.2}\varphi^2 + \frac{1}{1\ldots4}\varphi^4 - \frac{1}{1\ldots6}\varphi^6 + \text{etc.}$$

und

$$\cos\varphi = \left(1 - \frac{4\varphi^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\varphi^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\varphi^2}{25\pi^2}\right).\ \text{etc.}$$

Nun ſetze man $A = \frac{1}{1.2}$; $B = \frac{1}{1\ldots4}$; $C = \frac{1}{1\ldots6}$; u. ſ. w.

ferner $\alpha = \frac{4}{\pi^2}$; $\beta = \frac{4}{9\pi^2}$; $\gamma = \frac{4}{25\pi^2}$; etc. Hier iſt wiederum A die Summe der Unionen, B die Summe der Binionen, C der Ternionen aus α, β, γ, etc. u. ſ. f. Die Bedeutungen von P, Q, R, etc. bleiben wie in (72.), und ihre Relationen zu A, B, C, etc. ſind dieſelben wie dort. Nun iſt nach dieſen Formeln

$$P = \frac{1}{1.2};\ Q = \frac{1}{1.2.3};\ R = \frac{8}{1.2..5};\ S = \frac{136}{1.2\ldots7};$$
$$T = \frac{3968}{1.2..9};\ \text{etc.}$$

78. Es iſt nicht leicht, hier ein Geſetz der Fortſchreitung zu entdecken, auch wenn man die Bernoulli-

ſchen Zahlen einführt. Es iſt $P = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{6}$; $Q = 1 \cdot \frac{15}{3} \cdot \frac{1}{30}$; $R = 2 \cdot \frac{63}{3 \cdot 3 \cdot 5} \cdot \frac{1}{42}$; $S = 1 \cdot \frac{255}{3 \cdot 3 \, 5 \cdot 7} \cdot \frac{1}{30}$; $T = 2 \cdot \frac{1023}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \cdot \frac{5}{66}$. wo $3 = 4 - 1$; $15 = 4^2 - 1$; $63 = 4^3 - 1$; $255 = 4^4 - 1$; $1023 = 4^5 - 1$, iſt.

Vergleicht man dieſe Summen mit den Coefficienten von φ in der Reihe für tang φ, (Cyklometrie, 14.), ſo findet ſich, daß ſie die Hälften dieſer ſind.

79. Dieſes ergiebt ſich allgemein folgendergeſtalt. Es ſey
$\cos\varphi = 1 - A\varphi^2 + B\varphi^4 - C\varphi^6 + D\varphi^8 - \text{etc.}$ ſo iſt
$\sin\varphi = \varphi - 4B\varphi^3 + 6C\varphi^5 - 8D\varphi^7 + \text{etc.}$ weil
$A = \frac{1}{1.2}$; $B = \frac{1}{1..4}$, u. ſ. w. iſt.

Ferner ſey, wie vorher,

$$\frac{A - 2Bz + 3Cz^2 - 4Dz^3 + 5Ez^4 - \text{etc.}}{1 - Az + Bz^2 - Cz^3 + Dz^4 - Ez^5 + \text{etc.}}$$

$= P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + Tz^4 + \text{etc.}$ ſo ſind P, Q, R, etc. die Summen der Potenzen von den in A enthaltenen Theilen nach 72. Nun multiplicire man die beiden gleichen Functionen jede durch 2, ſetze im Zähler für A ſeinen Werth $\frac{1}{2}$, vertauſche z mit φ^2, und multiplicire dann beide Functionen mit φ, ſo wird die gebrochne Function $= \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi$, und es iſt

$\text{tang}\,\varphi = 2P\varphi + 2Q\varphi^3 + 2R\varphi^5 + 2S\varphi^7 + \text{etc.}$

Die allgemeinen Werthe der Coefficienten von φ ſind in Cyklometrie, 17. angegeben. Dadurch iſt

$$2P = \frac{4(4-1)\mathfrak{A}}{1 \;\; 2};\; 2Q = \frac{4^2(4^2-1)\mathfrak{B}}{1.\;2.\;3.\;4};$$

$$2R = \frac{4^3(4^3-1)\mathfrak{C}}{1.\;2.\;.\;6};\; 2S = \frac{4^4(4^4-1)\mathfrak{D}}{1.\;2.\;.\;.\;8};$$

$$2T = \frac{4^5(4^5-1)\mathfrak{E}}{1.\;2.\;.\;10};\; \text{etc.}$$

80. Folglich iſt

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\text{etc.}=\frac{(4-1)\mathfrak{A}}{1.2}\cdot\frac{\pi^2}{2}.$$

$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\text{etc.}=\frac{(4^2-1)\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\cdot\frac{\pi^4}{2}.$$

$$1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\text{etc.}=\frac{(4^3-1)\mathfrak{C}}{1.2..6}\cdot\frac{\pi^6}{2}.$$

$$1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\text{etc.}=\frac{(4^4-1)\mathfrak{D}}{1.2...8}\cdot\frac{\pi^8}{2}.$$

u. ſ. w.

Die Werthe dieſer Summen ſind die Coefficienten in der Reihe für tang $\frac{1}{2}\varphi$, durch 4 dividirt und mit den Potenzen von π^2 multiplicirt.

81. Die Summen der reciproken geraden Potenzen der geraden Zahlen entſtehen aus den in (73.) angegebenen durch die Abziehung der zuletzt in (80.) gefundenen. Es iſt

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\text{etc.}=\frac{\mathfrak{A}}{1.2}\cdot\frac{\pi^2}{2}.$$

$$\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\text{etc.}=\frac{\mathfrak{B}}{1..4}\cdot\frac{\pi^4}{2}$$

$$\frac{1}{2^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+\text{etc.}=\frac{\mathfrak{C}}{1..6}\cdot\frac{\pi^6}{2}.$$

u. ſ. f.

Die Factoren zu den Potenzen von π ſind der vierte Theil der Coefficienten in der Reihe zu cot $\frac{1}{2}\varphi$. Cyklometrie, 16.

82. Die Summen der geraden reciproken Potenzen der ungeraden Zahlen können auch aus den Summen hergeleitet werden, worin ſich alle Zahlen finden. Denn es ſey

$$M=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\text{etc.}$$

nd dieſe Reihe werde durch 2^n dividirt, ſo iſt

$$\frac{M}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \text{etc.}$$

Zieht man dieſe Reihe von jener ab, ſo iſt

$$\frac{2^n - 1}{2^n} M = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \text{etc.}$$

Setzt man für n die geraden Zahlen nach der Reihe, ſo erhält man aus den Formeln in (73.) die in (80).

83. Wenn die Reihe $\frac{M}{2^n}$ zweymahl genommen von der Reihe M abgezogen wird, ſo erhält man die Reihe der reciproken Potenzen mit abwechſelnden Vorzeichen, nämlich $M - \frac{2M}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \text{etc.}$ Es iſt

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \text{etc.} = \frac{(2-1)\mathfrak{A}}{1.\ 2.} \cdot \pi^2.$$

$$1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = \frac{(2^3-1)\mathfrak{B}}{1 .\ .\ 4} \cdot \pi^4.$$

$$1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \text{etc.} = \frac{(2^5-1)\mathfrak{C}}{1 .\ .\ 6} \cdot \pi^6.$$

$$1 - \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} - \frac{1}{4^8} + \text{etc.} = \frac{(2^7-1)\mathfrak{D}}{1 .\ .\ 8} \cdot \pi^8.$$

u. ſ. w.

Die Factoren zu den Potenzen von π ſind die Hälften der Coefficienten von φ in der Reihe für cosec. φ. Cyklometrie 21.

84. Die Summen der reciproken ungeraden Potenzen der ungeraden Zahlen mit abwechſelnden Vorzeichen haben eine Beziehung auf die Coefficienten in der Reihe für die Secanten, deren Entwickelung aber zu umſtändlich iſt, um hier ausgeführt zu werden. Es ſey $\sec\varphi = 1 + \alpha\varphi^2 + \beta\varphi^4 + \gamma\varphi^6 + \delta\varphi^8 + \text{etc}$, ſo ſind dieſe Summen nach der Folge der Potenzen:

$$\text{I. } 1 . \frac{\pi}{4}. \quad \text{III. } \alpha . \frac{\pi^3}{4^2}. \quad \text{V. } \beta . \frac{\pi^5}{4^3}.$$

VII. $\gamma.\ \frac{\pi^7}{4^4}$. IX. $\delta.\ \frac{\pi^9}{4^5}$. etc.

Man ſehe Eulers Differentialrechnung, P. II. §. 224 — 226, und die Introd in Anal. Inf. T. I. §. 175. Die Summen der reciproken ungeraden Potenzen aller Zahlen mit einerley Vorzeichen haben keine Beziehung auf die Coefficienten in einer goniometriſchen Reihe. Die numeriſchen Werthe, bis zu der 15ten Summe und bis auf die 16te Decimalſtelle, hat Euler berechnet, a. a. O. §. 151. 152.

85. Die Summirung der reciproken Potenzen ſowol aller ganzen Zahlen als der ungeraden allein hat Joh. Bernoulli entdeckt, auf dem Wege, der hier genommen iſt, Opp. T. IV. nr. 152. Sein Bruder Jakob Bernoulli hatte die Summe der reciproken Quadrate nicht finden können, ſo ſehr er ſich darum bemühte. Er ſagt daher, daß er ſich ſehr freuen würde, wenn jemand ſie ihm mittheilte. De seriebus infinitis, p. 254. Nach derſelben Methode, die Bernoulli gebraucht hat, fand auch Euler die Summe der reciproken Potenzen, in den Comm. Acad. Petrop. T. VII. a. a. 1734 et 1735, ohne etwas von Bernoulli's Verfahren zu wiſſen. Denn deſſen Aufſatz ſteht in dem vierten Theile ſeiner Werke, der die ungedruckten Abhandlungen enthält, und 1742 herauskam. Euler trägt die Summirung der reciproken Potenzen ferner vor in der Introd in Anal. Inf. T. I. cap. X. nachdem er in dem vorhergehenden gezeigt hatte, wie die Reihen für den Sinus und Coſinus eines Winkels in Factoren zerlegbar ſind. Dieſes leiſtet er, vermuthlich um einer unten anzuführenden Bedenklichkeit auszuweichen, durch die Zerlegung einer logarithmiſchen Function in Factoren. Allein der Gebrauch unendlich kleiner Größen und der Übergang von den logarithmiſchen Functionen zu den circularen durch das Unmögliche hat doch viele Unbequemlichkeit. Die allgemeinen Formen der Summen finden ſich in dem angeführten Werke noch nicht. Dieſe giebt Euler für die recipro-

$= \pm r\sqrt{-1}$. Die Methode gewährt aber keine allgemeine Überſicht und Vergleichung. Für die Rechnung mit unmöglichen Größen giebt ſie ein gutes Beyſpiel.

87. Die vorher erwähnte Bedenklichkeit bey der in dieſem Artikel gebrauchten Summirungsmethode betrifft die Zerlegung der unendlichen Reihe für den Sinus und Coſinus eines Winkels in Factoren. Joh. Bernoulli äußert ſie ſelbſt a. a. O. §. 12, ſagt aber, daß die Entſtehungsart der Reihe hinlänglich ſeyn möge ſie zu heben. Es könnte nämlich gefragt werden, ob nicht jene Reihen vielleicht unmögliche oder fremde (nicht zu den Sinus und Coſinus gehörigen) Wurzeln enthalten möchten, wodurch freylich die Herleitung der Summe gefährdet werden würde. Ich glaube die Beantwortung genugthuend in der Cyklometrie 8, gegeben zu haben, auch daſ. 20. einem Zweifel, den die Reihe für die Tangente erwecken könnte (Pfaff, a. a. O S. 87.), begegnet zu ſeyn.

Potenz einer Hyperbel, ſ. Hyperbel, 9.

Potenzen, reguläre, irreguläre, gleichnamige (homogeneae), ungleichnamige (heterogeneae), ſind Benennungen, die kaum noch vorkommen. Eine reguläre iſt, woraus ſich die Wurzel vollſtändig ziehen läßt, eine irreguläre iſt das Gegentheil. Gleichnamige ſind, Größen von gleich viel Dimenſionen, in Zahlen ſolche, die denſelben Exponenten haben. Ungleichnamige ſind von entgegengeſetzter Beſchaffenheit.

Praktik, welſche Praktik insbeſondere, iſt in der Rechenkunſt der Inbegriff von Regeln mit Leichtigkeit zu rechnen. Sie enthält die Vortheile, welche man ſich beym Rechnen machen kann. Der zweyte Theil von Clausbergs Rechenkunſt hat dieſe Überſchrift. Der Beyſatz, welſche, rührt daher, weil die praktiſche Rechenkunſt, beſonders die kaufmänniſche, in dem mittlern Zeitalter von Italien aus ſich verbreitet hat, daher noch jetzt, und noch mehr vor nicht langer Zeit, die vielen italieniſchen Kunſtwörter in dem kaufmänniſchen Rechnungsweſen üblich ſind.

Digitized by Google

Primzahl, einfache Zahl, (numerus primus) iſt eine ſolche, welche keine ganze Zahlen zu Factoren hat, oder, welche nur von der Einheit allein gemeſſen wird, wie die Zahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, u. ſ. f.

Primzahlen unter ſich ſind ſolche, welche keine gemeinſchaftliche einfache Factoren haben, z. B. 18, 35, 143.

1. Es iſt kein Charakter oder eine allgemeine Form bekannt, wodurch ſich die Primzahlen von den aus Factoren zuſammengeſetzten Zahlen auszeichneten und kennbar wären. Sie werden empiriſch gefunden, indem man alle theilbare Zahlen nach einer ſichern Methode ausſucht, wodurch die übrigen als Primzahlen ſich zeigen. Dieſe werden entweder in eine beſondere Tafel gebracht, oder ſie werden in einer Factorentafel durch ein leeres Fach ausgezeichnet. Eratoſthenes hat ſchon ein ſolches Verfahren angewandt, ſ. Eratoſthenes.

2. Um zu unterſuchen, ob eine gegebene Zahl eine Primzahl ſey, muß man ſie mit allen Primzahlen bis zu der vor ihrer Quadratwurzel nächſt vorhergehenden dividiren, vorausgeſetzt, daß man alle Primzahlen ſo weit ausgeſondert habe. Denn wenn die Zahl Factoren hat, ſo laſſen ſich dieſe, ſo viele ihrer auch ſeyn mögen, auf zwey bringen, deren einer kleiner, der andere größer als die Quadratwurzel der Zahl iſt, den Fall einer rationalen Wurzel bey Seite geſetzt. Durch die angegebenen Diviſionen findet man entweder jenen kleinern Factor ſelbſt oder einen ſeiner Factoren. Findet man keinen Factor, ſo muß die vorgegebene Zahl eine Primzahl ſeyn. Man muß ſuchen, durch Ausſchließungen die Menge der Diviſionen zu vermindern. S. Theiler der Zahlen.

3. Daß es wenigſtens nicht leicht möglich ſey, eine allgemeine Form der Primzahlen zu finden, iſt begreiflich. Unſere Zahlen ſind Glieder vieler arithmetiſchen Reihen, als:

0,	2,	4,	6,	8,	10.	. .
0,	3,	6,	9,	12,	15.	. .
0,	5,	10,	15,	20,	25.	. .
0,	7,	14,	21,	28,	35.	. .
0,	11,	22,	33,	44,	55.	. .

u. ſ. f.

Die Zahlen der erſten Columne ſind die Primzahlen. Es ſind diejenigen, welche man in den übrigen Reihen nicht findet, wenn man in der natürlichen Ordnung fortzählet. Dieſe Lücken entſtehen bald da bald hier. Die Zahlen in den Verticalreihen nach der erſten ſind ſolche, welche zwey oder mehrern Reihen gemeinſchaftlich ſind. Dieſes Zuſammentreffen kann auf die mannigfaltigſte Art geſchehen, das Gegentheil daher auch. Die Reihen kann man ſich als ein Fortſchreiten auf einer geraden Linie mit den Intervallen 2, 3, 5, 7, ꝛc. vorſtellen, wobey die meiſten Puncte zwey oder mehremahle getroffen werden, einige nur einmahl. Die Intervalle von dem Anfangspuncte 0 bis zu einem der letztern ſind die Intervalle der verſchiedenen Fortſchreitungen.

4 Um die Primzahlen auszuſondern, nehme man blos die Fortſchreitung der Zahlen, die durch 2, 3, 5 nicht theilbar ſind. Denn die durch dieſe Zähler theilbaren geben ſich auf den erſten Blick zu erkennen. Man multiplicire alle durch 7 ſo weit man es für nöthig findet, dann alle von 11 an durch 11; alle von 13 an durch 13; alle von 17 an durch 17 u. ſ. f. Diejenigen Zahlen, welche ſich unter den Producten nicht finden, ſind Primzahlen.

5. Es iſt ſehr leicht die Fortſchreitung jener durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen hinzuſchreiben. Sie zerfällt in Perioden von 8 Ziffern, welche in jeder Periode um 30 von den gleichſtelligen der nächſt vorhergehenden verſchieden ſind, nämlich

1,	7,	11,	13,	17,	19,	23,	29.
31,	37,	41,	43,	47,	49,	53,	59.
61,	67,	71,	73,	77,	79,	83,	89.
91,	97,	101,	103,	107,	109,	113,	119.

u. ſ. f.

Die Multiplication durch 7 giebt die zuſammengeſetzten Zahlen 49, 77, 91, 119, ꝛc. durch 11 die Zahlen 121, 143, 187, 209, ꝛc. durch 13 die Zahlen 169, 221, 247, 299, ꝛc. u. ſ. f.

6. Dieſe Multiplicationen laſſen ſich leicht in ein Addiren verwandeln, bey den erſten acht, indem man das Product aus dem Multiplicator in die Unterſchiede der obigen Reihe zu dem ſchon gefundenen Producte addirt; weiterhin aber ſucceſſiv nur das beſtändige Product aus 30 in den Multiplicator zufügt, wie in dem folgenden Exempel, wo die Producte aus 13 in die Glieder der obigen Reihe von 13 an verzeichnet ſind.

	0	30	60	90
13	169	559	949	1339
17	221	611	1001	1391
19	247	637	1027	1417
23	299	689	1079	1469
29	377	767	1157	1547
31	403	793	1183	1573
37	481	871	1261	1651
41	533	923	1313	1703

Die Zahlen, die über den Columnen ſtehen, mit den an der Seite beygeſetzten zuſammengenommen, geben den andern Factor zu der in dem zugehörigen Winkelfache befindlichen Zahl.

Trägt man nun die Producte in eine Tafel der durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen, und zerlegt ſie entweder in alle ihre einfachen Factoren, oder zeichnet nur den kleinſten an, ſo bleiben für die Primzahlen die leeren Plätze übrig.

7. Euler hat in dem 19ten Bande der Petersburger neuen Commentarien eine Methode angegeben, wie man eine Tafel der Primzahlen verfertigen könne, worin zugleich die kleinſten Theiler der zuſammengeſetzten Zahlen ſich finden. Das Verfahren iſt etwas anders als das vorher gewieſene. Jede der 8 Zahlen, 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 werde durch r bezeichnet, ſo iſt die Form der

durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen dieſe, 30 q + r, wo q jede der natürlichen Zahlen, auch 0, bezeichnet. Um alle durch 13 theilbare Zahlen, von 13. 13 an zu haben, ſuche man erſtlich den Werth von r für dieſe Zahl oder 169 = 30. 5 + 19, wo alſo r = 19 iſt. Nun addire man ſucceſſiv 2n. 13. wo n nach der Reihe 1, 2, 3, ꝛc. iſt. Denn ungerade Vielfache von 13 würden gerade Zahlen geben, die wir nicht nöthig haben. So oft als das Vielfache von r über 30 ſteigt, wird 30 davon genommen, und zu dem Vielfachen von 30 oder 30 q geſchlagen. Nun macht man ſich eine Tafel, worin an der Seite die Werthe von q ſtehen, und in die Quere die Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. In die Winkelfächer trage man für die zuſammengehörigen Werthe von q und r den Diviſor 13, und ſo für jede andere zum Diviſor genommene Zahl. Wenn r eine andere als eine der obigen acht Zahlen iſt, ſo wird dieſe Zahl überſchlagen, da der zugehörige Dividendus alsdann unter die durch 2, 3, 5 theilbaren Zahlen gehört. Die Dividenden braucht man nicht zu kennen, nur die Werthe von q und r, woraus ſich nachher die Dividenden ſelbſt ergeben. Bey dem Diviſor 13 ſind die zuſammengehörigen

r	19, 15, 11, 7, 3, 29, 25, 21. etc.
q	5, 6, 7, 8, 9, 9, 10, 11. etc.

Die Werthe 15, 3, 25, 21 von r geben Vielfache von 13, die durch 5, 3, 5, 3 theilbar ſind.

8. Hindenburg hat in einer beſondern Schrift: Beſchreibung einer neuen Art, nach einem bekannten Geſetze fortgehende Zahlen durch Abzählen oder Abmeſſen zu finden, Leipzig, 1776, unter andern gewieſen, wie man durch mechaniſche Hülfsmittel ſich die Ausſuchung der einfachen Zahlen erleichtern kann.

9. Die Primzahlen findet man nach der Reihe in den Tafeln der Factoren ganzer Zahlen, bey den leeren Plätzen ohne Theiler, ſ. Theiler der Zahlen. Eine beſondere Tafel derſelben allein bis zu der 101999 iſt in Lamberts Zuſätzen zu den logar. und trigon. Tafeln enthalten. Unrichtig ſind daſelbſt als Primzahlen angegeben: 101519;

101549; 101579; 101851; 101993, welche nach ihrer Folge durch 11, 7, 157, 179, 569, 29 theilbar ſind. Hinzuzuſetzen ſind als Primzahlen 91183; 101279.

Einiges allgemeine über Primzahlen.

10. Jede Primzahl hat eine der Formen $6m \pm 1$, ausgenommen 2 und 3. Denn die übrigen Formen $6m \pm 2$ und $6n \pm 3$ ſind theilbar. Man darf aber den Satz nicht umkehren.

11. Jede Primzahl hat eine der Formen, $8m \pm 1$ und $8m \pm 3$. Denn die übrigen Formen dieſer Gattung ſind durch 2 theilbar. Allein der Haufe der theilbaren Zahlen, die unter dieſen vier Formen begriffen ſind, iſt zu groß, als daß die Bemerkung von Nutzen ſeyn könnte.

12. Fermat hat behauptet, daß die Zahlen von der Form $a^m + 1$, wenn m eine Potenz der 2 iſt, alle Primzahlen ſeyn. Einen Beweis könne er nicht geben, halte ſich aber davon ſicher überzeugt. (Epist. ad Digby, in Wallisii Opp. T. II. pag. 858). Es trifft zu bey allen Zahlen, die nicht über fünf Ziffern enthalten, z. B. $2^2 + 1$; $2^4 + 1$; $2^8 + 1$; $2^{16} + 1$ ($= 5$; 17; 257; 65537), aber bey der Zahl $2^{32} + 1 = 4294967297$ nicht, als welche durch 641 theilbar iſt. Eulerus, de theoremate quodam Fermatiano, Comm. Ac. Petrop. vet. T. VI.

13. Fermat verſichert a. a. O. er könne beweiſen, daß jede Primzahl von der Form $4n + 1$ die Summe zweyer Quadrate iſt. Sein Beweis iſt nicht bekannt. Man hatte ſich viele Mühe gegeben, den Beweis zu finden; Euler beſchäftigte ſich damit in den Comm. Ac. Petr. novis, T. IV., de numeris, qui sunt aggregata duorum quadratorum, kam aber noch nicht ganz damit zu Stande; allein in dem folgenden Bande vollendete er den Beweis.

14. In dem gedachten Schreiben theilt Fermat noch folgende Sätze mit. Eine jede Primzahl von der Form $3n + 1$ (d. i. $6n + 1$, weil n nicht ungerade ſeyn kann)

beſteht aus einem Quadrate und dem dreyfachen eines andern Quadrats, oder hat die Form aa + 3 bb. In den neuen Petersburger Commentarien T. VIII, p. 125 hat Euler den Satz erwieſen, welches er in einer Abhandlung T. VI. p. 221 noch nicht vermochte.

Ferner: Eine jede Primzahl von der Form 8 n + 1 oder 8 n + 3 beſteht aus einem Quadrate und dem doppelten eines andern Quadrats; oder hat die Form aa + 2 bb. Euler hat es aus einer Induction von den Primzahlen bis 499 beſtätigt. Comm. Petr. novi, T. VI. p. 193, mit der Bemerkung, daß die Zerlegung in Quadrate nur auf eine einzige Art angeht.

15. Von dem folgenden Satze, ſagt Fermat, könne er keinen Beweis geben: Das Doppelte einer jeden Primzahl von der Form 8 n — 1 beſtehe aus drey Quadraten.

Auch: Das Product zweyer Primzahlen von der Form 4 n + 3 mit den Endziffern 3 oder 7 habe immer die Form aa + 5 bb.

16. In ſeinen Werken, aber in einem Briefe von Frenicle, kommt noch der Satz vor: Alle Primzahlen von der Form 8 n ± 1 haben die Form aa — 2 bb.

17. In dem 14ten Bande der ältern Petersburger Commentarien S. 151 ff. hat Euler eine große Menge von Lehrſätzen über die Formen der Primzahlen $m\alpha + \beta$ vorgetragen, welche zugleich die Form paa ± qbb haben.

18. Die ungerade Summe zweyer Quadrate, die unter ſich Primzahlen ſind, iſt eine Primzahl, wenn ſie nicht in zwey andere Quadrate zerlegt werden kann. Euler in den neuen Petersb. Comment. T. IV.

19. Die Formel $a^{p-1} - 1$, wo p eine Primzahl, und kein Factor von a iſt, iſt durch p theilbar. Dieſer Satz, den Fermat auch gefunden hat, wird in der höhern Arithmetik ſehr geſchätzt. Euler hat den Beweis gegeben, zuerſt in den ältern Petersb. Commentarien, T. VIII. p. 143. Hernach in den neuen, T. VII. p. 70. Bald darauf hat er den Satz noch erweitert, in denſ. Comment. T. VIII. p. 102.

20. **Waring** hat in ſeinen Meditationibus algebraicis, Cantabr. 1770, folgenden Satz, aber ohne Beweis, mitgetheilt. Wenn n eine Primzahl iſt, ſo iſt die Zahl 1. 2. 3. 4. 5.... (n—1) + 1 durch n theilbar. Er ſchreibt die Entdeckung dem **John Wilſon** zu. **la Grange** hat zwey Beweiſe davon gegeben, in den Mém. de l'Ac. de Berlin, a. 1771. Der Satz hängt mit dem gleich vorher angeführten zuſammen.

21. In demſelben Werke von Waring ſind noch einige hieher gehörige Sätze ohne Beweis aufgeſtellt, welchen la Grange a. a. O. giebt.

Einer iſt dieſer: wenn drey Primzahlen in arithmetiſcher Progreſſion ſind, ſo iſt ihr Unterſchied durch 6 theilbar, wenn nicht eine derſelben die Zahl 3 iſt.

Ein ähnlicher iſt: wenn fünf Primzahlen in arithmetiſcher Progreſſion ſind, ſo iſt ihr Unterſchied durch 30 theilbar, wenn nicht eine von ihnen 5 iſt. — Dieſen Sätzen laſſen ſich noch mehrere analoge zugeſellen.

22. **La Grange** hat in den Mém de l'Acad. de Berlin, 1773. Unterſuchungen über die Zahlen von der Form $Bt^2 + Ctu + Du^2$ und die Formen ihrer Theiler angeſtellt. Davon macht er in der Fortſetzung für 1775 Gebrauch, um die Theiler gegebener Zahlen zu finden. Es iſt eine Ausſchließungsmethode, vermittelſt deren man nur nöthig hat, Theiler von gewiſſen Formen zu verſuchen, z. B. bey der Zahl 10001 nur die Zahlen von der Form 8n + 1.

In eben dieſer Fortſetzung ſind 36 Sätze über die Formen der Primzahlen aufgeſtellt, welche zugleich die Form $py^2 \pm qz^2$ haben.

23. In demſelben Bande für 1775 hat **Beguelin** eine Abhandlung über die Aufgabe geliefert, wie man Primzahlen finden könne, die größer als eine gegebene Zahl ſind. Es kommt darauf an, in der Formel 4ppxx + 1 diejenigen x auszuwählen, welche ſie zu einer Primzahl machen. Es iſt z. B. $4(18)^2 + 1 = 1297$; $4(20)^2 + 1 = 1601$; $4(27)^2 + 1 = 2917$; $4(28)^2 + 1 = 3137$.

24. Kraft hat in den Novis Actis Petrop. T. XII. noch einen Verſuch über die Primzahlen geliefert. Jede Zahl von der Form $6m+1$ iſt eine Primzahl, wenn m weder unter der Form $6xy+x+y$, noch unter der Form $6xy-x-y$ begriffen iſt. Auch iſt jede Zahl von der Form $6m-1$ eine Primzahl, wenn m nicht unter der Form $6xy+x-y$ enthalten iſt. Man muß für die nach der Reihe angenommenen Werthe von x und y die nach dieſen Formeln hervorgehenden Werthe von m ſuchen; dieſe geben keine Primzahlen. Alle andere Werthe von m geben ſolche. Die Methode iſt demnach eine ausſchließende, welche übrigens ſehr bequem zu ſeyn ſcheint.

25. Euler, der ſich früh viel mit den Primzahlen beſchäftigt hat, ſuchte auch in der Folge wenigſtens etwas für die Auffindung großer Primzahlen zu leiſten, da allgemeine Charaktere ſich nicht finden laſſen. In den neuen Petersburger Commentarien, T. IX. gab er eine Methode an, alle theilbare Zahlen von der Form $aa+1$ vortheilhaft zu finden, wodurch die übrigen von dieſer Form als Primzahlen erkannt werden. Die Zahlen von jener Form haben keine andere Theiler als ſolche, die ſelbſt aus zwey Quadraten beſtehen. Da nun keine Zahl von der Form $4n-1$ eine Summe von zwey Quadraten iſt, die Primzahlen von der Form $4n+1$ aber eine ſolche Summe ſind, ſo ſind nur die einfachen Theiler von der Form $4n+1$ zu verſuchen.

26. In den neuen Petersb. Commentarien, T. XIII. über die Prüfung ſehr großer Zahlen, betrachtet Euler blos die Primzahlen von der Form $4n+1$. Von einer ſolchen ziehe man ſucceſſiv die Quadratzahlen, welche kleiner als dieſe Zahl ſind, ab, und bemerke ſich die Reſte, welche Quadrate ſind. Iſt die Zahl nur auf eine einzige Art die Summe zweyer Quadrate, ſo iſt ſie eine Primzahl, ſonſt aber nicht. Bey großen Zahlen iſt auf Mittel zu denken, die Anzahl der Abziehungen zu vermindern.

27. Der Satz, daß jede Zahl von der Form $4n+1$, welche nur auf eine einzige Art in zwey Quadrate, die unſ-

ter ſich Primzahlen ſind, aufgelöſet werden kann, gewiß eine Primzahl ſey, wie Euler in den Comment. novis Petrop. T. IV. p. 27. erwieſen haben will, wovon er auch hier (26.) Gebrauch macht, leidet Ausnahmen. Die Zahl 25 iſt nur in die Quadrate 16 und 9 zerlegbar, und doch keine Primzahl. So iſt auch die Zahl 289, das Quadrat von 17, nur in die Quadrate 64 und 225 aufslösbar. Die ſchwache Stelle in dem Beweiſe, den Euler a. a. O. giebt, iſt dieſe, daß 4n + 1 = (aa + bb) (cc + dd) ſeyn ſoll, und daß dabey nur der Fall beachtet wird, wenn beide Factoren ungleich ſind. Dem Satze muß alſo die Einſchränkung beygefügt werden, wenn 4n + 1 nicht ſelbſt ein Quadrat iſt.

In den neuen Actis Petrop. T. XII. über die Zahlen von der Form mxx + nyy, die zur Erforſchung der Primzahlen dienen können, und merkwürdige Eigenſchaften haben, bemerkt Euler, daß alle Zahlen, welche nur auf eine einzige Art in zwey Quadrate zerlegt werden können, Primzahlen ſind, nur mit der Einſchränkung, daß beide Quadrate ungerade Zahlen, und, wie es ſich von ſelbſt verſteht, unter ſich Primzahlen ſeyn.

Prisma, ein geometriſcher Körper, begränzt von Ebenen, deren zwey einander gegenüber liegende gleich und ähnlich, auch parallel, die übrigen Parallelogramme ſind. Das griechiſche Stammwort, πριειν, heißt mit einer Säge zerſchneiden.

Die Prismen werden nach der Anzahl der Ecken in den Grundflächen, oder der Seitenlinien (Kanten), welche in zwey Seitenflächen gemeinſchaftlich ſind, benamt, dreyeckiges, viereckiges, u. ſ. f. oder dreyſeitiges, vierſeitiges ꝛc. Parallelepipedum und Würfel ſind darunter als eine Art und Unterart begriffen. Ein reguläres Prisma iſt ein ſolches, deſſen Grundflächen reguläre Vielecke ſind.

Ein ſenkrechtes Prisma iſt, deſſen Seitenlinien ſenkrecht auf die Grundfläche ſtehen.

Die Höhe eines Prisma iſt der ſenkrechte Abſtand der beiden Grundflächen.

Prismen verhalten ſich zu einander zuſammengeſetzt wie die Grundflächen und Höhen, oder arithmetiſch, wie die Producte aus den Grundflächen in die Höhen.

Ein dreyſeitiges Prisma läßt ſich in drey gleich große Pyramiden zerlegen.

Ähnliche Prismen verhalten ſich wie die Würfel der gleichnamigen Seitenlinien ihrer Grundflächen, oder wie die Würfel ihrer Höhen.

In der Dioptrik bedeutet Prisma ein dreyſeitiges.

Prismoid iſt ein Körper, deſſen Grundflächen parallele geradlinichte Figuren von gleichvielen Seiten, aber unähnliche ſind. Die Seitenlinien oder Kanten ſind ſich einander, keine oder nicht alle parallel, wie ſie es in dem Prisma ſind. Die Folge der parallelen Durchſchnitte muß als ſtetig gedacht werden.

Probabilität, ſ. Wahrſcheinlichkeit.

Probe, ſ. Rechnungsprobe.

Problem, ſ. Aufgabe.

Product iſt die Größe, welche aus der Multiplication zweyer oder mehrerer Zahlen entſteht. Wie ein Product numeriſcher Größen gefunden wird, lehrt die gemeine Arithmetik, ſ. Multiplication. Für allgemeine Größen, als Zahlen betrachtet, zeigt es die Buchſtabenrechnung, für Reihen insbeſondere die Combinationslehre, ſ. combinatoriſche Analyſis, 5. Auch Hindenburgii Infinitinomii dignitatum . . . formulae §. XXVII, und eine Hülfstafel dazu in der Methodo nova serierum, p. LXX. ſſ.

1. Das Product $(1 - z^2)(1 - \frac{1}{4}z^2)(1 - \frac{1}{9}z^2)$ etc. iſt $= \frac{\sin \pi z}{\pi z}$, und das Product $(1 - z^2)(1 - \frac{1}{9}z^2)(1 - \frac{1}{25}z^4)$. eto. $= \cos. \frac{1}{2}\pi z$, aus Cyklometrie, 26, wenn daſelbſt für φ geſetzt wird πz und $\frac{1}{2}\pi z$.

9. Das Product $(1 + z^2)(1 + \frac{1}{4}z^2)(1 + \frac{1}{9}z^2)$, etc. iſt $= \frac{e^{\pi z} - e^{-\pi z}}{2\pi z}$, und das Product $(1+z^2)(1 + \frac{1}{9}z^2)(1 + \frac{1}{25}z^2)$. etc. $= \frac{1}{2}(e^{\pi z:2} + e^{-\pi z:2})$.

Denn es iſt

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1..4} + \text{etc.}$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1..4} - \text{etc.}$$

(Logarithmus, 29. 39.). Daher iſt

$$\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1..5} + \text{etc.} \quad (A).$$

$$\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} + \text{etc.} \quad (B).$$

Die Reihe (A) verwandelt ſich, wenn $x\sqrt{-1}$ ſtatt x geſetzt, und alles durch $\sqrt{-1}$ dividirt wird, in die Reihe für sin x, und dieſe iſt gleich dem Producte $x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)$. etc. oder, wenn πz ſtatt x geſetzt wird, dem Producte $\pi z(1 - z^2)(1 - \frac{1}{4}z^2)$. etc. Daher iſt rückwärts, wenn in dieſem Producte $z\sqrt{-1}$ ſtatt z geſetzt, und es durch $\sqrt{-1}$ dividirt wird, das Product $\pi z(1 + z^2)(1 + \frac{1}{4}z^2)(1 + \frac{1}{9}z^2)$. etc. = A.

Die Reihe (B) verwandelt ſich, wenn $x\sqrt{-1}$ ſtatt x geſetzt wird, in die Reihe für cos x, welche dem Producte $\left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)$. etc. gleich iſt, oder, wenn $\frac{1}{2}\pi z$ ſtatt x geſetzt wird, dem $(1 - z^2)(1 - \frac{1}{9}z^2)(1 - \frac{1}{25}z^2)$. etc. Daher iſt rückwärts, wenn in dieſem Producte $z\sqrt{-1}$ ſtatt z geſetzt wird, das Product $(1 + z^2)(1 + \frac{1}{9}z^2)(1 + \frac{1}{25}z^2)$. etc. = B.

3. Das Product $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)$ $(1-x^4)$. etc. iſt $= 1 - x^1 - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + x^{51} +$ etc. wo die Exponenten die Form $\frac{3nn \pm n}{2}$ haben.

Euler hat die Entwickelung dieſes Products auf zweyerley Art gezeigt in den Actis Ac. Petrop. T. IV. P. I. a. a. 1780. Durch die gemeine Multiplication mit jedem Factor nach der Reihe wird das Geſetz nicht erhalten.

Progreſſion iſt überhaupt eine Reihe von Größen, die nach einem gewiſſen Geſetze auf einander folgen. Insbeſondere gebraucht man den Ausdruck von einer Reihe Größen, worin jede die mittlere proportionale zwiſchen der nächſt vorhergehenden und folgenden iſt. Iſt das Verhältniß je zweyer nächſten ein arithmetiſches, ſo iſt die Progreſſion eine arithmetiſche; iſt es ein geometriſches, ſo iſt ſie eine geometriſche, ſ. die Artikel, arithmetiſche und geometriſche Reihe.

Projection, Entwerfung, iſt die Abbildung eines Gegenſtandes auf einer Fläche, durch gerade Linien, welche ſich entweder parallel ſind, oder nach einem gegebenen Puncte zuſammen laufen. Die Puncte, in welchen die geraden Linien die Entwerfungsfläche treffen, geben die Projection oder das Bild des Gegenſtandes.

1. Der Fall, da die Entwerfungslinien in einem Puncte zuſammen kommen, wird in der Perſpectiv betrachtet, deren allgemeine Verfahrungsarten oben erklärt ſind.

2. Zwey perſpectiviſche Entwerfungsarten kommen bey der Zeichnung der Himmelscharten und der geographiſchen vor. Man ſetze das Auge in den Mittelpunct einer Kugel, und ziehe von demſelben nach jedem Puncte der Oberfläche gerade Linien, welche eine die Kugel berührende Ebene treffen. Dieſe iſt die Entwerfungsebene. Alle großen Kreiſe werden darauf durch gerade Linien abgebildet; alle kleinern Kreiſe durch Kreiſe, Ellipſen, oder einen an-

dern Kegelſchnitt. Denn dieſe kleinern ſind die Grundflächen von Kegeln, deren Scheitelpunct das Auge iſt, und welche von der Entwerfungsebene geſchnitten werden. Nur wenn die Ebene eines kleinern Kreiſes der Entwerfungsebene parallel iſt, iſt die Projection wieder ein Kreis. Dieſe Projection dient beſonders für Himmelscharten. Sie heißt die centrale.

3. Die ſtereographiſche Projection iſt eine perſpectiviſche Entwerfung der Kugelfläche auf die Ebene eines großen Kreiſes, nach deſſen einem Pole die Entwerfungslinien gezogen werden, ſ. ſtereographiſche Projection.

4. Die halbe Kugelfläche wird auch auf die Oberfläche eines ſenkrechten eingeſchriebenen Kegels entworfen, durch Linien, welche entweder nach dem gemeinſchaftlichen Mittelpuncte der Kugel und der Grundfläche des Kegels, oder nach dem jenſeitigen Endpuncte des Durchmeſſers gezogen werden. Dieſe Projection giebt die Sternkegel. Die Übertragung der Puncte von der Kugel auf die Kegelfläche geſchieht entweder unmittelbar durch Linien, die in der Ebene eines Quadranten (oder Halbkreiſes) und einem Durchſchnitte des Kegels durch die Axe gezogen werden, oder durch eine leichte trigonometriſche Proportion.

5. Wenn die Entwerfungslinien ſenkrecht auf die Ebene der Tafel (der Entwerfungsebene) ſtehen, ſo heißt die Entwerfung eine orthographiſche (ὀρθος gerade, γραφειν zeichnen, ſchreiben). Sie wird vorzüglich bey Bauriſſen, Grubenriſſen und Abbildungen von Maſchinen angewandt.

6. Die Entwerfungslinien mögen aber auch unter einem gegebenen ſchiefen Winkel gegen die Tafel geneigt ſeyn. Doch iſt für die Ausübung die orthographiſche Projection viel bequemer. In gewiſſen Fällen, wo man horizontale und lothrechte Flächen in einem Abriſſe zugleich will erſcheinen laſſen, pflegt man den Entwerfungslinien eine Neigung von 45° gegen die Tafel zu geben, welche man horizontal oder vertical ſich gedenken mag. Dadurch erſcheinen die horizontalen wie die lothrechten Linien unverkürzt. Nur wird durch die ſenkrechten Gegenſtände ein

Theil von der hinter ihnen liegenden niedrigern Fläche verdeckt. Bey Feſtungsriſſen kommt dieſe Entwerfungsart bisweilen vor, auch wol bey Grundriſſen von Gebäuden.

7. Die gnomoniſche Projection iſt auch eine ſolche. Die Entwerfungslinien ſind mit der Axe des Himmels parallel. Die Linien, welche entworfen werden, ſind die Stundenlinien und ähnliche auf der Ebene des Aequators, welche in einem Puncte der Axe zuſammenſtoßen; die entworfenen Linien ſind die Stundenlinien auf der Uhrfläche, welche die Tafel iſt.

Sätze und Aufgaben über die orthographiſche Projection.

8. Eine gerade Linie, die in der Richtung der Entwerfungslinien liegt, erſcheint in der Projection wie ein Punct.

9. Eine gerade Linie, die parallel mit der Entwerfungsebene iſt, wird durch eine ihr gleiche abgebildet.

10. Iſt ſie geneigt gegen die Entwerfungsebene, ſo verhält ſie ſich zu ihrer Entwerfung wie der Sinus totus zu dem Coſinus des Neigungswinkels gegen die Ebene der Tafel.

11. Eine Ebene, die auf die Tafel ſenkrecht (oder überhaupt parallel mit den Entwerfungslinien) iſt, erſcheint wie eine gerade Linie. Ihr Bild iſt ihr Durchſchnitt mit der Tafel.

12. Iſt die Ebene der Tafel parallel, ſo iſt die Abbildung einer jeden darauf gezeichneten Figur dieſer gleich und ähnlich.

13. Iſt ſie gegen die Tafel geneigt, ſo verhält ſich eine darauf gezeichnete Figur zu ihrer Abbildung dem Inhalte nach wie der Sinus totus zu dem Coſinus des Neigungswinkels. Denn alle in der Figur auf den Durchſchnitt ihrer Ebene mit der Tafel ſenkrechte werden in demſelben Verhältniſſe vermindert, dagegen die damit parallelen unverändert bleiben. Iſt die Figur eine geradlinichte, ſo kann ſie durch jene erſtern Linien in Trapezia getheilt

werden, welche zu ihren Projectionen in dem gedachten Verhältniſſe ſtehen, daher die ganzen Figuren eben das Verhältniß haben. Iſt die Figur eine krummlinichte, ſo ſtehen die Differentiale der Fläche, wenn die Ordinaten nach einer auf den Durchſchnitt mit der Tafel ſenkrechten Richtung gezogen werden, in jenem Verhältniſſe, und daher die Flächen auch.

14. Stellt man drey Projectionsebenen rechtwinklicht zuſammen, ſo iſt die Summe der Quadrate von den Projectionen einer Figur auf jeder Ebene ſo groß als das Quadrat der Figur ſelbſt. Der Beweis gründet ſich auf einen Satz in dem Artikel, Pyramide, 22. Die Quadrate ſind arithmetiſch zu nehmen.

15. Die auf der geneigten Ebene gezeichnete Figur ſey ein Kreis. Der Durchmeſſer, welcher mit der Tafel parallel iſt, bleibt in der Projection ungeändert; der Durchmeſſer, welcher auf dieſen ſenkrecht iſt, wird nach dem Verhältniſſe des Sinus totus zu dem Coſinus des Neigungswinkels gegen die Tafel verkleinert. Alle dieſem Durchmeſſer parallelen Chorden werden in demſelben Verhältniſſe verkürzt. Hieraus ergiebt ſich auch, daß die Projection des Kreiſes eine Ellipſe iſt, ſ. Ellipſe, 5.

16. Zu einer orthographiſchen Abbildung eines Gegenſtandes werden zwey Tafeln erfordert, die auf einander ſenkrecht ſind, deren eine die horizontale, die andere die verticale heiße. Es mag auch oft noch eine dritte erforderlich ſeyn, die auf jede dieſer beiden ſenkrecht ſteht, um den Gegenſtand von oben, von vorn und von der Seite darzuſtellen In der That muß dieſe letztere gedacht werden, wenn die Projection auf derſelben auch nicht gezeichnet wird. Denn die Lage eines Punctes im Raume zu beſtimmen werden drey Coordinaten erfordert. Der Durchſchnitt der horizontalen und der einen verticalen Ebene ſey die Axe der Abſciſſen, x, der Durchſchnitt mit der zweyten verticalen die Axe der Ordinaten y, und der Durchſchnitt beider verticalen Ebenen die Axe der z, ſo geben für irgend einen Punct die Coordinaten x, y den relati-

den Ort des Punctes auf der horizontalen Ebene an, und die Coordinaten x, z den relativen Ort auf der verticalen Ebene, das iſt die Projectionen deſſelben.

Die Durchſchnittslinie der beiden Entwerfungsebenen, der horizontalen und der erſten verticalen, heiße auch hier die **Grundlinie.**

17. Die Projection einer geraden Linie auf beiden Tafeln zu zeichnen muß man ſuchen, die Lage zweyer auf ihr befindlichen Puncte zu beſtimmen, deren Projectionen diejenigen der geraden Linie auf beiden Entwerfungsebenen geben.

18. Die Projectionen von parallelen Linien auf dieſelbe Tafel ſind ſich parallel.

19. Wenn die Projectionen einer geraden Linie auf beiden Tafeln gegeben ſind, ſo liegen die Puncte P, Q, wo ſie die horizontale und die verticale trifft, in den Perpendikeln auf die Grundlinie durch die Puncte, wo die verticalen und horizontalen Projectionen der Linie ſie ſchneiden. — Umgekehrt geben die Puncte P, Q die beiden Projectionen der geraden Linie.

20. Die Projection einer gegen die Tafel geneigten Ebene verbreitet ſich über ihre ganze Fläche. Doch iſt es, um ihre Lage mittelſt der Projection zu erkennen, hinlänglich, wenn ihre Durchſchnittslinien mit den beiden Tafeln gezeichnet ſind, da eine Ebene durch zwey in ihr befindliche gerade beſtimmt iſt. Die Neigung der Ebene gegen die horizontale Tafel und der Winkel der Durchſchnittslinie beider mit der Grundlinie giebt den Winkel, welchen die Durchſchnittslinie der Ebene und der verticalen Tafel mit der Grundlinie macht. So auch, wenn die beiden Tafeln verwechſelt werden. Dieſes wird die ſphäriſche Trigonometrie durch Rechnung zeigen. Daſelbſt wird auch gewieſen, wie es durch Zeichnung gefunden werden kann.

21. Die Durchſchnitte zweyer parallelen Ebenen mit jeder der beiden Tafeln ſind ſich parallel.

22. Wenn zwey Ebenen durch ihre Durchſchnitte AA, Aa der einen, und BB, Bb der andern mit den beiden Tafeln gegeben werden, ſo ſind dadurch auch die Projectionen ihrer Durchſchnittslinie beſtimmt. Denn es ſind nun die Puncte gegeben, in welchen dieſe Linie die beiden Tafeln trifft. Der eine iſt der Durchſchnittspunct der Linien AA, BB auf der einen Tafel, der andere der Durchſchnittspunct der Aa, Bb auf der andern.

23. Die Projectionen eines Punctes, der drey Ebenen gemeinſchaftlich iſt, zu finden, müſſen die Projectionen der Durchſchnittslinie zweyer derſelben geſucht werden; dann die Projectionen der Durchſchnittslinie der dritten Ebene mit einer der beiden andern, ſo geben dieſe Projectionen, auf jeder der beiden Tafeln, jede durch ihren Durchſchnittspunct die Projectionen des Punctes, der den drey Ebenen gemeinſchaftlich iſt. Der Fall, da die drey Ebenen in einer geraden ſich ſchneiden, macht die Aufgabe zur unbeſtimmten.

24. Die Projectionen des Punctes zu finden, in welchem eine gegebene gerade Linie eine gegebene Ebene E trifft, ziehe man erſtlich die Projectionen jener LL, ll, auf der horizontalen und verticalen Tafel, und die Durchſchnitte der Ebene mit denſelben. Dann ſuche man die Projection der Durchſchnittslinie der über LL lothrechten Ebene mit der Ebene E auf der verticalen Tafel (22.). Auf dieſer liegt die eine geſuchte Projection; eben dieſe liegt aber auch auf der Projection ll; alſo in dem Durchſchnittspuncte beider Linien. Von dieſem Puncte ziehe man eine ſenkrechte auf die Grundlinie bis an die horizontale Projection LL, ſo iſt der Durchſchnittspunct beider die geſuchte Projection auf der horizontalen Tafel.

25. Eine Ebene ſchneide die horizontale Tafel in der Linie AA; mit dieſer werde eine parallele aa auf derſelben gezogen, ſo iſt dieſe die Projection einer auf der Ebene ſelbſt mit AA parallelen. Die Höhe dieſer, auch der Tafel parallelen, über aa iſt die ſenkrechte auf

die Grundlinie in ihrem Durchſchnittspuncte mit a a bis an die Durchſchnittslinie B B der Ebene mit der verticalen Tafel. Dadurch laſſen ſich die Projectionen jedes Punctes der Ebene angeben.

26. Es laſſen ſich noch manche Aufgaben über die Lage von Puncten, Linien und Ebenen durch Conſtructionen auf den beiden Tafeln auflöſen, welche aber hier zu weit führen würden. Man findet einen vollſtändigen und ſchönen Unterricht darüber in den Essais de Géométrie sur les plans et les surfaces courbes (élémens de Géométrie descriptive) par Lacroix, sec. ed. à Paris, 1802. Es befinden ſich darin auch Unterſuchungen über Durchſchnitte der Körper, Abwickelung krummer Oberflächen und berührende Ebenen, nebſt einem kurzen Begriff der Perſpectiv, alles durch Conſtructionen auf zwey Ebenen ausgeführt.

Prolata (oblonga) sphaeroides, ein Sphäroid, das durch die Umdrehung einer Ellipſe um die große Axe entſteht.

Proniſche Zahl iſt die Summe einer Zahl und ihres Quadrats oder ihres Cubus, oder ihres Biquadrats, nämlich $a + a^2$; $a + a^3$; $a + a^4$. Die alten Algebraiſten, als Cardan, unterſchieden dieſe Formen der Zahlen, welches wir gar nicht nöthig finden, ſelbſt mit beſondern Namen, pronicum minus, medium, maius. Sie hätten auch noch zu höhern Potenzen ſteigen, und die Potenz ſubtractiv nehmen können.

Proportion, ſ. Verhältniß.

Proportionale Spirale iſt die logarithmiſche, ſ. Spirale.

Proportionallineal, ſ. den folgenden Artikel.

Proportionalzirkel (Circinus proportionum, Compas de proportion, engl. Sector) iſt ein geometriſches Inſtrument, welches aus zwey gleichen Linealen beſteht, die wie die Schenkel eines Zirkels mit einander verbunden und um einen Punct beweglich ſind. Auf den

Linealen ſind gerade Linien aus dem Mittelpuncte der Bewegung getragen, die nach verſchiedenen Verhältniſſen eingetheilt ſind, paarweiſe, auf jedem Lineale eine. Jede dieſer getheilten Linien iſt ein Maßſtab, welcher die Stelle einer Tabelle vertritt, in dem die beygeſetzten Zahlen gewiſſe zu den Längen der Linien gehörige Größen bedeuten. Dazu kommen oft noch Linien an dem äußern Rande parallel mit denſelben. Dieſe dienen ſchlechthin als Maßſtäbe.

1. Die arithmetiſche Linie (linea partium aequalium) iſt eine in gleiche Theile eingetheilte Linie, worauf die beygeſetzten Zahlen die Längen von dem Mittelpuncte der Bewegung oder Theilung angeben.

2. Die geometriſche Linie (linea planorum, quadratorum) giebt durch die Zahlen der Eintheilung die Quadrate der Längen an, wo das Quadrat der Länge 1 zur Einheit dient. Die Längen verhalten ſich wie die Quadratwurzeln der beygezeichneten Zahlen.

3. Die cubiſche Linie (linea stereometrica, solidorum) giebt durch die Zahlen der Eintheilung die Würfel der Längen an, ſo daß die Längen ſelbſt ſich wie die Cubikwurzeln der Zahlen verhalten.

4. Die Linie der Seiten regulärer Vielecke (linea polygonorum, l. circuli dividendi) zeigt für die beygeſetzte Zahl der Seiten, die verhältnißmäßige Länge derſelben, ſo daß jede dieſer Längen auf dem Kreiſe, deſſen Halbmeſſer der Seite des Sechsecks gleich iſt, ſich ſo oft herumtragen läßt, als die Anzahl der Seiten angiebt. Die Seite des Sechsecks oder der Halbmeſſer ſey $= r$, die Anzahl der Seiten eines Vielecks $= n$, ſo iſt die Seite $= 2 r \sin \frac{180^\circ}{n}$.

Auf dem Proportionalzirkel, wie ihn Galilei angegeben hat, ſind die Zahlen der Vielecke in umgekehrter Ordnung geſetzt. Die Länge zu der Zahl 6 iſt nun die Seite und die Länge zu einer andern Zahl, z. B. 10, iſt der Halbmeſſer zu dem Zehneck oder Vieleck.

5. Die Linie der Chorden der Polygonwinkel (linea subtensarum angulorum Polygonorum) zeigt die Verhältniſſe der Chorden von den Nebenwinkeln der Centriwinkel an. Dieſe ſind $= 2 r \cos. \frac{180}{n}$. Die Linie iſt entbehrlich.

6. Die tetragoniſche Linie zeigt für die beygeſetzte Zahl der Seiten regulärer Vielecke, welche gleichen Inhalt haben, die verhältnißmäßige Länge der Seiten. Der gegebene Inhalt ſey aa, die Seite = v, ſo iſt $v^2 = \frac{4aa}{n} \text{ tang } \frac{180^\circ}{n}$. Z. B. wenn die Seite des Dreyecks 10000 Theile erhält, iſt die Seite des eben ſo großen Vierecks 6580, des eben ſo großen Fünfecks 5017, u. ſ. f.

7. Die Linie für die Eintragung der regulären Körper in eine Kugel zeigt die verhältnißmäßige Länge des Durchmeſſers einer Kugel und der Seiten der einzutragenden Körper.

8. Die Linie für die Verwandlung der regulären Körper zeigt die verhältnißmäßige Länge der Seiten bey gleichem Inhalte, zugleich mit dem Durchmeſſer einer gleich großen Kugel.

9. Die Linie der Chorden giebt die Länge der Chorden zu den beygeſetzten Graden eines Kreisbogens an, wobey die Länge zu 60 der Halbmeſſer iſt. Dieſe Linie dient zugleich als Linie der Sinus für die halben Bogen.

10. Die Linie der Tangenten giebt die Länge der Tangenten zu den beygeſetzten Graden eines Kreisbogens an, wobey die Tangente von 45° der Halbmeſſer des Kreiſes iſt. Um Verwirrung in der Eintheilung für die kleinen Bogen zu vermeiden, wird dieſe Linie an der äußern Seite der beiden Schenkel gezeichnet, ſo daß, wenn beide gerade ausgeſtreckt werden, ſie zuſammen die vollſtändige Linie der Tangenten bis zu der Tangente 2 oder dem doppelten Halbmeſſer (= tang 63° 26′ . . .) ausmachen.

11. Die Linie zur Eintheilung einer geraden Linie dient, eine gerade Linie in 2 — 12 gleiche Theile zu theilen; ferner die Eintheilung nach dem äußern und mittlern Verhältniſſe (extrema et media ratione, Eucl. VI. 30.) zu machen; auch zu dem Durchmeſſer eines Kreiſes den Umfang oder umgekehrt zu finden. Sie iſt entbehrlich.

12. Die Fortificationslinie enthält die verhältnißmäßigen Längen der Halbmeſſer regulärer Vielecke für eine gegebene Länge der Seite, auch noch die zugehörigen Längen der Flanke, der Kehllinie und der Capitallinie, die aber nach alten Syſtemen genommen zu werden pflegen. Dieſe Linie mag füglich wegbleiben, da auch die Maßen an den Baſtionen keine beſtimmten Verhältniſſe haben können.

13. Die metalliſche Linie enthält die Durchmeſſer gleich ſchwerer Kugeln, alſo überhaupt die ähnlich liegenden Seiten gleich ſchwerer ähnlicher Körper, von verſchiedenen Metallen.

14. Man findet auch noch auf den Proportionalzirkeln einen Kaliberſtab für Geſchütz und Kugeln an der äußern Seite gezeichnet, bey deſſen Gebrauche das Inſtrument ganz geöffnet wird, daß es ein gerader Maßſtab wird.

15. Lambert hat dem Proportionalzirkel eine beſondere Einrichtung zu perſpectiviſchen Zeichnungen gegeben, ſ. Perſpectiv. Auf der einen Seite ſind fünf Paar Linien gezogen, an welchen die Längen ſich umgekehrt wie die Eintheilungszahlen verhalten, um dadurch den perſpectiviſchen Abſtand eines Punctes von der Horizontallinie zu finden. Auf der andern Seite ſind die Linien der Sinus, Tangenten und Secanten gezeichnet, nebſt einer elliptiſchen Linie, durch deren Hülfe die Ordinaten einer Ellipſe für angenommene Abſciſſen gefunden werden.

16. Jak. Bernoulli hat einen Proportionalzirkel für Schiffahrer angegeben. Opp. T. II. No. 91. Aus dem Rhumb (der Richtung des Schiffes) und der Ver-

Änderung der Breite wird dadurch die Veränderung der Länge gefunden.

17. Die Engländer haben viel weniger Doppellinien an ihren Sectoren oder Proportionalzirkeln, aber mehr einzelne an den äußern Seiten als Maßſtäbe, von jenen, nach Hutton, nur die arithmetiſche, diejenige der Chorden, Sinus Secanten, Tangenten bis 45°, und nach einem kleinern Maßſtabe über 45°, nebſt der Linie der Polygone. Als Maßſtäbe einfach, einen in Zolle und kleinere Theile getheilten, ferner für Chorden, Sinus, Tangenten, einige zur Schifffahrt dienende, und einige logarithmiſche Maßſtäbe.

18. Der Proportionalzirkel iſt ein nützliches Inſtrument für Perſonen, die im Rechnen und in geometriſchen Conſtructionen ungeübt ſind. Es iſt aber koſtbar, beſonders wenn es vollſtändig ſeyn ſoll. Auch muß es eine ziemliche Länge haben, wenn man eine gewiſſe Genauigkeit erhalten will. Mäßig geübte können es füglich entbehren.

19. Der Gebrauch beruhet auf der Lehre von den ähnlichen Dreyecken. In dem Dreyeck ABC, Tab. VIII. Fig. 117. Th. I. ſey DE parallel mit BC, ſo ſind die Dreyecke ABC, ADE ähnlich, und es iſt AB : AD = BC : DE (Dreyeck 8.). Dadurch werden die Glieder eines gegebenen Verhältniſſes AB : AD in diejenigen eines dieſem gleichen, BC : DE, verwandelt, von welchen eines BC oder DE gegeben wird. Auf dem Proportionalzirkel (Fig. 153.) nimmt man auf zwey gleichbenannten Linien, AB, AB, die gleichen Längen AC, AC, und AD, AD, ſo ſind CC, DD parallel, bey jeder Eröffnung des Inſtruments. Öffnet man daſſelbe ſo weit, daß man mit einem Handzirkel zwiſchen zwey gleichnamigen Puncten C, C eine gegebene Linie faßt, ſo erhält man zwiſchen zwey andern gleichnamigen Puncten D, D (die auch auf der andern Seite von C, C liegen mögen) eine Linie DD, die zu CC das Verhältniß AD : AC hat, und die Linien CC, DD haben auf die bey C, D geſetzten

Nimm

Zahlen eben die Beziehungen, wie AC und AD gegen ſich haben.

Z. B. CC und DD ſollen die ähnlich liegenden Seiten zweyer ähnlichen Figuren ſeyn, deren Flächen ſich wie 3 : 2 verhalten, ſo nimmt man auf der geometriſchen Linie beider Schenkel zwey Puncte C, D, deren Zahlen wie 3 : 2 ſind, ſo verhalten ſich die Quadrate von AC und AD wie 3 : 2, daher eben ſo die ähnlichen über CC und DD gezeichneten Figuren. Iſt die eine gegeben, ſo hat man gleich durch das Inſtrument die andere.

Man wolle die Seite eines Fünfecks haben, deſſen Halbmeſſer gegeben wird. Auf der Linie der Polygone nehme man zwiſchen den Puncten 6, 6 die Weite DD dem Halbmeſſer gleich, und dann die Weite CC zwiſchen den Puncten 5, 5, ſo iſt CC die geſuchte Seite des Fünfecks. Iſt die Seite des Vielecks gegeben, ſo faßt man dieſe zwiſchen den zugehörigen Zahlen, und das Intervall 6, 6, iſt der Halbmeſſer zu demſelben.

20. Der Proportionalzirkel hat anfangs noch eine andere Geſtalt gehabt, als die jetzt gewöhnliche, hier beſchriebene, nämlich die eines Doppelzirkels mit einem verſchiebbaren Gewinde, welches nach den bezifferten Abtheilungen auf den Schenkeln geſtellt und befeſtigt wird. Dieſer Zirkel bildet zwey Verticalwinkel, an welchen die Abſtände der Spitzen ſich wie die Längen der gleichen Schenkel verhalten. Speckle in ſeiner Architectura von Veſtungen, welche zum erſtenmahle 1589 herausgekommen iſt, erwähnt gleich im Anfange eines ſolchen Zirkels zum Verjüngen, zugleich eines andern zu dieſem Zwecke ganz in der Form unſers Proportionalzirkels. „Andere," ſagt er, „haben einen breiten Cirkel gemacht, mit einem unbeweglichen Centro, da ſie dann auf beiden Linien in der Mitte der geſpaltenen Linien die Theilungen der Verjüngungen gemacht, und ſoweit man ihn allwege aufthut, iſt allwege die Erjüngung von einem bis in die 20 Theil geſtanden, und hat man ſolche Theilung mit einem andern Cirkel nehmen und ſuchen müſſen." Er habe, fährt er fort, dieſe und andere Zirkel im Gebrauche nicht genau

gefunden, ſondern habe ſich andere machen laſſen, die völlig ſo beſchaffen ſind, wie die noch jetzt üblichen Doppelzirkel mit entgegengeſetzten Schenkeln und feſtem Gewinde. Er hat deren mehrere mit verſchiedenem Verhältniſſen der Länge der Schenkel abgebildet. Für alle dieſe Inſtrumente gebraucht er die Benennung, Proportionalzirkel.

21. Aus dem Doppelzirkel mit beweglichem Gewinde iſt vermuthlich der Proportionalzirkel des Jobſt Burgi oder Juſtus Byrgius entſtanden, den Levin Hulſius in ſeinem dritten Tractat der mechaniſchen Inſtrumente, Frankfurt 1604, beſchreibt. Es ſind auf den Schenkeln mehrerley Abtheilungen, ſechs Arten, angebracht, um nicht bloß Linien, ſondern auch Flächen und Körper zu verjüngen oder auch zu vergrößern, und noch einige Verhältniſſe anzugeben. Man faßt mit dieſem Zirkel die eine Linie zwiſchen dem einen Paar Schenkel, und erhält zwiſchen den Spitzen des andern Paars die dazu gehörige Linie.

22. Clavius beſchreibt in ſeiner Geometria practica, die zuerſt zu Rom 1604 herausgekommen iſt, einen Proportionalzirkel nach der gegenwärtigen Form. Dieſer hat auf der einen Fläche nur die arithmetiſche Linie, auf der andern die Linie der Chorden. Clavius ſchlägt den Namen Instrumentum partium vor. Er ſagt nicht, daß er ein neues Inſtrument angäbe.

23. Galilei machte ſeinen Proportionalzirkel im J. 1606 bekannt, in einer ſehr ſelten gewordenen Schrift: Le Operazioni del Compasso geometrico e militare, Padova, 1606. Die Einrichtung iſt ganz wie an den jetzt gewöhnlichen Inſtrumenten. Die darauf gezogenen Linien ſind die arithmetiſche, geometriſche, ſtereometriſche, metalliſche, polygraphiſche (für reguläre Vielecke), die tetragonica und eine adjuncta, mittelſt welcher Kreisabſchnitte und Monden quadrirt werden können. Matthias Bernegger (ein ſehr guter Philolog ſeiner Zeit) hat die Schrift ins Lateiniſche überſetzt, und mit einem Commentar verſehen, welcher wieder ins Italieniſche überſetzt iſt, wie er es ſehr verdiente. Er fügte noch die Li-

nie der Chorden und zwey Linien für die regulären Körper bey. Ein Mayländer, Balthaſar Capra, eignete ſich in einer Schrift: Usus et fabrica cujusdam Circini Proportionum, Patav. 1607, die Erfindung dieſes Inſtruments zu, worüber Galilei, mehr als es die Sache verdiente und er es nöthig hatte, ſehr aufgebracht wurde, ſogar daß, ohnezweifel auf ſeine Veranlaſſung, alle vorräthigen Exemplare der Schrift des Capra confiſcirt wurden. Er beſtätigte durch Zeugniſſe, daß er den Proportionalzirkel vor 10 Jahren (um 1597) erfunden habe, und daß ſeit der Zeit wol auf hundert Stück in Padua wären verfertigt worden. Einem Manne wie Galilei mag man dieſes, und wenn die Sache viel wichtiger wäre, auf ſein Wort glauben. Vielleicht hat Capra ihn blos necken wollen, auf Anſtiften der Neider und Widerſacher des Galilei.

24. Die Form des Galileiſchen Proportionalzirkels iſt alſo nicht neu, wol aber der Gebrauch. Denn die ältere diente nur zur einfachen Verjüngung oder Vergrößerung der Linien, da ſie blos die arithmetiſche Linie enthielt. Die Galileiſche Einrichtung dient zu mancherley geometriſchen Conſtructionen, und mag ſelbſt zu Rechnungen bisweilen angewandt werden. In Abſicht auf die Bekanntmachung durch den Druck iſt, nach der von Speckle geſchehenen Erwähnung zweyer Verjüngungs-Inſtrumente, des Byrgius Inſtrument das ältere, da die Zueignung der Schrift des Hulſius vom 20. May 1603 iſt. Die Zueignung des Werks von Clavius iſt vom 13. Sept. 1604, und die der Galileiſchen Schrift vom 10. Jul. 1606.

25. Hutton erzählt in ſeinem Wörterbuche die Geſchichte des Proportionalzirkels folgendermaßen. „Man ſchreibt, ſagt er, die Erfindung dem Guido Baldo oder Ubaldo um das J. 1568 zu. Die erſte gedruckte Nachricht davon giebt Caſpar Mordente zu Antwerpen im J. 1584, welcher erzählt, daß ſein Bruder Fabricius Mordente in dem J. 1554 das Inſtrument erfunden habe. Darauf hat Daniel Speckle zu Straßburg im J. 1589 es beſchrieben, nach ihm Thomas Hood

zu London 1598, worauf sehr viele Schriftsteller über die praktische Geometrie davon gehandelt haben."

Es ist hier ein Mißverstand in den Benennungen vorhanden. Aus dem, was ich aus des Speckle Werk angeführt habe, sieht man, daß diese ältere Einrichtung ein Doppelzirkel, vermuthlich mit beweglichem Gewinde, gewesen ist. Es wäre unbegreiflich, wie in dem Streite zwischen Galilei und Capra diese frühern Ansprüche auf die Erfindung des Proportionalzirkels nicht in Anregung gekommen sind.

26. Über den Proportionalzirkel sind viele Schriften erschienen. Ein Verzeichniß findet man in Scheibels neuer Ausgabe von Scheffelts Unterricht vom Proportionalzirkel, Breslau 1781; in Leupolds Theatro Machinarum Arithm. et Geom. wo auch die Byrgische Einrichtung abgebildet und beschrieben ist; und in Kästners Geschichte der Mathematik, 3. Bd. S. 336–352.

Mit dem Proportionalzirkel von gleichem Gebrauch ist verwandt das

Proportionallineal, welches eben solche getheilte Linien enthält als jener auf beiden Schenkeln. Man hat aber dabey die Mühe, die beiden ähnlichen Dreyecke zu zeichnen, welche der Proportionalzirkel unmittelbar angiebt. Der dritte Theil der Geometriae practicae Adriani Metii, Franequerae 1625, handelt eigens davon.

Proscatheton heißt bisweilen eine senkrechte gerade, im Griechischen, was auf etwas herabgelassen, gesetzt wird.

Prosinus ist eine Benennung, welche Vieta für die Tangente eines Winkels gebraucht. Sonst ist sie gar nicht angenommen.

Prosthaphaeresis ist eine Abkürzungsmethode, deren sich die Astronomen vor der Erfindung der Logarithmen in einigen Fällen bedienten. Wenn, wie es in der sphärischen Trigonometrie oft der Fall ist, ein Sinus mit einem andern multiplicirt werden soll, so kann man diese

Multiplication durch die Formel $\sin A . \sin B = \frac{1}{2} \cos (A - B) - \frac{1}{2} \cos (A + B)$, Goniometrie, 27. in eine Subtraction verwandeln. So auch, wenn ein Sinus in einen Coſinus, oder ein Coſinus in einen andern multiplicirt werden ſoll, durch die Formeln a. a. O. Wenn es aber andere goniometriſche Functionen ſind, die in einander multiplicirt werden ſollen, ſo wird das Verfahren beſchwerlicher; auch wenn ein Sinus oder Coſinus Diviſor iſt. Man kann dieſe Fälle auf jenen bringen, aber die Mühe der Vertauſchungen wird größer ſeyn als die Mühe des Multiplicirens oder Dividirens, welches einem geübten Rechner mechaniſch iſt, da man bey dem andern Verfahren ſchon mehr Achtſamkeit anzuwenden hat. Auch iſt die gehörige Genauigkeit dabey nicht ſo leicht zu erhalten. Die Logarithmen überheben uns dieſer geſuchten Kunſtgriffe.

Werner in Nürnberg hat, wie Chriſtmann in ſeiner Theoria lunae erzählt, in einer Schrift über die Dreyecke die Methode vorgetragen. Da dieſe aber ungedruckt geblieben iſt, ſo iſt ſie nicht bekannt geworden. Nachher ſind Tycho und Wittich, der eine kurze Zeit ein Gehülfe des erſtern war, darauf gekommen. Durch Wittich ward ſie bey deſſen Anweſenheit in Caſſel Juſt Byrge bekannt, der die Erfindung etwas erweiterte. Raimarus Urſus erwähnt ihrer in ſeinem Fundamento aſtronomico; Clavius machte die Methode allgemein in ſeinem Werke de aſtrolabio, L. I. Lemma 53. Melchior Jöſtel hat eine beſondere Schrift darüber verfaßt, die nicht gedruckt zu ſeyn ſcheint.

Ausführlichere Nachricht findet man in Scheibels mathematiſcher Bücherkenntniß VII. St. in Montücla Geſchichte der Mathematik, Th. II. S. 583. nebſt einer ausführlichen Darſtellung der Methode ſelbſt S. 617—619; in Käſtners Geſch. der Mathem. Th. I. S. 566.

Proſthaphäreſis bedeutet auch in der Aſtronomie den Unterſchied der mittlern und wahren Bewegung eines Weltkörpers. Von πρόσθεν, vor, und ἀφαίρεσις, Wegnahme.

Provolutio iſt die Wälzung einer krummen Linie oder auch einer aus geraden zuſammengeſetzten auf einer andern. Leibnitz hat dieſen Ausdruck gebraucht, in einem Aufſatze: de lineae super linea incessu, ejusque tribus speciebus, motu radente, motu provolutionis et composito ex ambobus. Acta Erud. 1706. Opp. T. III. p. 395.

Ptolemäiſcher Lehrſatz, ſ. Kreis, 45.

Punct (σημειον) iſt, nach Euklides, was keine Theile hat. Nämlich Körper, Flächen und Linien können in gleichartige Theile, unbeſtimmt viele, getheilt gedacht werden, der Punct aber nicht. Ein Punct iſt die gemeinſchaftliche Gränze zweyer Theile einer Linie, die aber als Gränze keinen Theil, weder des einen Stücks noch des andern, ausmacht. Eben ſo iſt eine Linie die gemeinſchaftliche Gränze zweyer Theile einer Fläche, und eine Fläche die gemeinſchaftliche Gränze zweyer Theile eines Körpers. Ein Punct iſt, wie Linie und Fläche, ein abſtracter Begriff, welchen man nicht ſinnlich darſtellen kann, den aber ſelbſt der gemeine und ungeübte Verſtand ſich in den Theilungs- und Endpuncten einer ſinnlichen Linie als untheilbar vorſtellt.

Wolf ſagt: Punctum est, quod quaquaversum se ipsum terminat, seu quod non habet terminos alios a se distinctos. Dieſe Doppelerklärung iſt nicht deutlich.

Euklides fängt ſeine geometriſchen Erklärungen mit der des Punctes an. Dieſes hat einige befremdet. Allein es ſetzt dieſes am wenigſten aus der ſinnlichen Anſchauung voraus. Fängt man mit dem ſinnlichen Körper an, ſo muß man von unzählig vielen ſinnlichen Beſchaffenheiten abſtrahiren, um den Begriff eines geometriſchen Körpers zu bilden. Auch iſt der Begriff eines Körpers mit den Begriffen von Flächen und Linien und Puncten zu ſehr verbunden. Hingegen der Begriff eines Theils iſt zwar ſinnlich, aber doch ſchon ſehr allgemein und einfach, auf Körper, Flächen und Linien zugleich anwendbar.

Die Gränze eines Theils iſt das nicht Theilbare. So enthält Euklidens verneinende Erklärung eines Punctes den Begriff einer Gränze. Der Punct wird in oder an einer geometriſchen Ausdehnung gedacht, ohne einen Theil derſelben auszumachen.

Eine Linie iſt eine Reihe oder Folge von Puncten, allein eine ſtetige. Daher läßt ſich die Länge nicht durch eine Anzahl von Puncten beſtimmen. In zwey concentriſchen Kreiſen giebt jede Linie aus dem Mittelpuncte einen Punct ſowol auf dem kleinern als auf dem größern. Wenn beide ſich zugleich auf einer geraden Linie fortwälzen, ſo legen ſich ungleiche, aber ähnliche Bogen an gleich große Theile der geraden Linie an, worauf ſie ſich wälzen. Th. I. S. 600.

In der Geometrie der krummen Linien vom dritten Grade an, kommen Doppelpuncte, drey- und mehrfache Puncte, Rückkehrpuncte, Wendungspuncte, Schlangenpuncte, conjugirte Puncte vor, wovon an ihren Orten.

Pyramide iſt ein geometriſcher Körper, begränzt von einer ebenen geradlinichten Figur, als Grundfläche, und ſo vielen, in einem Puncte zuſammenſtoßenden, Dreyecken, als die Grundfläche Seiten hat. Der Punct, wo die Seitenflächen zuſammen kommen, heißt der Scheitelpunct (vertex) oder Spitze. Die Linien von den Winkelpuncten der Grundfläche nach der Spitze heißen Seitenlinien oder Kanten. Die Höhe einer Pyramide iſt die ſenkrechte von dem Scheitel auf die Grundfläche, nöthigen Falls die erweiterte.

1. Die Unterſcheidung der Pyramiden geſchieht zunächſt nach der Anzahl der Kanten oder der Seitenflächen, in dreyeckige, viereckige, u. ſ. f. oder auch dreyſeitige, vierſeitige ꝛc.

2. Die Pyramiden ſind gleichſeitige oder ungleichſeitige. Die Winkelpuncte der Grundfläche von den gleichſeitigen liegen alle auf dem Umfange eines Kreiſes. Denn die geraden, welche in der Grundfläche von

jedem Winkelpuncte nach dem Puncte gezogen werden, wo die ſenkrechte von der Spitze die Grundfläche trifft, ſind alle gleich.

3. Gleichſeitige Pyramiden, deren Grundfläche eine reguläre Figur iſt, nennt man gleichförmige. Die gleichen Seitenlinien ſind nicht allein gegen die Grundfläche gleich geneigt, ſondern machen auch mit den Seiten derſelben gleiche Winkel, daher die körperlichen Winkel an der Grundfläche ſich gleich ſind.

4. Wenn die Grundfläche und die Seitenflächen gleich große gleichſeitige Dreyecke ſind, ſo iſt die Pyramide eine reguläre, und bekommt den Namen, Tetraedron. Man nennt auch die hier gleichförmige genannten Pyramiden reguläre.

5. Jeder der Grundfläche parallele Schnitt einer Pyramide iſt der Grundfläche ähnlich. Die zuſammengehörigen Seiten der Grundfläche und eines Schnittes (die in derſelben Seitenfläche befindlichen) verhalten ſich wie die zugehörigen Seitenlinien beider Pyramiden, oder wie ihre Höhen.

Die Schnitte ſelbſt verhalten ſich wie die Quadrate dieſer Linien.

6. Pyramiden, die gleiche Höhen haben, verhalten ſich wie ihre Grundflächen.

7. Ein dreyſeitiges Prisma läßt ſich in drey gleich große Pyramiden zerlegen, und daher iſt jede dreyſeitige Pyramide der dritte Theil eines Prisma mit derſelben Grundfläche und Höhe.

8. Jede Pyramide iſt der dritte Theil eines Prisma über derſelben Grundfläche mit derſelben Höhe wie an jener.

Alles dieſes wird in den Elementarbüchern bewieſen.

9. Die Oberfläche einer gleichförmigen Pyramide wird leicht gefunden. Jede der Seitenflächen iſt ein gleichſchenkliges Dreyeck, deſſen Grundlinie die Seite eines regulären Vielecks, der Grundfläche, und die Höhe die

Hypotenuſe in dem rechtwinkligen Dreyeck iſt, deſſen Kathete die Höhe der Pyramide und die ſenkrechte aus dem Mittelpuncte auf die Seite der Grundfläche ſind. Der Halbmeſſer der Grundfläche ſey $= r$; der halbe Centriwinkel $= \phi$, die Höhe $= h$, ſo iſt der Inhalt eines der Dreyecke $= r \sin \phi \sqrt{(r^2 \cos \phi^2 + h^2)}$, und die Summe aller Seitenflächen $= nr \sin \phi \sqrt{(r^2 \cos \phi^2 + h^2)}$, wo n die Anzahl derſelben iſt. Die Grundfläche iſt $= n r^2 \sin \phi \cos \phi$.

10. Die Seitenflächen einer gleichförmigen Pyramide ſind gegen die Grundfläche unter einem Winkel geneigt, deſſen Tangente iſt $\frac{h}{r \cos \phi}$.

11. Die Seitenlinien der Pyramide machen mit den Seiten der Grundfläche einen Winkel, deſſen Tangente iſt $\frac{\sqrt{(r^2 \cos \phi^2 + h^2)}}{r \sin \phi}$.

12. Der Neigungswinkel der Seitenflächen ſey $= \alpha$, ſo iſt $\sqrt{(r^2 \cos \phi^2 + h^2)} = r \cos \phi \sqrt{(1 + \tang \alpha^2)}$ $= r \cos \phi . \sec \alpha = \frac{r \cos \phi}{\cos \alpha}$. Daher die Summe aller Seitenflächen $= \frac{n r^2 \sin \phi . \cos \phi}{\cos \alpha} = \frac{n r^2 \sin 2 \phi}{2 \cos \alpha}$. Die Seitenlinien der Pyramide machen mit den Seiten der Grundfläche den Winkel, deſſen Tangente iſt $\frac{\cot \phi}{\cos \alpha}$.

13. Es ſey CABEDFG (Fig. 154.) ein abgekürztes Pyramidenſtück, deſſen Grundflächen CAB, FDE parallel ſind, es ſoll der Inhalt gefunden werden, aus dem was an dem Stücke gemeſſen werden kann.

Dieſes ſind die Seitenlinien der beiden parallelen Flächen, und die Winkel ihrer Seiten, woraus der Inhalt derſelben gefunden wird. Wenn die Höhe nicht durch Ablothung gemeſſen werden kann, ſo muß ſie aus den Winkeln, welche eine der Seitenlinien, AD, mit den Seiten

AB und AC macht, und dem Winkel BAC hergeleitet werden. Denn daraus ergiebt ſich (ſphäriſche Trigonometrie) der Neigungswinkel der Linie AD gegen die Grundfläche, und dann die Höhe, welche dem Producte aus AD in den Sinus des Neigungswinkels gleich iſt. Dieſe Höhe ſey h; die Höhe der ganzen Pyramide x, der weggenommenen y, ſo iſt $x - y = h$. Ferner ſey $AB = a$; $DE = b$, ſo iſt $a : b = x : y$, und $y = \frac{bx}{a}$. Da $a : a - b = x : x - y = x : h$ iſt, ſo iſt $x = \frac{ah}{a-b}$; $y = \frac{bh}{a-b}$. Ferner ſey die untere Grundfläche A, die obere B, ſo iſt $A : B = a^2 : b^2$. Nun iſt das Pyramidenſtück $= \frac{1}{3} Ax - \frac{1}{3} By$. Setzt man für x, y, B ihre Werthe, ſo wird das Pyramidenſtück =

$$\frac{1}{3} Ah \frac{a^3 - b^3}{(a-b) a^2} = \frac{1}{3} Ah . \frac{aa + ab + bb}{aa} =$$

$$\frac{1}{3} Ah . \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa}\right).$$

14. Die dreyſeitige Pyramide iſt unter den Körpern mit ebenen Seitenflächen was das Dreyeck unter den ebenen geradlinichten Figuren iſt, daher ſie eine beſondere Unterſuchung verdienet.

15. Es ſey DACB (Fig. 155.) eine dreyſeitige Pyramide, deren Grundfläche ABC. Der Winkel der Seitenlinie DC mit AC ſey $= \alpha$; der Winkel derſelben mit BC ſey $= \beta$, der Winkel $ACB = \gamma$. Ferner ſey $AC = a$; $BC = b$; $CD = d$. Es iſt der Inhalt der Pyramide =

$$\tfrac{1}{3} abd \sqrt{\sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta + \gamma) . \sin \tfrac{1}{2} (\alpha + \beta - \gamma) . \sin \tfrac{1}{2} (\alpha - \beta + \gamma) . \sin \tfrac{1}{2} (\beta + \gamma - \alpha)}.$$

Der Beweis iſt derſelbe wie für den Inhalt eines Parallelepipedum, nur daß hier die Grundfläche =

$\frac{1}{2}$ ab sin γ iſt, und daß dieſe, wegen (8.), mit dem dritten Theile der Höhe multiplicirt werden muß.

16. Durch einige Subſtitutionen aus Goniometrie 27, 24, 36 wird dieſe Formel in folgende verwandelt: Inhalt der Pyramide =

$$\tfrac{1}{6}\,abd\sqrt{(1-\cos\alpha^2-\cos\beta^2-\cos\gamma^2+2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma)}.$$

17. Die dritte Seite der Grundfläche AB ſey = c; die Seitenlinie AD = e; BD = f, es iſt der Inhalt der Pyramide durch die ſechs Seitenlinien ausgedruckt =

$$\tfrac{1}{12}\sqrt{}\,[a^2f^2(b^2+c^2-a^2+d^2+e^2-f^2)$$
$$+\,b^2e^2(a^2+c^2-b^2+d^2+f^2-e^2)$$
$$+\,c^2d^2(a^2+b^2-c^2+e^2+f^2-d^2)$$
$$-\,a^2b^2c^2-a^2d^2e^2-b^2d^2f^2-c^2e^2f^2].$$

Dieſe ſehr ſymmetriſche Formel wird erhalten, wenn für $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ihre Werthe durch die Seiten der Dreyecke eingeführt werden. Es iſt (Trigonometrie oder Dreyeck, 19, 20.) $\cos\alpha = \dfrac{a^2+d^2-e^2}{2ad}$;

$$\cos\beta = \frac{b^2+d^2-f^2}{2bd}\,;\quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-e^2}{2ab}.$$

Die Rechnung iſt etwas lang, übrigens eine blos mechaniſche Multiplication.

18. Man kann die Combinationen in der Formel noch auf andere Art ſymmetriſch ordnen, als:

$$a^2b^2(e^2+f^2)+a^2c^2(d^2+f^2)+b^2c^2(e^2+d^2)$$
$$+\,a^2d^2(f^2-e^2)+b^2d^2(e^2-f^2)+c^2d^2(e^2+f^2)$$
$$+\,a^2e^2f^2+b^2e^2f^2-c^2e^2f^2$$
$$-\,a^2f^2(a^2+f^2)-b^2e^2(b^2+e^2)-c^2d^2(c^2+d^2)$$
$$-\,a^2b^2c^2.$$

19. Es ſey die Grundfläche ABC einer dreyſeitigen Pyramide DABC (Fig. 155.) gegeben, nebſt den Neigungswinkeln der Seitenlinien DA, DB, DC gegen die Grundfläche, man ſoll die Höhe der Pyramide DE und die Lage des Grundpunctes E beſtimmen.

Man ziehe an den Grundpunct E die geraden AE, BE, CE. Dieſe verhalten ſich wie die Tangenten der Winkel ADE, BDE, CDE, oder wie die Cotangenten der Neigungswinkel EAD, EBD, ECD. Nun iſt der Kreis der geometriſche Ort für alle Dreyecke, die über einer gegebenen Grundlinie ein gegebenes Verhältniß der Seiten haben. (Kreis, 54, 55.). Man beſchreibe alſo über zweyen der drey Seiten der Grundfläche, AB, AC, als Chorden, Kreisbogen, deren jeder der Ort des Punctes E ſey, ſo giebt ihr Durchſchnitt dieſen Punct, alſo auch die Längen AE, BE, CE. Aus jeder dieſes und dem zugehörigen Winkel wird dann die Höhe der Pyramide ED beſtimmt.

Die Berechnung iſt etwas mühſam und muß in die Trigonometrie verſpart werden.

20. Auf gleiche Art wird für vielſeitige Pyramiden die Höhe und der Grundpunct gefunden, wenn zwey an einander liegende Seiten AB, AC und der eingeſchloſſene Winkel BAC, nebſt den Neigungswinkeln der durch B, A, C gehenden Seitenlinien gegeben werden.

21. Wenn an einer Pyramide eine Seite AB der Grundfläche, der gegenüber liegende Winkel an der Spitze ADB, und die Neigungswinkel der Seitenlinien AD, BD gegen die Grundfläche gegeben werden, ſo iſt die Höhe und der Grundpunct dadurch beſtimmt. Denn aus den Neigungswinkeln iſt erſtlich das Verhältniß der Linien AE, BE, die nach dem Grundpuncte gehen, gegeben, (Trigonometrie, ſphäriſche, oder Linie, gerade, 35.). Ferner iſt durch den Winkel ADB mit den Neigungswinkeln der Winkel AEB der auf DE ſenkrechten AE, BE gegeben. Die Aufgabe wird nun dieſe, erſtlich über AB als Chorde einen Kreisbogen zu beſchreiben, der einen gegebenen Winkel faſſe, und in dieſem zwey geraden AE, BE zu ziehen, die ein gegebenes Verhältniß haben. Das erſte iſt in dem Art. Kreis, 32. gewieſen, das zweyte iſt in dem Art. Analyſis als Methode, 2. Aufg. S. 91.

Bey Höhenmeſſungen iſt dieſes anwendbar.

22. Die drey ebenen Winkel der Ecke A (Fig. 156.) an der dreyſeitigen Pyramide ABCD ſeyn alle rechte, ſo daß die drey Ebenen BAC, DAC, BAD ſenkrecht auf einander ſtehen; es iſt

$$(\Delta BCD)^2 = (ABC)^2 + (ADC)^2 + (ABD)^2,$$

wo die Flächen der Dreyecke in Zahlen ausgedruckt zu verſtehen ſind.

Der Inhalt des Dreyecks BCD werde durch ſeine drey Seiten nach der Formel, Dreyeck, 34. ausgedruckt. Es ſey BD = a; BC = b; CD = c, ſo iſt der Inhalt des Dreyecks =

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+o-a)(a+c-b)(a+b-c)}.$$

Die andern Dreyecke drucke man durch das halbe Product ihrer Katheten aus. Das Product unter dem Wurzelzeichen entwickele man. Es iſt erſtlich ein Product aus den Factoren $(b+c)^2 - a^2$ und $a^2 - (b-c)^2$ und dieſes iſt $= 2a^2 b^2 + 2a^2 c^2 + 2b^2 c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = 4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$. Nun iſt $a^2 = AB^2 + AD^2$; $b^2 = AB^2 + AC^2$; $c^2 = AC^2 + AD^2$. Setzt man dieſe Werthe für a^2, b^2, c^2 in jenes Product, ſo wird es $= 4AB^2 . AD^2 + 4AB^2 . AC^2 + 4AC^2 . AD^2$. Die Summe der Dreyecke iſt $= \tfrac{1}{2} AB . AD + \tfrac{1}{2} AB . AC + \tfrac{1}{2} AC . AD$, und die Summe der Quadrate von denſelben der 16te Theil jener Summe. Das Quadrat des Dreyecks BCD iſt ebenfalls der 16te Theil derſelben. So iſt der Satz erwieſen.

23. Leichter zu überſehen iſt folgender Beweis. — Man ziehe auf die eine der Seiten des Dreyecks BCD von A die ſenkrechte AE, ſo iſt BE ſenkrecht auf AED, alſo auf DE, und es iſt

$$(\Delta BCD)^2 = \tfrac{1}{4} BC^2 \times DE^2 = \tfrac{1}{4} BC^2 \times AD^2$$
$$+ \tfrac{1}{4} BC^2 \times AE^2 = \tfrac{1}{4} BC^2 \times AD^2 + (\Delta ABC)^2.$$

Auf gleiche Art iſt, wenn von A auf CD und DB ſenkrechte gezogen werden,

$$(\Delta BCD)^2 = \tfrac{1}{4} DC^2 \times AB^2 + (\Delta ADC)^2,$$
$$(\Delta BCD)^2 = \tfrac{1}{4} BD^2 \times AC^2 + \Delta (ABD)^2.$$

Die drey Producte ſind jedes Summen von zwey quadrirten Dreyecken. Nämlich

$BC^2 \times AD^2 = AB^2 \times AD^2 + AC^2 \times AD^2,$
$DC^2 \times AB^2 = AD^2 \times AB^2 + AC^2 \times AB^2,$
$BD^2 \times AC^2 = AB^2 \times AC^2 + AD^2 \times AC^2.$
Hier iſt $AB \times AD = 2 \Delta ABD$; $AC \times AD = 2 \Delta ADC$; $AC \times AB = 2 \Delta ABC$. Man addire die drey Werthe von $(\Delta BDC)^2$; ſetze für die Producte ihre Werthe, und dividire dann alles durch 3, ſo wird $(\Delta BCD)^2 = (\Delta ABC)^2 + (\Delta ADC)^2 + (\Delta ABD)^2$.

24. Der Satz läßt ſich auch auf folgende Art darthun. Die drey Dreyecke ABC, DAB, CAD ſind jedes die Projectionen des Dreyecks BCD auf ihre Ebenen. Denn AB iſt die Projection von BD, AC von DC, BC von ſich ſelbſt, auf die Ebene des Dreyecks ABC. Alſo iſt das Dreyeck ABC gleich dem Dreyeck BCD multiplicirt in den Coſinus des Neigungswinkels der Ebene DBC gegen die Ebene ABC, (Projection, 13.). Eben ſo iſt das Dreyeck ACD gleich dem Dreyeck BCD in den Coſinus des Neigungswinkels gegen die Ebene jenes multiplicirt. Auch iſt das Dreyeck ABD gleich dem Dreyeck BCD in den Coſinus des Winkels ihrer Ebenen multiplicirt. Es iſt aber, wenn eine Ebene mit drey auf einander ſenkrecht ſtehenden Ebenen die Winkel ϑ, ϑ', ϑ'' macht, die Summe, $(\cos\vartheta)^2 + (\cos\vartheta')^2 + (\cos\vartheta'')^2 = 1$, krumme Fläche, 6. Davon iſt der Satz eine unmittelbare Folge.

25. Der Satz iſt von Tinſeau zuerſt bekannt gemacht. Mém. présentés, T. IX. De Gua eignete ſich ihn aber zu in einer Abhandlung über die dreyſeitigen Pyramiden, welche er kurz vor ſeinem Tode der Akademie der Wiſſenſchaften vorlegte. Das Dreyeck BCD iſt in dem rechtwinkligen vierſeitigen Körper ABCD daſſelbe, was die Hypotenuſe in einem rechtwinkligen Dreyeck iſt, und der Satz iſt dem pythagoriſchen Lehrſatze analog. Auch leiſtet er zur Complanation krummer Flächen eben die Dienſte, als jener Satz zur Rectification krummer Linien.

Nun

26. Eine Kugel um eine dreyſeitige Pyramide beſchreiben, heißt zu vier gegebenen Puncten den Halbmeſſer der durch ſie gehenden Kugelfläche finden. Die geometriſche Auflöſung dieſer Aufgabe iſt in dem Artikel, Kugel, 53 und 64, auf zweyerley Art gezeigt. Der analytiſche Ausdruck für den Halbmeſſer, der ſich daraus herleiten läßt, iſt aber ſehr zuſammengeſetzt. Man ſehe die Elemens de Géométrie par le Gendre, 5e édit. 1804. Wie der Halbmeſſer, ohne Hülfe einer Conſtruction, durch bloße algebraiſche Rechnung zu finden ſey, iſt in dem angeführten Artikel, 66, gewieſen.

27. Da die Coordinaten zu dem Mittelpuncte ſich leicht finden laſſen, woraus ſich dann die Größe des Halbmeſſers unmittelbar ergiebt, ſo mag die Rechnung hier noch Platz finden, wiewol ohne den Werth des Halbmeſſers zu entwickeln.

Die rechtwinklichten Coordinaten einer Kugelfläche ſeyn x, y, z, die Coordinaten zu dem Mittelpuncte p, q, r, der Halbmeſſer R, ſo iſt (krumme Fläche, 40.)

$$R^2=(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2.$$

Der Anfang der Coordinaten ſey in einem der Winkelpuncte der Grundfläche, die Axe der x lege man in eine ihrer Seiten; die Coordinaten für den erſten Punct ſind o, o, o; für den zweyten a, o, o, wo a die eine Seite iſt; für den dritten, b, c, o; für den vierten, den Scheitelpunct, d, e, f. Werden dieſe Werthe ſucceſſiv für die Coordinaten x, y, z geſetzt, ſo entſtehen die Gleichungen:

I. $R^2=p^2+q^2+r^2.$

II. $R^2=(a-p)^2+q^2+r^2.$

III. $R^2=(b-p)^2+(c-q)^2+r^2.$

IV. $R^2=(d-p)^2+(e-q)^2+(f-r)^2.$

Daraus iſt, wenn I. von jeder der folgenden Gleichungen abgezogen wird, und die für p, q, erhaltenen Werthe ſubſtituirt werden,

Digitized by Google

V. $2p = a$.

VI. $2q = \frac{bb - ab + cc}{c}$.

VII. $2r = \frac{dd - ad + ee}{f} + \frac{cff - e(bb - ab + cc)}{cf}$

Der Halbmeſſer iſt $R = \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}$, eine Formel, deren Werth in jedem Falle aus den berechneten Werthen von p, q, r ſich leichter wird finden laſſen, als aus dem allgemeinen entwickelten Ausdruck.

28. La Grange hat in den neuen Memoiren von Berlin für 1773 analytiſche Auflöſungen einiger Aufgaben über die dreyſeitigen Pyramiden gegeben. Sie ſetzen gar keine Conſtruction voraus, und beruhen auf Gleichungen zwiſchen den rechtwinklichten Coordinaten, deren je drey zu einem Puncte im Raume gehören. Aus dieſen Coordinaten, oder gewiſſen daraus zuſammen geſetzten Ausdrücken, beſtehen die Werthe der Größen, die für eine Pyramide geſucht werden. So findet la Grange zuerſt Ausdrücke für die Seitenflächen, leichte zwar für die am Scheitelpuncte zuſammenlaufenden, aber für die Grundfläche in der That einen zuſammengeſetzten, nur durch die Form einfachen. Der Scheitelpunct wird zu dem Anfangspuncte der Coordinaten genommen. Wenn s, t, u die Coordinaten zu der Grundfläche ſind, und die Gleichung für dieſelbe iſt, $u = l + ms + nt$, ſo iſt die Höhe der Pyramide $= \frac{l}{\sqrt{(1 + mm + nn)}}$. Dieſes läßt ſich aus dem Artikel, Linie 51. herleiten. Der Inhalt der Pyramide wird durch eine ſymmetriſche Formel mittelſt der Coordinaten zu den drey Winkelpuncten der Grundfläche angegeben. Dieſe ſeyn x, y, z; x′, y′, z′; x″, y″, z″, ſo iſt der Inhalt der Pyramide $= \frac{1}{6}(xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'')$. Der Inhalt durch die ſechs Seitenlinien iſt oben (17) angegeben. Merkwürdig iſt die Aufgabe, in einer dreyſeitigen Pyramide denjenigen Punct zu finden, von welchem aus die nach den Ecken gezogenen geraden

die Pyramide in vier Pyramiden theilen, deren Verhältniſſe gegeben ſind. Dadurch gelangt der Verf. auch zu Formeln zur Beſtimmung des Halbmeſſers der eingeſchriebenen Kugel, welche zwar ſehr ſymmetriſch, im Grunde aber ſehr zuſammengeſetzt ſind. Ein ſchöner Satz iſt folgender über den **Schwerpunct** einer dreyſeitigen Pyramide. Er iſt einerley mit dem Schwerpuncte vier gleicher (mit ihren Schwerpuncten) auf den vier Ecken der Pyramide geſtellten Körper.

29. Eine geometriſche Kleinigkeit iſt noch dieſe. Eine dreyſeitige Pyramide werde parallel mit zwey Seitenlinien geſchnitten, die nicht in derſelben Ebene liegen: der Schnitt iſt ein Parallelogramm.

30. Das **Netz** einer Pyramide iſt die in eine Ebene ausgebreitete Oberfläche. Es iſt leicht gezeichnet, wenn nur die Seiten und Winkel der Seitenflächen (mit Inbegriff der Grundfläche) bekannt ſind. Die drey um den Scheitelpunct werden nach der Reihe an einander gelegt, an eine derſelben wird die Grundfläche über der beiden gemeinſchaftlichen Seite gefügt.

Pyramidalzahlen ſind die Summen von Polygonalzahlen. Man nennt ſie dreyeckige, viereckige, fünfeckige u. ſ. f. nachdem ſie Summen von Trigonal-Tetragonal-Pentagonalzahlen u. f. ſind.

Der allgemeine Ausdruck für eine Polygonalzahl iſt $p = \frac{1}{2}(m-2)r^2 - \frac{1}{2}(m-4)r$. (Polygonalzahl, 5), wo m die Winkelzahl und r die Stellenzahl der Polygonalzahl iſt. Um die Summe von r Polygonalzahlen p zu haben, muß die Summe der Quadrate und der Wurzeln r genommen werden. Es iſt

$S.\,r^2 = \frac{1}{6}r(r+1)(2r+1)$, und $S.\,r = \frac{1}{2}r(r+1)$, ſ. arithm. Reihen höherer Ordn. 14. Daher iſt S. p. oder die Pyramidalzahl =

$$\tfrac{1}{12}(m-2)r(r+1)(2r+1) - \tfrac{1}{4}(m-4)r(r+1).$$

$$= \tfrac{1}{6}[(m-2)r - m + 5]\,r(r+1).$$

oder auch $S.\,p = \frac{1}{6}\left((m-2)r^3 + 3r^2 - (m-5)r\right)$.

Es iſt alſo die rte Trigonal-Pyramidalzahl $=$
$\frac{1}{6} r . r + 1 . r + 2.$

Die rte Tetragonal-Pyramidalzahl
$= \frac{1}{6} r . r + 1 . 2r + 1.$

Die rte Pentagonal-Pyramidalzahl u. ſ. f.
$\frac{1}{6} r . r + 1 . 3r.$ $\frac{1}{6} r . r + 1 . 4r - 1.$
$\frac{1}{6} r . r + 1 . 5r - 2.$ $\frac{1}{6} r . r + 1 . 6r - 3.$
u. ſ. w.

Z. B. Trig. Pyram. Z. 1, 4, 10, 20, 35. etc.
Tetrag. Pyram. Z. 1, 5, 14, 30, 55. etc.
Pentag. Pyram. Z. 1, 6, 18, 40, 74. etc.
Hexag. Pyram. Z. 1, 7, 22, 50, 95. etc.

Die Anzahl der in einer dreyſeitigen gleichförmigen Pyramide in den Zeughäuſern aufgeſetzten Kugeln iſt eine Trigonal-Pyramidalzahl, in einer gleichviereckigen eine Tetragonal-Pyramidalzahl.

Alle dieſe Zahlen heißen **erſte Pyramidalzahlen**. Ihre Summen heißen **zweyte** Pyramidalzahlen; deren Summen **dritte**; u. ſ. w. Es verlohnt ſich nicht der Mühe dieſe Summe anzugeben. Sie beruhen auf Summirungen der Potenzen.

Pyrgoidalzahl (thurmförmige Zahl) iſt die Summe einer Columnarzahl und Pyramidalzahl von einerley Gattung, wenn in der letztern die Seite oder Wurzel um 1 kleiner iſt als in jener. Eine **Columnarzahl** iſt aber das Product aus einer Polygonalzahl in ihre Wurzel. Blos zur Uebung im Rechnen folgt hier die Form einer ſolchen Zahl, nämlich

$$\frac{2}{3}(m-2) r^3 - \frac{1}{2}(2m-7) r^2 + \frac{1}{6}(2m-7) r.$$

Pythagoriſcher Lehrſatz iſt der bekannte Satz, daß in einem rechtwinkligen Dreyeck das Quadrat der Hypotenuſe ſo groß iſt als die Summe der Katheten. Der Satz wird nach dem Pythagoras genannt, dem die Entdeckung zugeſchrieben wird. Th. II. S. 317. Der Satz öffnete eine Bahn zu neuen Unterſuchungen, und iſt uns auch als Document der Fortſchritte in der Geometrie im

6ten Jahrh. v. C. G. wichtig. Pythagoras oder einer ſeiner Nachfolger mag darauf durch eine arithmetiſche Frage gekommen ſeyn, über die Zuſammenſetzung einer rationalen Quadratzahl aus zwey rationalen Quadraten. Denn dieſe Aufgabe haben die Pythagoräer aufgelöſet, da ſie überhaupt ſich viel mit den Eigenſchaften der Zahlen beſchäftigten, ſ. Th. I. 176. Hatte man ſolche Zahlen gefunden, und verſuchte nun die Wurzeln als Linien zu einem Dreyeck zuſammen zu ſetzen, ſo gab der Augenſchein, daß es rechtwinklige Dreyecke wurden. Nun entſtand die Veranlaſſung den Beweis der Allgemeinheit zu ſuchen. Der Beweis, den Euklides von dem Lehrſatze giebt, iſt ſchwerlich der urſprüngliche, da die Zurüſtung zu demſelben zu künſtlich iſt für einen, der den Satz noch nicht kennt.

Die Bemerkung, daß das Quadrat der Hypotenuſe eines gleichſchenkligen rechtwinkligen Dreyecks doppelt ſo groß iſt als das Quadrat einer der gleichen Katheten, war leicht gemacht, ohne Zweifel früher als der allgemeine Satz gefunden ward. Man konnte alſo auch die Seite des vierfachen Quadrats u. ſ. f. in verdoppelter Fortſchreitung finden. Aber andere Vielfache anzugeben ward ſchwierig, eben ſo als irgend welche Zuſammenſetzungen. Man nahm alſo wahrſcheinlich ſeine Zuflucht zu arithmetiſchen Zuſammenſetzungen rationaler Quadrate als der von 9 und 16; von 25 und 144 u. a. Da fand man, daß die Dreyecke rechtwinklig wurden.

Oder man iſt durch eine zufällige leichte Conſtruction darauf gerathen, etwa indem man in ein Quadrat ein anderes einzeichnete, und die Theile verglich, vielleicht gar folgendergeſtalt.

In ein Quadrat ABCD (Fig. 157.) zeichne man ein anderes EFGH ein, indem man AE, BF, CG, DH gleich groß nimmt, und EF, FG, GH, HE zieht. Denn dadurch ſind die Dreyecke EF, FCG, GDH, HAE gleich und ähnlich. Da der W. GFC = BEF iſt, ſo iſt W. EFB + GFC = einem Rechten, daher auch W. GFE. So auch ſind die drey andern Winkel der

eingezeichneten gleichſeitigen Figur rechte Winkel, und die Figur iſt ein Quadrat. Man ziehe GK parallel mit DA, und HL parallel mit AB, welche beide ſich in M ſchneiden, ſo beſteht das Quadrat AC aus den beiden Quadraten AM und MC, und den beiden gleichen Rechtecken DM, BM. Dieſe Rechtecke ſind jedes doppelt ſo groß als eines der von dem Quadrate AC abgeſchnittenen vier Dreyecke. Nimmt man dieſe vier Dreyecke von dem Quadrate AC weg, ſo bleibt das Quadrat EFGH übrig. Nimmt man die beiden Rechtecke weg, ſo bleiben die beiden Quadrate AM, CM übrig. Die Summe dieſer beiden iſt alſo dem eingeſchriebenen Quadrate gleich. Jene Quadrate ſind die Quadrate der Katheten eines der Dreyecke, wie HDG, und das eingezeichnete iſt das Quadrat der Hypotenuſe HG.

Dieſen ungemein einfachen Beweis finde ich in einem engliſchen Lehrbuche der Geometrie von Henry Boad, London 1733.

Der Euklidiſche ſehr ſchöne Beweis wird faſt in allen Lehrbüchern der Geometrie angetroffen. Man hat ſonſt noch manche Beweiſe des berühmten Lehrſatzes. Eine Sammlung von Beweiſen findet man in einer akademiſchen Diſſertation von Scherz und Stöber zu Strasburg 1743, und in einer ſolchen von Lange und Jetze, Halle 1752. Der Beweis, den ich in meinen Anfangsgründen der Geometrie (Encyklopädie, Th. II.) gegeben habe, iſt vielleicht ſonſt nicht angewandt; er iſt dem ähnlich, den Pappus bey der Aufgabe gebraucht, zwey Parallelogramme in ein einziges mit einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Pythagoriſche Rechentafel iſt das Einmahleins in die Fächer eines Quadrats vertheilt. Man ſchreibt die Einrichtung dem Pythagoras zu, vermuthlich aus einem Mißverſtande. Der Abacus der Pythagoräer, welchen Boethius aufbewahrt hat, iſt kein Einmahleins. ſ. Zahlzeichen.

Druckfehler und Verbeſſerungen.

Im erſten Theile.

S. 258. Z. 3. vor φ^7 ein d, und vor φ^9 ein e einzuſchieben.
— 270. — 5. ſt. $y + 2$ l. $y = 2$.
— 336. — 2. v. u. ſt. $(a + b^2$ l. $(a + b)^2$.
— 337. — 7. v. u. iſt der Exponent des Binomium $-n$.
— 677. — 6. ſt. 50. l. 53.
— 678. — 2. ſt. III, l. 82.
— 760. — 4. laſſe man weg: und ähnliche, als welches nur bey ſenkrechten Parallelepipeden Statt findet.
— 910. — 13. das Citat, Kegelſchnitte, iſt in Parabel abzuändern.

Im zweyten Theile.

S. 82. Z. 1. v. u. ſt. y l. y^2.
— 273. — 6. ſtatt unbekannt, ſetze man unbeſtimmt.
— 388. — 10. ſt. $p =$ l. $P =$
— 389. — 16. nach Glieder hinzuzuſetzen: durch $x - p$.
— 390. — 12. v. u. ſtatt des erſten $=$ das Zeichen $>$
— 533. — 16. ſt. $2 \sin\frac{1}{2}$ l. $2 \sin\frac{1}{2} b$.
— 536. — 5. v. u. ſt. -2α l. $+2\alpha$.
— 536. — 4. v. u. ſt. -3α l. $+3\alpha$.
— 587. — 14. ſt. 35 l. $35 \cos\varphi$.
— 638. — 6. ſtatt $+$ am Ende der Zeile $\times$.
— 682. — 4. v. u. ſt. 155 l. 255.
— 820. — 9. l. auf die von $x^{m-1} (a + bx^n)^{p+1}$
— 851. — 10. fehlt das Integralzeichen.
— 860. — 11. l. $(a + b \cos\varphi)^2$.
— 935. zu §. 85. noch hinzu zu ſetzen: An dem oberſten Ende der Elaſtica, wo das krümmende Gewicht aufgehängt iſt, iſt $x = 0$. Iſt hier die berührende horizontal, ſo iſt $cc = 0$, und die Gleichung für die Elaſtica iſt $\partial y = -\frac{x \partial x}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$. Nimmt man die Abſciſſenlinie auf der berührenden von dem Berührungspuncte an, ſo iſt die Curve convex gegen die Abſciſſen-

linie

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS.

linie, und der Halbmeſſer der Krümmung iſt $= + \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{q}$. Dieſes giebt

$$\partial y = + \frac{xx\partial x}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}.$$

S. 949. Z. 2. v. u. ſt. Ram l. Raum.

Im dritten Theile.

S. 1. Kante heißt im Franzöſiſchen Arête.
— 19. Z. 6. ſt. FG ⨯ PG l. FP ⨯ PG.
— 66. — 14. ſt. $y + \frac{1}{q}$ l. $p + \frac{1}{y}$.
— 77. — 11. ſt. 47 l. 57.
— 82. — . v. u. ſt. + z l. 1 + z.
— 189. — 13. ſt. PM ⨯ PY l. PM ⨯ PN.
— 191. — 4. ſt. AB l. BB.
— 197. — 11. ſt. n^2b^2d l. n^2bd.
— 200. — 6. Es hätte hier A = 1 genommen werden müſſen. Oder es iſt $2b = \frac{D}{A}$; $\frac{2b}{a} = \frac{B}{A}$

und $\frac{1}{4} B^2 \left(1 + \frac{m^2 c^2 A^2}{D}\right) = AC.$

— 274. — 3 u. 4. v. u. nach Axen zu ſetzen, der.
— 288. — 14. v. u. ſt. AN, AP l. MN, NP.
— 288. — 10. v. u. ſt. Tu l. TU.
— 291. — 19. ſt. AM l. NM.
— 294. — 7. ſt. BC l. DC.
— 313. — 10 u. 12. v. u. ſt. KC l. KE.
— 332. — 7. ſt. NP l. QP.
— 336. — 12. ſt. Axe l. Axen.
— 401. — 14. ſt. $(y-b)^2 \partial y$ l. $(y-b)\partial y$.
— 417. — 6. ſt. 104 l. 105.
— 439. — 11. v. u. ſt. gen[illegible]ten l. genäherten.
— 470. — 10. v. u. ſt. $-\frac{B'}{A'}$ l. $-\frac{B'}{A'}x$.
— 508. — 2. das eine = nach dem Bruche zu ſetzen.
— 527. — 19. nach nächſte zu ſetzen, ganze.
— 539. §. 119. Käſtner ſagt in den geometriſchen Sammlungen I. Nr. 60, S. 479 ausdrücklich, die Neperiſchen Logarithmen ſeyn mit den natürlichen nicht einerley, ſtimmt alſo im Weſentlichen mit Karſten überein.
— 577. — 4. muß die Folge der Vorzeichen ſeyn
+ − + − + −.

S. 659. Z. 12. vor gerade zu ſetzen, gegebene.
— 685. — 11. ſt. $Bx^{-\frac{7}{2}}$ l. $Bx^{\frac{7}{2}}$.
— 685. — 12. ſt. $Cx^{-\frac{1}{2}}$ l. $Cx^{\frac{1}{2}}$
— 685. — 13. ſt. $Ax^{-\frac{1}{2}}$ l. $Ax^{\frac{1}{2}}$
— 722. — 4. v. u. ſt. $(z\, x \cos\alpha$ l. $z(x \cos\alpha$.
— 723. — 6. nach $y \sin\beta$ ein).
— 749. — 5. ſt. nach y l. nach x.
— 767. — 6. v. u. ſt. $f(y)$ l. $F(y)$.
— 775. — 5. v. u. iſt z wegzulaſſen.
— 804. — 18 u. 20. v. u. ſt. Lk l. LK.
— 832. — 14. v. u. ſt. denſelben l. zwey.

Verbeſſerungen in den Figuren.

Fig. 109. iſt noch die gerade AE zu ziehen.
— 119. iſt die Chorde AG zu ziehen.
— 122. iſt die Chorde CF zu ziehen.
— 149. iſt noch die Linie VO zu ziehen.

Nachricht.

Die Figuren 151. 152. welche auf der Platte nicht Platz hatten, werden bey dem vierten Theile nachgeliefert. Sie gehören zu den Exempeln in dem Artikel Porisma, und konnten am erſten wegbleiben, mögen auch leicht nach der Angabe daſelbſt gezeichnet werden.

Dem vierten Theile werde ich noch Ergänzungen beyfügen.

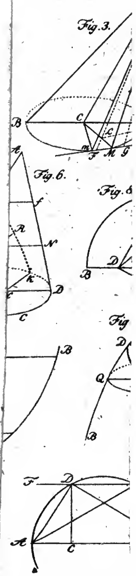


Fig. 3.
B
C
c
m
F
M
G
A
Fig. 6.
f
R
N
K
D
C
D
B
B
Fig
D
Q
B
F
D
A
C

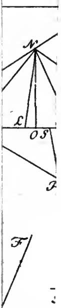
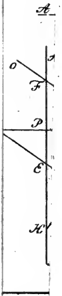


Fig.



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Google

Digitized by Google

Digitized by Google

610.